કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી : 3

કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ અને ક્રાન્તિકારો

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પારસ દિ. ઉચાટ

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય

ગાંધીનગર

ડૉ. પારસ દિ. ઉચાટ (1979) વર્ષ 2013થી ભારતીય શિક્ષણ પ્રશિક્ષણ સંસ્થાન (ટીચર્સ યુનિવર્સિટી) ગાંધીનગરમાં આસિસ્ટન્ટ પ્રોફેસર તરીકે સેવાઓ આપી રહ્યા છે. આ પૂર્વે તેમણે વર્ષ 2003થી 2013 દરમિયાન રાજકુમાર કૉલેજ, રાજકોટ, વી. પી. એમ. પી. પોલિટેક્નિક અને એલ. ડી. આર. પી. એન્જિનિયરિંગ કૉલેજ, ગાંધીનગરમાં વ્યાખ્યાતા તરીકે સેવાઓ આપી હતી. તેમણે 'સ્ટડી ઑફ સમ ઑપરેશન ઑફ ગ્રાફ્સ' વિષયમાં ગણિતશાસ્ત્ર વિષયમાં સૌરાષ્ટ્ર યુનિવર્સિટી, રાજકોટમાંથી પીએચ.ડી. (2009)ની ડિગ્રી મેળવી છે. ગ્રાફ થિયરી તેમજ ગણિતશિક્ષણ વિશેના તેમના સંશોધન લેખો રાષ્ટ્રીય અને આંતરરાષ્ટ્રીય સ્તરનાં જર્નલ્સમાં પ્રગટ થયા છે. વિદ્યાર્થીઓમાં ગણિતને રસપ્રદ બનાવવા અવનવા પ્રયોગો હાથ ધરવા એ તેમનો પોતીકો શોખ છે.

સંપર્ક : 'રેખાંશ', પ્લોટ નં. 370/1,
સેક્ટર-12/સી, ગાંધીનગર
મો. 9824434459

(કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી : 3)

કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ
અને
ક્રાન્તિકારો

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી

આર્કેટા, કેલિફોર્નિયા

અને

પારસ દિ. ઉચાટ

ભારતીય શિક્ષણ પ્રશિક્ષણ સંસ્થાન

ગાંધીનગર, ગુજરાત

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય

ગાંધીનગર

કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ અને ક્રાન્તિકારો
Kalanganitni Krantio ane Krantikaro
By Vitthalbhai A. Patel and Paras D. Uchat
Published by Kadi Sarva Vishwavidyalaya, Gandhinagar, 2021
(Kadi Sarva Vishwavidyalaya Publication Series; 3)

© લેખકો

પ્રથમ આવૃત્તિ, 2021

પૃષ્ઠ : 12 + 180

કિંમત : ₹ 250

ISBN : 978-81-954203-3-9

પ્રકાશક
કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય
સેક્ટર-15, ગાંધીનગર-382016
ફોન : 079-23244690

મુદ્રક :
ભગવતી ઑફ્સેટ
સી/16, બંસીધર એસ્ટેટ, બારડોલપુરા, અમદાવાદ-380004

શિક્ષણક્ષેત્રે ખૂબ જ ઉમદા કાર્ય કરતી
કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય,
ભારતીય શિક્ષણ પ્રશિક્ષણ સંસ્થાન
અને
કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળાને
અર્પણ

"निहत्य चापवर्गेण चापं तत्तत् फलानि च।
हरेत् समूलयुगवर्गैस्त्रिज्यावर्गाहतैः क्रमात्।
चाँप फलानि चाद्योडधौ न्यस्योपर्युपरि त्यजेत्।
श्रीवाप्यतै..."

પ્રાક્કથન

સામાન્યતઃ વિશ્વવિદ્યાલયનું કાર્ય વિવિધ – વિષયોમાં ઉચ્ચસ્તરીય અધ્યયન-અધ્યાપન-સંશોધન અને તેના પ્રચાર-પ્રસારનું રહ્યું છે. આ પાયાના ખ્યાલને ક્રિયાન્વિત કરવા માટે 'કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય', ગાંધીનગર તેના સ્થાપનાકાળથી પ્રતિબદ્ધ રહ્યું છે. આ યુનિવર્સિટીની માતૃસંસ્થા 'સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળ', કડી – ગાંધીનગર દ્વારા પણ નિયમિત રીતે પુસ્તકોનું પ્રકાશન કરવામાં આવી રહ્યું છે.

'કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય', ગાંધીનગર દ્વારા બે સંશોધન – જર્નલ્સ અને વૃત્તપત્રનું પ્રકાશન કરવામાં આવે છે. આ ઉપરાંત તેની પ્રકાશન-શ્રેણી 'કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી' અંતર્ગત આ પૂર્વે બે પુસ્તકોનું પ્રકાશન કરવામાં આવ્યું હતું. આ અનુસંધાનમાં તેના તૃતીય પ્રસૂન તરીકે પ્રો. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ અને પ્રો. પારસ દિ. ઉચાટ કૃત **'કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ અને ક્રાન્તિકારો'**ને આવકારતાં પ્રસન્નતા અનુભવું છું. મારી જાણ મુજબ ગુજરાતી ભાષામાં ગણિત-વિજ્ઞાનનાં સ્તરીય પુસ્તકોના અલ્પપ્રમાણને ધ્યાને લેતાં આ બંને લેખકોનાં વિદ્યાકીય પુરુષાર્થથી તૈયાર કરવામાં આવેલ પ્રસ્તુત પુસ્તક બહુમૂલ્ય બની રહેશે. આ સંદર્ભે ખાસ ઉલ્લેખનીય અને ગર્વરૂપ ઘટના તો એ છે કે ગુજરાતી ભાષામાં પ્રથમ વખત કલનગણિતનો ઇતિહાસ અને આ ઇતિહાસના સર્જકો એવા પ્રતિભાસંપન્ન ગણિતજ્ઞોનાં જીવન-કવનને આવરી લેતો ગ્રંથ પ્રગટ થઈ રહ્યો છે, તેથી આ બંને લેખકો આપણાં અભિનંદનનાં અધિકારી બની રહે છે. અને આમેય, ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ પટેલ તો સર્વ વિદ્યાલયના પૂર્વ-મેધાવી વિદ્યાર્થી, સંસ્થાના મુખ્યદાતાશ્રી તેમજ હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી, આર્કેટા (કેલિફોર્નિઆ)ના 'Dozen Golden Professors' પૈકીના એક હોવાનું ગૌરવ ધરાવે છે, જેનું મારે મન ભારે ગૌરવ છે. વિદ્યા-અર્થી તરીકે આપણો ધ્યેયમંત્ર **'સં શ્રુતેન ગમેમહિ'** (અથર્વવેદ ૧.૧.૪) = આપણે જ્ઞાનપૂર્વક, વિચારપૂર્વક ચાલીએ, વર્તીએ – બની રહે એ જ અભ્યર્થના.

વલ્લભભાઈ એમ. પટેલ

પ્રેસિડન્ટ, કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય, ગાંધીનગર
ચેરમેન, સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળ,
કડી-ગાંધીનગર

પ્રાસ્તાવિક

પ્રસ્તુત પુસ્તક કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ અને ક્રાન્તિકારોએ મૂલતઃ ગણિતની ક્રાન્તિઓના ભાગરૂપ જ છે. કલનગણિતની ક્રાન્તિઓની સમજ અને લેખન માટે પ્રમાણમાં ઘણો સમય જોઈએ. ખરી તકલીફ લક્ષની છે. આ સંબંધી જૂનાં સંશોધન પેપરો પણ સમજતાં ઘણો સમય જાય. આ પુસ્તક 10 પ્રકરણોમાં વિભાજિત છે. આ સાથે 4 ઉપયોગી પરિશિષ્ટો પણ આપ્યાં છે.

પ્રકરણ 1માં ફર્માના કામની રૂપરેખા આપી છે. ફર્મા સાચા અર્થમાં ગણિતશાસ્ત્રી હતા જેમને પરિણામો મેળવવામાં જ રસ હતો. ક્યાંય તેમણે મેળવેલાં પરિણામોની વાત કરતાં તેમને કોઈએ જોયા નથી. તેમણે સ્પર્શક મેળવવાની રીત દર્શાવી છે. સાથેસાથે વક્રોની લઘુત્તમ અને મહત્તમ કિંમતો મેળવવાની રીત પણ આપી છે. વિકલન કલનગણિત તેમણે વિકસાવ્યું, પરંતુ તેઓ કલનશાસ્ત્રના Fundamental Theoremને જોઈ શકેલા ન હોઈને તેમને કલનગણિત શોધવાનો યશ મળતો નથી.

પ્રકરણ 2માં લાઇબ્નિઝના કલનશાસ્ત્રના પ્રથમ સંશોધન પેપરના થોડાક ભાગનું ગુજરાતી ભાષાંતર આપ્યું છે. આ પેપરમાં વિકલનના ગુણાકાર અને ભાગાકારના નિયમો તથા વક્રની લઘુત્તમ અને મહત્તમ મેળવવાની રીત આપેલાં છે. બીજા વિકલનનો ઉપયોગ કરીને લઘુત્તમ અને મહત્તમ કિંમત નક્કી કરી શકાય તે પણ બતાવ્યું છે. Concave અને Convex ને જુદા પાડતું બિંદુ point of inflection પણ આપ્યું છે. આ બધું ફક્ત સાડા છ પાનાના મૂળમાં લેટિન ભાષામાં લખાવેલા સંશોધન પેપરમાં આપ્યું છે. અલબત્ત અહીં સાબિતીઓ આપેલી નથી. આથી, આ પેપર વાંચવું ખૂબ જ અઘરું છે અને તેના મુદ્રણમાં પણ ઘણી ભૂલો છે. આવા સંજોગોમાં ભાગ્યે જ કોઈએ એ સમયે આ પેપર વાંચ્યું હોય. નસીબ જોગે બર્નૂલિભાઈઓ વળગ્યા રહ્યા અને આપણે જે સ્વરૂપમાં કલનગણિત જાણીએ છીએ તે સ્વરૂપમાં તેમણે આપ્યું છે. આ સાથે મૂળ પાયાનું પ્રમેય : Fundamental Theorem of Calculus પણ લાઇબ્નિઝે સાબિતી સાથે આપ્યું છે. જોકે અમે અહીં તે સાબિતીનું ભાષાંતર આપ્યું નથી. વધુમાં, આ ઐતિહાસિક પ્રસંગ હોઈને અમે તે પેપરના પહેલા પાનાની પ્રતિકોપી તેના દર્શન હેતુ અહીં આપી છે.

પ્રકરણ 3 દ્વિપદી પ્રમેયથી શરૂ થાય છે. ન્યૂટનનો કેવો વિશદ અભ્યાસ હશે કે જેથી તે સરળતાથી આવું પ્રમેય આપી શકે છે. ન્યૂટન ચલના બદલે ફ્લુઅન્ટ અને વિકલન માટે ફ્લક્સિઓન વાપરે છે, જે ભૌતિકશાસ્ત્રની રીતે ચલ અને ગતિ માટે ચાલે. ન્યૂટને કઈ રીતે ફ્લક્સિઓન મેળવવા તે પણ બતાવ્યું છે.

પ્રકરણ 4માં ન્યૂટન જે રીતે π ની કિંમત મેળવે છે તે રીત જોવા જેવી છે. આ રીતથી એક સારા ગણિતશાસ્ત્રીની સરળતાનો ખ્યાલ આવે છે. ન્યૂટનના પ્રિન્સિપિયાની વાત ન કરીએ

એ તો ખ્રિસ્તીઓને બાઇબલની, મુસ્લિમોને કુરાનની અને હિંદુઓને ગીતાની વાત ન કરીએ તેના જેવું જ છે. ન્યૂટનના પ્રિન્સિપિઆથી સમાજ જે અંધશ્રદ્ધામાં જ માનતો, તે બદલાઈ ગયો. ન્યૂટન તેમની પાછળની જિંદગી વૈજ્ઞાનિક તરીકે જીવ્યા નથી.

પ્રકરણ 5માં બર્નૂલિ કુટુંબની અનોખી વાર્તા છે. રાજકીય ક્ષેત્રે દુનિયામાં ઘણાં બધાં કુટુંબોએ કામ કર્યું છે. જ્યારે વિજ્ઞાનમાં પ્રમાણમાં ઓછા કુટુંબોએ કામ કર્યું છે. ગણિતના ક્ષેત્રમાં બર્નૂલિ કુટુંબ તેવું છે. શરૂઆતના બે ભાઈઓ જેકોબ I અને જોહાન્નીસ I સાથે બેસીને લાઇબ્નિઝનું પહેલું કલનગણિતનું સંશોધન પેપર સમજ્યા. આ પછી તેઓ લાઇબ્નિઝના પ્રશંસકો અને ટેકેદારો પણ બન્યા જેના કારણે લાઇબ્નિઝનું કલનગણિત દુનિયાભરમાં વપરાતું થયું. જો આ બંને ભાઈઓએ સાથે મળીને કામ ન કર્યું હોત તો આપણે બધા આજે કયા પ્રકારનું કલનગણિત વાપરતા હોત? આ એક મોટો પ્રશ્ન છે. જોહાન્નીસ I એ મારક્વિસ ડી લૉપિટાલને કલનગણિત શીખવ્યું અને લૉપિટાલે કલનગણિતનું પહેલું પુસ્તક લખ્યું. બાકીના બધા બર્નૂલિઓનો કલનગણિત માટે ખાસ ફાળો નથી. આમ છતાં, એક અનોખા કુટુંબના સભ્યોના પ્રદાન વિશે થોડીઘણી માહિતી જાણવી જરૂરી બની રહે છે.

પ્રકરણ 6માં કલનગણિતનાં પુસ્તકો વિશે આપ્યું છે. સૌથી પહેલું લૉપિટાલનું કલનગણિતનું પુસ્તક લગભગ પંચોતેર વર્ષ સુધી પ્રચલનમાં હતું. જેમ યુક્લિડની ભૂમિતિ ઘણી સદીઓ સુધી ખૂબ જ ઉપયોગી ભૂમિતિનું પુસ્તક હતું, તેમ ઑઇલરનાં લખેલાં ત્રણ કલનગણિતનાં પુસ્તકોમાંથી ઘણા દેશો કલનગણિત શીખેલા. અહીં ઑઇલરનું જીવનચરિત્ર પણ આપ્યું છે.

પ્રકરણ 7માં કલનગણિતના પાયાના બે મુખ્ય સ્તંભો જ્યૉર્જ બર્કલી અને લાગ્રાન્જ. જ્યૉર્જ બર્કલી બધા જ ગણિતશાસ્ત્રીઓની સામે ઊભા રહેનાર. તેમની વાત તદ્દન સરળ હતી. કોઈ પણ પ્રવૃત્તિમાં બે ધારણાઓ એકબીજાના વિરુદ્ધ લઈ ન શકો. કોઈ પણ વિકલન મેળવવા માટેની પ્રવૃત્તિમાં શરૂઆતમાં $h \neq 0$ નથી કહો, અને પછી $h = 0$ લઈને પરિણામ મેળવો. જ્યૉર્જ બર્કલી આ બાબતના સખત વિરોધી હતા. તેમની નજરમાં આ અંધશ્રદ્ધાથી એ વધારે હતું. જ્યૉર્જ બર્કલીએ કલનશાસ્ત્રમાં કામ કરતા દરેક ગણિતશાસ્ત્રીને વિચારતા કરી દીધા. લાગ્રાન્જને પણ જ્યૉર્જની દલીલોએ કલનગણિતના પાયાઓમાં રસ લેતા કર્યા અને ઉકેલ શોધવા પ્રેરિત પણ કર્યા. આ બંનેનો પરિચય પણ આ પ્રકરણમાં આપ્યો છે.

પ્રકરણ 8માં આખરે બધા પ્રશ્નોનો જવાબ મળે છે. લક્ષ (Limit) એ નવો વિચાર છે. લક્ષ માટે કોશી સરસ ઉદાહરણ આપે છે. વર્તુળ ઉપર સરખા અંતરે બિંદુઓ લઈને અને આ બિંદુઓ જોડીને બહુકોણ રચીએ. આ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવીએ. શરૂઆતમાં ત્રણ, ચાર, પાંચ,... બિંદુઓ લઈએ અને દરેક બહુકોણનાં ક્ષેત્રફળો મેળવીએ. દરેક વખતે થોડુંક ક્ષેત્રફળ વધશે. જેમ જેમ બાજુઓ વધતી જશે તેમ તેમ બહુ જ ઓછું ક્ષેત્રફળ ઉમેરાશે. આ ક્ષેત્રફળો કોઈ ચોક્કસ સંખ્યાએ પહોંચશે અને તે સંખ્યા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ છે. કોશીએ લક્ષની વ્યાખ્યા આપી છે. વાયર્સ્ટ્રાસે કોશીની લક્ષની વ્યાખ્યાને ε અને

δ ના સ્વરૂપમાં દર્શાવી છે, જે ખરેખર અદ્ભુત છે. વાયર્સ્ટ્રાસે એવું વિધેય શોધ્યું છે કે જે બધા જ બિંદુએ સતત છે પણ તેના કોઈ બિંદુએ સ્પર્શક દોરી ન શકો એટલે કે કોઈ બિંદુએ વિકલન મેળવી ન શકો. આ વિધેયને વાયર્સ્ટ્રાસે અનંત શ્રેઢીમાં દર્શાવ્યું છે.

પ્રકરણ 9માં સતત વિધેયના વક્ર અને x-અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ કઈ રીતે મેળવી શકાય તે બતાવ્યું છે. આપેલા અંતરાલમાં જો વિધેય સાન્ત (finite) જગ્યાએ અસતત હોય, તો કોશીએ આપેલી રીતથી સંકલન મળી શકે. જો અનંત જગ્યાએ અસતત હોય, તો શું ? રીમને આપેલ વિધેય અંતરાલમાં સીમિત (bounded) હોઈ સંકલન માટેની શરતો મેળવી છે. ડિરિચ્લેટ વિધેયનું સંકલન મેળવી શકાતું નથી, તેથી અહીં દર્શાવ્યું નથી.

પ્રકરણ 10માં રીમન સંકલન માટે આપણે પ્રદેશ (Domain) $[a, b]$ નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ છીએ. આ પેટા અંતરાલ Δx_i માં x_i^* ગમે તે બિંદુએ લઈને લંબચોરસ દોરીએ. જેનું ક્ષેત્રફળ $f(x_i^*)\,\Delta x_i$ છે. આવા બધા લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ ક્ષેત્રફળ આપે છે. લેબેગે (Lebesgue) આથી જુદો, છતાં સરળ અને હિંમતવાળો રસ્તો બતાવ્યો. વિધેયના ક્ષેત્રના (domain) બદલે વિસ્તારનું (Range) વિભાજન કરવા સૂચવ્યું. ધારો કે, $\mathrm{L} \le f(x) \le \mathrm{M}$ જ્યાં L એ fની ઓછામાં ઓછી અને M એ fની વધારેમાં વધારે કિંમત છે અને xની કિંમત અંતરાલ $[a, b]$ માં આવેલી છે. y-અક્ષ ઉપર અંતરાલ [L, M] નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ. આપણે અંતરાલ $[y_i, y_{i+1}]$ ની $y = y_i$ અને $y = y_{i+1}$ સમાંતર રેખાઓ દોરીએ જે $y = f(x)$ ને ઘણી જગ્યાએ છેદે છે. આ વિધેય સતત ન હોય, તો છેદાતા ભાગો જુદા જ પ્રકારના ગણો હશે. અને આવા ગણોની લંબાઈ કે માપ મેળવવું તે આ પ્રકરણમાં આવ્યું છે. આ બધા ગણોના યોગ(Union)ને E_i થી દર્શાવીએ અને તેના માપને $m(\mathrm{E}_i)$ થી દર્શાવીશું. y_i^* અંતરાલ $[y_i, y_{i+1}]$ માં કોઈ પણ બિંદુ છે. આ બંનેનો ગુણાકાર $m(\mathrm{E}_i)\,y_i^*$, $\Delta x_i\; f(x_i^*)$ ના જેવો જ છે. આ બધાંનો સરવાળો $\sum\limits_{i=1}^{n} m(\mathrm{E}_i)\,y_i^*$ છે. જેમ જેમ Δy_i નાનો બનશે તેમ જો $\lim\limits_{\Delta y_i \to 0} \Sigma m(\mathrm{E}_i)\,y_i^*$ અનોખી કિંમત હોય, તો તેને $\int_a^b f(x)dx$ થી દર્શાવીએ. આને લેબેગ સંકલ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ડિરિક્લેટ વિધેય બધા જ બિંદુએ અસતત છે અને તેનું રીમન સંકલન મળતું નથી, જ્યારે તે વિધેયનું લેબેગ સંકલન મળે છે.

પરિશિષ્ટ ૧માં કલનગણિત શું છે તે સમજાવવાનો નમ્ર પ્રયાસ છે. કલનગણિતના મુખ્ય કામોમાંનું એક કામ જટિલ પ્રશ્નોને નાના નાના પ્રશ્નોમાં વહેંચીને નાના પ્રશ્નોના

ઉકેલો મેળવવાનો છે. આ ઉકેલોનો સરવાળો કરીને જટિલ પ્રશ્નોનો ઉકેલ મેળવી શકાય. વર્તુળનો પરિઘ આ રીતે મળે તે બતાવ્યું છે. વક્રો બધે જ ઉપયોગી છે અને તેના અભ્યાસ માટે સ્પર્શકો ખૂબ જ ઉપયોગી. સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવવા માટે સ્પર્શકનો ઢાળ ખૂબ જ ઉપયોગી. સ્પર્શકના ઢાળ, વેગ અને ફેરફારોના દર વગેરેમાં સરખાપણું છે અને તે મેળવવાની રીત વિકલન છે.

પરિશિષ્ટ ૨માં માધવે શરૂ કરેલી કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળાનો ઇતિહાસ છે અને જ્યેષ્ઠદેવે લખેલા 'યુક્તિભાસ'માંથી $sinx$ અને $cosx$ની શ્રેઢી આપતા બે શ્લોકો છે. યુક્તિભાસમાં શ્રેઢીની સાબિતીઓ પણ છે. આ બધું ન્યૂટન અને ટેલરની મેળવેલી શ્રેઢીના લગભગ દોઢસો વર્ષ પહેલાં માધવે મેળવેલી.

પરિશિષ્ટ ૩માં કલનગણિતના મહત્ત્વના પ્રસંગોની માહિતી અને ક્યારે બન્યા તે વર્ષ પણ આપ્યું છે.

પરિશિષ્ટ ૪માં કલનગણિતમાં વપરાતા અંગ્રેજી પારિભાષિક શબ્દોનું ગુજરાતી આપ્યું છે.

આ પુસ્તક શરૂ થયું અને પૂરું થયું તે દરમિયાન કોઈએ પ્રેરણા આપી હોય અને આવા પુસ્તકના વિચારને મરવા ન દીધો હોય તે મણિભાઈ પ્રજાપતિ છે. અમને જરૂરિયાત લાગે, પણ કોઈ આવું પુસ્તક વાંચવા જ ન માગે તો શું કરશો? આખરે બધું માગ ઉપર જ જાય છે. આવા સંજોગોમાં પણ ગુજરાતી સાહિત્યમાં વિજ્ઞાનનાં પાઠ્યપુસ્તકો સિવાય પણ વિજ્ઞાનનાં ઘણાં પુસ્તકોની ઘણી જરૂરિયાત લાગતાં હિંમતભેર પ્રસિદ્ધ કરનાર કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલયને સો સલામ. તેવા બીજા ખાસ મિત્ર જે પણ આવા પુસ્તકના વિચારને મરવા ન દેતા તે પ્રહ્લાદભાઈ વ્યાસ (પી. કે. વ્યાસ). તમારા બંનેનો આભાર માનીએ તેટલો ઓછો છે. પ્રોત્સાહક, રચનાત્મક અને શૈક્ષણિક પર્યાવરણ પૂરું પાડ્યું છે તે બદલ IITEના કુલપતિશ્રી ડૉ. હર્ષદ એ. પટેલનો પણ આભાર માનીએ છીએ.

આખરે માગ હોય કે ન હોય, ઉપયોગી હોય કે ન હોય પણ વિઠ્ઠલભાઈ માગણી મૂકે, તો ખોટું તો નહિ જ હોય એવો અડગ વિશ્વાસ મુકનાર આપણા પ્રેસિડન્ટ વલ્લભભાઈ પટેલનો કઈ રીતે આભાર માનવો તેની સમજ જ પડતી નથી. એક વાત જરૂરથી આપણા પ્રેસિડન્ટ તથા સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળના સભ્યોને જણાવીશું કે ઓછામાં ઓછી ભૂલોવાળું અને ગણિતના શિક્ષકો, વિદ્યાર્થીઓ અને ગણિતશાસ્ત્રીઓને ઉપયોગી થાય તેવું પુસ્તક લખવાનો અમે પૂરેપૂરો પ્રયત્ન કર્યો છે. આશા રાખીએ કે આપ સર્વેએ અમારામાં મૂકેલા વિશ્વાસને પાત્ર અમે હોઈએ.

◆

અનુક્રમણિકા

◆ પ્રાક્કથન V

◆ પ્રાસ્તાવિક VI

0. કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ **1**

0.1 પ્રસ્તાવના

0.2 લક્ષ અને વિકલિત

0.3 ક્ષેત્રફળો

0.4 કલનગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

0.5 લેબેગ સંકલન

1. પિયેર્રી ડી ફર્મા(Pierre de Fermat) **17**

1.1 પ્રસ્તાવના

1.2 બાળપણ અને ભણતર

1.3 મહત્તમ અને લઘુત્તમ કિંમતો

1.4 સ્પર્શક

1.5 ક્ષેત્રફળ

1.6 વક્રીભવન

2. વિકલનનું સૌથી પ્રથમ સંશોધન પેપર અને ગ્રોટફ્રાઇડ વિલહેલ્મ લાઇબ્નિઝ **27**

2.1 પ્રસ્તાવના

2.2 બાળપણ અને અભ્યાસ

2.3 નોકરી

2.4 પેરિસ

2.5 1676થી 1716

2.6 કલનગણિત

2.7 ઉપસંહાર

3. દ્વિપદી પ્રમેય, ફ્લુઅન્ટો અને ફ્લક્સિઓન **41**

3.1 ન્યૂટન અને ન્યૂટનનું બાળપણ

3.2 ન્યૂટનનું દ્વિપદી પ્રમેય

3.3 ફ્લુઅન્ટો અને ફ્લક્સિઓનો

4. સંકલન (ઇન્વર્સ ફ્લક્સિઓન) અને સર આઇઝેક ન્યૂટન 55
4.1 પ્રસ્તાવના
4.2 πની કિંમત
4.3 લૂકેશિયન પ્રોફેસર(Lucasian Professor)
4.4 ધી પ્રિન્સિપિયા
4.5 પાર્લમેન્ટના સભ્ય
4.6 ટંકશાળ
4.7 રૉયલ સોસાયટી
4.8 ઉપસંહાર
5. બર્નૂલિ કુટુંબ(Bernoulli Family) 73
5.1 પ્રસ્તાવના
5.2 બર્નૂલિઓ
5.3 જોહાન્નીસ I બર્નૂલિ સંકલન
5.4 નિકોલૉસ II
5.5 નિકોલૉસ III
5.6 ડેનિઅલ I
5.7 અકેડમી ઑફ સાયન્સિસ, રશિયા
6. કલનગણિતનાં પુસ્તકો અને લીઓનહાર્ડ ઑઇલર (Leonhard Euler) 89
6.1 પ્રસ્તાવના
6.2 રશિયન અકેડમી
6.3 કલનગણિત અને કલનગણિતનાં પુસ્તકો
6.4 બર્લિન અકેડમી ઑફ સાયન્સિસ
6.5 ફરીથી રશિયામાં
6.6 ઉપસંહાર
7. કલનગણિતનો પાયો : જ્યૉર્જ બર્કલી (George Berkely) અને લાગ્રાન્જ (Lagrange) 99
7.1 પ્રસ્તાવના
7.2 જ્યૉર્જ બર્કલી
7.3 જોસેફ લુઇસ લાગ્રાન્જ

7.4 કલનગણિતના પાયારૂપ પુસ્તકો

7.5 અનંત સૂક્ષ્મો અથવા શૂન્યાભિચલો

7.6 બર્લિન

7.7 પેરિસ

7.8 ફ્રાન્સની ક્રાન્તિ

લક્ષ (Limit) : ε (epsilon) અને δ (delta) **112**

8.1 પ્રસ્તાવના

8.2 લક્ષ

8.3 અભિસરણ (Convergence)

8.4 ઑગસ્ટીન-લૂઈસ કોશી(Augustin-Louis Cauchy)

8.5 e અને δ

8.6 લક્ષની સરળ સમજૂતી

8.7 કાર્લ વાયર્સ્ટ્રાસ(Karl Weierstrass)

9. રીમન સંકલ(Riemann Integral) **127**

9.1 પ્રસ્તાવના

9.2 ડિરિચ્લેટનું વિધેય

9.3 રીમન સંકલનની રીતો

9.4 બર્નહાર્ડ રીમન

10. હેન્રી લેબેગ(Henry Lebesgue) **140**

10.1 પ્રસ્તાવના

10.2 ક્ષેત્રફળો

10.3 ગણની લંબાઈ

10.4 લેબેગ સંકલન

10.5 હેન્રી લેબેગ

◆ પરિશિષ્ટ 1 : કલનગણિત એટલે શું? **155**

◆ પરિશિષ્ટ 2 : કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળા **165**

◆ પરિશિષ્ટ 3 : કલનગણિતના વિકાસનો ઘટનાક્રમ **171**

◆ પરિશિષ્ટ 4 : અંગ્રેજી પારિભાષિક શબ્દસૂચિ (ગુજરાતી સમાનાર્થીસહિત) **175**

◆ પરિશિષ્ટ 5 : સૂચિ **179**

◆

0. કલનગણિતની ક્રાન્તિઓ

"There is no philosophy which is not founded upon knowledge of the phenomena, but to get any profit from this knowledge it is absolutely necessary to be mathematicians."

– *Daniel Bernoulie*

0.1 પ્રસ્તાવના

હાલની દુનિયામાંથી કલનગણિત અદૃશ્ય થાય તો શું થાય ? કલનગણિતનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યુત અને લોહચુંબકના અખતરાઓનાં પરિણામો મેક્સવેલે(Maxwell) સમીકરણોના સ્વરૂપમાં દર્શાવેલાં જે મેક્સવેલનાં સમીકરણો તરીકે ઓળખાય છે. આ સમીકરણોમાંથી વિદ્યુત અને લોહચુંબક મોજાંઓમાં મુસાફરી કરે છે અને આ મોજાંઓની ઝડપ પ્રકાશનાં મોજાંઓની ઝડપ જેટલી હોઈને એમ પણ કહી શકાય કે પ્રકાશનાં મોજાંઓ વિદ્યુત-લોહચુંબકનાં મોજાંઓનાં બનેલાં છે. આ મોજાંઓને હર્ઝે (Hertz) શોધ્યાં. આ મોજાંઓના આધારે આપણા મોબાઇલ, કમ્પ્યૂટર, માઇક્રોવેવ ઓવન, રેડિયો, ટીવી વગેરે કામ કરે છે. આથી, આ બધું જતું રહે તો માનવજાત ત્રાસી જશે.

પૃથ્વી, ગ્રહો, તારાઓ વગેરેની ભ્રમણકક્ષા અને ગતિ કલનગણિતનો ઉપયોગ કરીને ન્યૂટનના ગતિના નિયમોથી મળે છે. આ જતાં આકાશમાં મુસાફરી કરી ન શકીએ. ટૂંકમાં પ્લેનની મુસાફરી બંધ થાય. આપણને મુસાફરીમાં સરનામાંના સ્થળો શોધવામાં મદદરૂપ થતું GPS ગયું. આ રીતે વિચારતાં આપણી જિંદગી સરળ અને જીવવાલાયક બનાવતી ઘણી બધી આ સદીની શોધો કલનગણિતની મદદથી અને બીજા ઘણા વિષયોના આધારે શક્ય બની. કલનગણિત આપણા જીવનની જરૂરિયાતો જોડે જોડાયેલું છે. દુનિયાની હાલની જીવનશૈલી માટે કલનગણિતનો મોટો આભાર.

0.2 લક્ષ(Limit) અને વિકલિત(Derivative)

ડેકાર્ટ (Descarts) અને ફર્મા(Fermat)એ વૈશ્લેષિક ભૂમિતિ(Analytic Geometry) શોધી અને તેનાં કારણે ઘણા બધા વક્રો અને તેમનાં સમીકરણો મળ્યાં. ફર્માએ જ્યારે ઘણા બધા વક્રો જોયા ત્યારે તેમને વક્રોની કઈ કઈ જગ્યાએ લઘુત્તમ અને મહત્તમ કિંમતો છે

તે જગ્યાઓ જાણવાની ઇંતેજારી થઈ અને સાથે-સાથે વક્રોના સ્પર્શકો જાણવાની ઇંતેજારી થઈ. આપણે સ્પર્શકો કઈ રીતે મેળવવા તે જોઈએ.

વક્રનો સ્પર્શક જે બિંદુએ સ્પર્શક શોધવાનો છે તે બિંદુને સ્પર્શે છે. આથી સ્પર્શક ઉપરનું એક બિંદુ મળ્યું. સ્પર્શક સુરેખા હોઈને જે બિંદુમાંથી સ્પર્શક પસાર થાય છે તે બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ મળે તો સ્પર્શકનું સમીકરણ મળે. આથી, આ બિંદુએ સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવા માટે આ બિંદુ$(a, f(a))$ની નજીક વક્ર ઉપર બીજું બિંદુ $(a + h, f(a + h))$ લઈએ. અહીંયાં h એ અનંત સૂક્ષ્મ (infinitesimal) સંખ્યા છે. આથી આપણને બિંદુ $(a, f(a))$ એ

$$\text{ઢાળ} = m = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ મળે.}$$

હવે h ની કિંમતે કેટલી લેવી ?

ધારો કે વક્ર $f(x) = x^2$ છે. આપણે વક્ર ઉપરના બિંદુ (a, a^2) એ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવવું છે. આથી આ બિંદુની નજીક વક્ર ઉપર બિંદુ $(a + h, (a + h)^2)$ લઈએ. આથી બિંદુ (a, a^2) એ

$$\text{ઢાળ} = m = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h \text{ મળે.}$$

h અનંત સૂક્ષ્મ હોઈને, તેને કાઢી નાખતાં આપણને $m = 2a$ મળે.

આપણે ઢાળ મેળવવા માટે પહેલું પગલું બિંદુ $(a + h, (a + h)^2)$ લઈએ છીએ ત્યારે આપણે આ બિંદુ $(a + h, (a + h)^2)$ પહેલા બિંદુ (a, a^2) થી જુદા લેવા માટે ધારીએ છીએ કે $h \neq 0$ છે. હવે $h \neq 0$ હોઈને ઢાળ m મેળવવા પગલા $\frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h$ મેળવતાં ફરીથી પાકું કરીએ છીએ કે $h \neq 0$ છે. હવે છેલ્લા પગલામાં $h = 0$ લઈને ઢાળ $m = 2a$ મેળવીએ છીએ.

આખી પ્રક્રિયામાં પહેલાં $h \neq 0$ છે અને છેલ્લે $h = 0$ છે તે બંને ધારણાઓ એકબીજાની વિરુદ્ધ હોઈને તર્કશાસ્ત્રની રીતે બિશપ બર્કલીનો ખૂબ જ મોટો વિરોધ હતો. અને ધીરે ધીરે બધા સમજતા પણ થયા. આથી તે સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આમાંથી નીકળવાના ખૂબ જ પ્રયત્નો કર્યા. આ પ્રયત્નમાંનો એક લક્ષનો રસ્તો ડીલામ્બર્ટે સૂચવ્યો અને કોશી(Cauchy)એ લક્ષના વિચારને વિકસાવ્યો. તેમણે

જો $x \to a$ હોય, તો $f(x) \to$ L છે તેની વ્યાખ્યા આપી.

જ્યારે ચલ xને a ની આસપાસની કિંમતો આપવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતો (L = $f(a)$) L ની આસપાસ રહેશે. L અને $f(x)$ વચ્ચેનો તફાવત ધારીએ તેટલો નાનો લઈએ ત્યારે $|x - a|$ પણ નાનો મળે.

કલનગણિતના પહેલા સંશોધન લેખ પછી લગભગ સો વર્ષે વાયર્સ્ટ્રાસે જણાવ્યું કે જો $x \to a$ હોય, તો $f(x) \to$ L છે તેનો અર્થ

જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ માટે $\delta > 0$ મળે, જેથી જો $0 < |x - a| < \delta$ હોય, તો $|f(x) - \text{L}| < \varepsilon$ છે.

આને બીજી રીતે $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \text{L}$ પણ લખાય છે.

ઢાળ $= m = \lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a$ મળે.

ગણિતમાં લક્ષનો નવો વિચાર અને તેની ચોકસાઈપૂર્વકની વ્યાખ્યા ગણિતનાં પ્રમેયોની સાબિતીઓને ઊંચા સ્વરૂપે લઈ ગયું છે.

બીજી બાજુ ગેલિલીયોએ **પીત્સાના** ટાવર ઉપરથી બે જુદા જુદા દ્રવ્યવાળા પદાર્થોને એક જ સમયે કોઈ પણ જાતનું બળ લગાડ્યા વગર નીચે પડવા દીધા. તે સમય પહેલાંના ખૂબ જ જાણીતા તત્ત્વજ્ઞાની અને વૈજ્ઞાનિક ઍરિસ્ટોટલ એવું માનતા કે વધારે દ્રવ્યવાળો પદાર્થ પહેલો પૃથ્વીને અથડાશે. ગેલિલીયોના આ અખતરામાં બંને પદાર્થો એક જ સાથે ધરતીને અથડાયા. આ એક ખૂબ જ મોટું આશ્ચર્ય છે. આ પદાર્થોની સરેરાશ ગતિ $= \dfrac{\text{કુલ અંતર}}{\text{કુલ સમય}}$ છે.

સરેરાશ ગતિ જુદા જુદા સમયે ગતિ વિશે કશું જ કહી શકતું ન હોઈને આપેલા સમયે ગતિ જાણવા માટે તે સમય $t = a$ ની તદ્દન નજીકનો સમય $t = a + h$ લઈએ. આ બંને સમયે કાપેલું અંતર D(t) થી દર્શાવીએ, તો

$t = a$ સમયે, ગતિ $= \dfrac{\text{D}(a+h) - \text{D}(a)}{h}$ થાય. અગાઉની ચર્ચા પ્રમાણે

$v(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{D}(a+h) - \text{D}(a)}{h}$ એ $t = a$ સમયની ગતિ થાય.

આ વ્યાખ્યાને

$$m = \text{ઢાળ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ ની સાથે સરખાવીએ.

તો બંનેમાં ખૂબ જ સરખાપણું છે. આને ત્રીજા સ્વરૂપમાં લઈએ તો તે પરિવર્તનનો ફેર દર્શાવે છે. આ બધાં સ્વરૂપમાં સરખાપણું હોવાના કારણે ઢાળ, ગતિ કે પરિવર્તનનો દર કહેવાના બદલે ફક્તને ફક્ત વિધેયના ફેરફારનો દર જેને આપણે fના વિકલિત(Derivative)થી ઓળખીશું અને fમાંથી મેળવેલું હોઈને $f'(x)$ થી દર્શાવીશું. જેથી,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ છે. આ વિકલિતની વ્યાખ્યા કલનગણિતનું હૃદય છે, મુખ્ય ભાગ છે.

ધારો કે, આપણે $f(x) = x^2$ લઈએ, તો તેનો

$$\text{વિકલિત } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2xh+h^2)}{h}$$

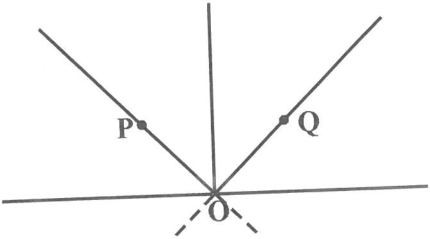
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \text{ છે.}$$

આ વિકલિત વિધેય $f'(x)$ નું વિકલિત વિધેય $(f'(x))' = f''(x)$ પણ મેળવી શકાય અને તેનું પણ વિકલિત વિધેય $f'''(x)$ પણ મેળવી શકાય.

આ વિધેય $f'(x)$ ની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને જુદા જુદા વિધેયો જેવા કે $f(x) = \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ e^x,\ \ln x$ વગેરેના વિકલિત વિધેયો $f'(x)$ બર્નૂલિ ભાઈઓ, લાઇબ્નિઝ અને ઑઇલરે મેળવેલા. આ વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને (વિકલિત) બે વિધેયોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારના વિકલિતો મેળવવાના નિયમો મેળવ્યા અને તેનો ઉપયોગ થવા માંડ્યો.

હવે ગણિતશાસ્ત્રીઓએ તેમના સ્વભાવ પ્રમાણે પ્રશ્ન ઊભો કર્યો : $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ બધી જ x ની કિંમતો માટે હશે ?

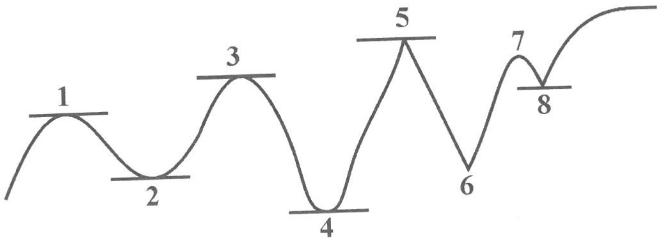
$f(x) = x^n$ હોય, તો $f'(x) = nx^{n-1}$ છે. જો $n \geq 0$ હોય, તો xની બધી જ કિંમતો માટે $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ છે. એ જ પ્રમાણે હોય, તો $f(x) = sin\ x$ હોય, તો $f'(x) = cos\ x$નું બધી કિંમતો માટે અસ્તિત્વ છે. $f'(x)$ ન હોય તેવું ક્યારે બને ? $f'(x) = m$ સ્પર્શકનો ઢાળ છે. આથી, વક્રને કોઈ બિંદુએ સ્પર્શક ન હોય તેવું બને તો તે બિંદુએ $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. ટૂંકમાં તે બિંદુએ વિધેયનો વિકલિત નથી. આવું બને ખરું? આપણે $f(x) = |x|$ નો આલેખ દોરીએ. જે આકૃતિ 1માં આપ્યો છે. યામના ઉગમબિંદુએ કાટખૂણો છે. આપણે આ વક્ર ઉપર કોઈ પણ વાહન ચલાવતા હોઈએ તો જ્યારે ઉગમબિંદુએ આવીએ ત્યારે ખૂબ જ ધીરા થઈ જવું પડે.



આકૃતિ 1

P બિંદુએ સ્પર્શક સુરેખા PO જ છે તે જ પ્રમાણે Q બિંદુએ સ્પર્શક સુરેખા QO જ છે. P બિંદુ તરફથી આવીએ તો O બિંદુએ સ્પર્શક સુરેખા PO જ છે. Q તરફથી આવીએ તો આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે O બિંદુએ સ્પર્શક સુરેખા QO છે. O બિંદુએ બે સ્પર્શકો છે. સ્પર્શક એક જ હોય. આથી આપણે કહીએ કે O બિંદુએ સ્પર્શક નથી, એટલે કે $f'(0)$ નું અસ્તિત્વ નથી. ઊગમિબંદુએ વિધેય વિકલિત નથી. આથી ખ્યાલ આવશે કે જ્યાં જ્યાં તીવ્ર ખૂણો હોય ત્યાં ત્યાં વિધેય વિકલિત નથી. આ વક્રમાં કોઈ જગ્યાએ કાણું ન હોઈને વિધેય બધે જ સતત (continuous) છે, પણ બધે વિકલિત નથી. વિધેય વિકલિત હોય, તો સતત છે. જ્યારે સતત હોય પણ વિકલિત ન પણ હોય. O બિંદુએ વિધેય સતત છે, પણ $f'(0)$ નું અસ્તિત્વ નથી. કલનગણિતમાં સતત અને વિકલનનો સંબંધ એ પણ અગત્યનું પરિણામ કહી શકાય.

સ્પર્શકનો ઉપયોગ કરીને વક્ર ઉપરનાં બે બિંદુઓએ વક્રની મહત્તમ કે લઘુત્તમ કિંમત હોય તેવાં બિંદુઓ સરળતાથી મળે. આકૃતિ 2માં કોઈ વક્ર આપેલો છે. બિંદુ 8 એ લઘુત્તમ કિંમત છે જે મહત્તમ કિંમત બિંદુ 1 કરતાં પણ વધારે છે. આથી જ્યારે આપણે આપેલા અંતરાલ$[a, b]$માં આવેલી મહત્તમ અને લઘુત્તમ કિંમતની વાત કરીએ છીએ. જ્યાં લઘુત્તમ કે મહત્તમ કિંમત હોય ત્યાં સ્પર્શક દોરીએ તો તે સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર હોઈને તેમનો ઢાળ $m = 0$ છે એટલે કે $f'(x) = 0$ છે. બિંદુ 5 એ મહત્તમ કિંમત હોવા છતાં સ્પર્શક દોરી શકાતો નથી. કારણ કે તીવ્ર ખૂણો છે



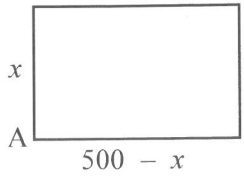
આકૃતિ 2

એટલે કે $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. તે જ રીતે બિંદુ 6 એ પણ $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ નથી. આ ઉપરથી જોઈ શકાય છે કે આપેલા વિધેયનું વિકલન લઈને મળતા $f'(x) = 0$ લઈને આના ઉકેલો મહત્તમ કે લઘુત્તમ કિંમતો હોય તેવાં બિંદુઓ આપે છે. તદ્ઉપરાંત શક્ય છે કે એવાં પણ બિંદુઓ હોય કે જ્યાં $f'(x)$ નું અસ્તિત્વ પણ ન હોય. બિંદુઓ 5, 6 અને 8 એ પ્રકારનાં બિંદુઓ છે.

$f'(x)$ નું વિકલન મેળવીએ જે $f''(x)$ છે. જ્યારે $f''(x) < 0$ હોય ત્યારે વક્ર એના જુદા જુદા બિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકોની નીચે છે અને જ્યારે $f''(x) > 0$ હોય ત્યારે વક્ર એના જુદા જુદા બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શકોથી ઉપર છે. આથી જ્યારે $f''(a) > 0$ હોય ત્યારે, $x = a$ એ fની લઘુત્તમ કિંમત છે. જ્યારે $f''(a) < 0$ હોય ત્યારે વક્ર દોરેલા સ્પર્શકોથી નીચે હોઈને $x = a$ માટે fની ગુરુત્તમ કિંમત છે. જ્યારે વક્ર સ્પર્શકોની નીચેથી સ્પર્શકોની ઉપર જાય છે ત્યારે વચ્ચે $f''(a) = 0$ બને છે, જે પરિવૃત્તિ બિંદુ (point of inflection) તરીકે ઓળખાય છે. $f'(x)$, $f''(x)$ અને $f'''(x)$ વગેરેએ વક્રોના અભ્યાસમાં ખૂબ જ મહત્ત્વનો ફાળો આપ્યો છે, જ્યારે આ બધાના ઉપયોગે ઘણા બધા વિષયોને સરળ બનાવ્યા છે. આ ક્રાન્તિએ ઘણાં બધાં કામ સરળ બનાવ્યાં છે. આશ્ચર્યની વાત તો એ છે કે આ પરિણામો લાઇબ્નિઝના કલનગણિતના સૌથી પહેલા સંશોધન લેખમાં છે.

આપણે કોઈ ખેતરની આસપાસ વાડ કરવી છે. આ વાડ વધારેમાં વધારે ક્ષેત્રફળ આપતી હોવી જોઈએ. આપણી પાસે 1000 મીટરની વાડ થઈ શકે તેવી જોગવાઈ છે. આ વાડની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી રાખવી જોઈએ?

ધારો કે ખેતરની પહોળાઈ x અને લંબાઈ $500 - x$ છે. આથી ક્ષેત્રફળ $A(x) = x(500 - x)$ થાય. આપણે આની મહત્તમ કિંમત શોધવી હોઈને,



$A'(x) = 500 - 2x$ છે.

$\therefore \quad x = 250$

$\therefore \quad A''(x) = -2 < 0$

$\therefore \quad A''(250) = -2 < 0$

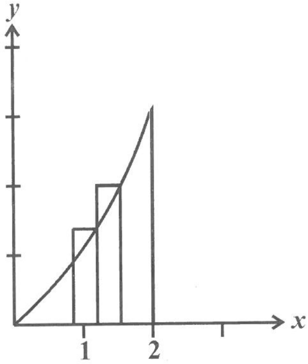
આથી, $x = 250$ એ A ની મહત્તમ કિંમત મળે.

લંબાઈ = 250 મી = પહોળાઈ. આથી આ ચોરસ છે.

0.3 ક્ષેત્રફળો

આપણે પરવલય $y = x^2$ અને x-અક્ષ વચ્ચેનું $x = 0$ થી $x = 2$ સુધીનું ક્ષેત્રફળ આકૃતિ 3 માં બતાવેલું છે, તે ક્ષેત્રફળ આપણે મેળવવું છે.

આપણે ત્રિકોણ, લંબચોરસ અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ જાણીએ છીએ. **કલનગણિતનો આશય અઘરા પ્રશ્નોને નાના નાના ભાગોમાં વહેંચીને નાના ભાગના ઉકેલો મેળવીને બધાનો સરવાળો કરીને પ્રશ્નનો જવાબ મેળવવાનો છે.** આ રીત પ્રમાણે આ ક્ષેત્રફળના નાના નાના ભાગો કરીએ. આ નાના ભાગો એ રીતે કરીએ કે જેનું ક્ષેત્રફળ આપણે મેળવી શકીએ. સૌથી પહેલી રીત નાના નાના લંબચોરસમાં વહેંચવાની છે અને તે વ્યવસ્થિત રીતે ગોઠવીએ કે જેથી સરવાળો પણ સરસ રીતે થાય. આકૃતિ 3માં બતાવ્યા પ્રમાણે અંતરાલ [0, 2] ના n સરખા અંતરાલો $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{n-1}, x_n]$માં વહેંચી દઈએ. બધા અંતરાલોની લંબાઈ $\frac{2}{n}$ છે. અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ની લંબાઈને $\Delta x_i = \Delta x = \frac{2}{n}$થી દર્શાવીશું. આ અંતરાલનો જમણો છેડો લઈને Δx_i પહોળાઈ અને x_i^2 ઊંચાઈ લઈને લંબચોરસ દોરીએ જેનું ક્ષેત્રફળ $x_i^2 \Delta x_i$ છે. આ રીતે બધા જ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો $x_1^2 \Delta x_1 + x_2^2 \Delta x_2 \ldots + x_i^2 \Delta x_i + \ldots x_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$ છે. જો n નાનો હોય, તો ક્ષેત્રફળમાં બતાવેલા ઉપરનો ભાગ ઉમેરો કરે



આકૃતિ 3

છે. આથી જે વધારાનું ક્ષેત્રફળ આવે છે તે જેમ જેમ n વધારતા જઈએ તેમ તેમ વધારાનું ક્ષેત્રફળ ઓછું થતું જાય. આથી,

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i \text{ થશે.}$$

$$x_i = \frac{2i}{n} \text{ હોઈને } \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = 8 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

$$= \frac{8}{6} \left\{ 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$\therefore \text{ ક્ષેત્રફળ} = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{6} \left\{ 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ sq. units}$$

આ શ્રેઢીનો સરવાળો કઈ રીતે મળ્યો ? આવી શ્રેઢીઓના સરવાળા કઈ રીતે મેળવવા ? અનંત શ્રેઢીના સરવાળાની વ્યાખ્યાએ તે સમયના ઘણા બધા પ્રશ્નોના જવાબ આપ્યા. પાયાનો પ્રશ્ન અનંત રકમોની શ્રેઢીનો સરવાળો કઈ રીતે થાય ? ધારો કે આપણે અનંત શ્રેઢી $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ નો સરવાળો મેળવવો છે, તો તે કઈ રીતે મેળવાય ? પહેલી n રકમોનો સરવાળો

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ મેળવો. આપણે જે શ્રેઢીઓના સરવાળા મેળવવાના છે, તે શ્રેઢીઓ માટે S_n મેળવી શકાય છે.

S_n મેળવ્યા પછી, જો $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ હોય, તો S એ આપણી શ્રેઢીનો સરવાળો ગણાય છે. એટલે કે,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \text{ છે.}$$

ધારો કે આપણે સમગુણોત્તર શ્રેઢી,

$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ નો સરવાળા મેળવવો છે.

આ માટે પહેલી n રકમોનો સરવાળો

$$S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$$
$$= a\,(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$
$$= a\,\frac{(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & \text{જો } r < 1 \\ \text{અવ્યાખ્યાયિત (undefined)} & \text{જો } r \geq 1 \end{cases}$$

આથી, જો $r < 1$ હોય, તો $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-r}$ છે.

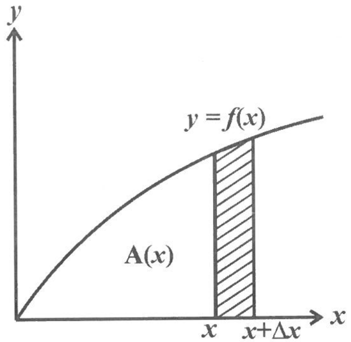
વ્યાખ્યા : ક્ષેત્રફળ $= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ અને તેમનો સરવાળો એ ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે મોટો પડકાર હતો. કલનગણિતની ક્રાન્તિઓમાં અનંત શ્રેઢીનો સરવાળો, અને સમગુણોત્તર શ્રેઢીનો સરવાળો એ ખૂબ જ અગત્યનાં ગણાય.

જો $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો તેને $\int_a^b f(x)\,dx$ થી દર્શાવવામાં આવે છે. અહીંયાં a એ x ની શરૂઆતની કિંમત છે, b એ x ની અંતની કિંમત છે.

આ રીતે ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય, પણ તે ખૂબ જ સમય માગી લે છે. નસીબ જોગે ક્ષેત્રફળ અને સ્પર્શકના ઢાળ વચ્ચે સંબંધ છે અને તે સંબંધ ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝ જોઈ શકેલા અને આથી તેમને બંનેને કલનગણિતના શોધક ગણવામાં આવે છે.

0.4 કલનગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય(Fundamantal Theorem of Calculus)

ધારો કે કોઈ પણ વક્ર $y = f(x)$ છે. અનુકૂળતા માટે કોઈ પણ x માટે $y \geq 0$ છે. આપણે આકૃતિ 4 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $y = f(x)$, x-અક્ષ વચ્ચેનું $x = 0$ અને કોઈ પણ x સુધીના ક્ષેત્રફળને $A(x)$ થી દર્શાવીએ. x માં થયેલા સૂક્ષ્મ વધારાને



આકૃતિ 4

Δxથી દર્શાવીએ. આપણે x-અક્ષ, $y = f(x)$ અને $x = 0$ થી શરૂ થતા અને $x + \Delta x$ વચ્ચેના ક્ષેત્રફળને $A(x + \Delta x)$ થી દર્શાવીએ.

આ બંને ક્ષેત્રફળોનો તફાવત $A(x + \Delta x) - A(x)$ છે જેના બરાબર આશરે લંબચોરસ જેનું ક્ષેત્રફળ $y \Delta x$ છે. આથી $A(x + \Delta x) - A(x) \approx y \Delta x$

$$\therefore \quad \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx y$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \frac{dA}{dx} = y(x)$$

આ રીતે ક્ષેત્રફળ $A(x)$ અને y વચ્ચેનો સંબંધ છે.

મૂળભૂત પ્રમેય : $A(x)$ ના વિકલિત(Derivative) બરાબર y થાય. આ ખૂબ જ મહત્ત્વનું પરિણામ છે.

ઉદાહરણ : આપણે $y = f(x) = x^2$, x-અક્ષ અને $x = 0$ અને 2 વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x$ મેળવેલું.

અહીંયા $\frac{dA}{dx} = y = x^2$ લઈએ.

$A = \frac{x^3}{3} + C$ નું વિકલન $\frac{dA}{dx} = x^2$ હોઈને $A = \frac{x^3}{3} + C$,

$\frac{dA}{dx} = y = x^2$ ને સંતોષશે.

$$A(0) = \frac{0^3}{3} + C = 0$$

$$\therefore \quad C = 0$$

$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$A(2) = \frac{8}{3} \ \textit{sq. units}$$

કોઈ પણ $y = f(x)$ અને x-અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ મેળવવાનો રસ્તો આ પરિણામ સૂચવે છે. જવાબ શોધવાનો રસ્તો સૂચવે છે. જવાબ આપ્યો નથી. આપણે $A(x)$ ની કિંમત મેળવવાની છે જે આ સમીકરણને સંતોષે.

$$A(x) \text{ વિકલન } \rightarrow \frac{dA}{dx} = y(x) \xrightarrow{\text{વિકલન}} \frac{dy}{dx} = m$$

વક્ર નીચેનું ક્ષેત્રફળ　　　　વક્ર　　　　વક્રનો ઢાળ

ધારો કે, આપણને વક્ર $y = x^4 + 4x^3$ આપેલો છે. આપણે x-અક્ષ અને $y = x^4 + 4x^3$ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે. તો મૂળભૂત પ્રમેયથી $\frac{dA}{dx} = y = x^4 + 4x^3$ થાય. $A(x)$ શોધવો છે કે જેથી $\frac{dA}{dx} = y$ થાય.

આથી $A(x) = \frac{x^5}{5} + x^4 + C$ મળે. ધારો કે આપણે $x = 0$ થી $x = 2$ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ મેળવવું છે. આથી, $A(0) = 0 = C$ મળે એટલે કે $A(x) = \frac{x^5}{5} + x^4$ છે.

$\therefore \quad A(2) = \frac{2^5}{5} + 2^4 = \frac{32}{5} + 16 = \frac{112}{5}$ *sq. units* મળે.

આને આપણે $A(2) = \int_0^2 y\, dx = \int_0^2 (x^4 + 4x^3)\, dx$ થી પણ દર્શાવી શકીએ.

વક્ર $y = x^4 + 4x^3$ ના બિંદુ $x = 2$ એ આપણે સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવો છે.

આથી $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 4x^3 + 12x^2\Big|_{x=2} = 32 + 48 = 60$ મળે.

0.5 લેબેગ સંકલન

હવે આપણે ક્યારે $\int_a^b f(x)dx$ મેળવી શકીએ તે જોઈએ.

પ્રમેય : જો વિધેય f અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત હોય, તો તે f રીમન સંકલીય વિધેય છે. એટલે કે $\int_a^b f(x)dx$ મળે.

f વિધેય જો અંતરાલ $[a, b]$ માં n બિંદુએ $r_1, r_2,..., r_n$ અસતત હોય, તો પણ કોશીની રીતથી $\int_a^b f(x)\,dx$ મળે.

f વિધેય જો અંતરાલ $[a, b]$ માં અનંત જગ્યાએ અસતત હોય, તો કોશીની રીત કામ ન આવે. અગાઉની રીતમાં સુધારો વધારો કરવો જ રહ્યો.

ડિરિક્લેટે વિધેય ϕ નીચે મુજબ આપ્યું :

$$\phi(x) = \begin{cases} c \text{ જો } x \text{ સંમેય(Rational) સંખ્યા હોય તો} \\ d \text{ જો } x \text{ અસંમેય(Irrational) સંખ્યા હોય તો} \end{cases}$$

દરેકે દરેક x માટે y હોઈને આ વિધેય છે. આનો આલેખ દોરવો લગભગ અશક્ય છે, કારણ કે બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે એક અસંમેય સંખ્યા છે અને બે અસંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે એક સંમેય સંખ્યા છે. આથી ϕ ના આલેખમાં ગમે તેટલો નાનો આંતરાલ લઈએ તો પણ કિંમતો c અને d વચ્ચે અનંત વખત ફર્યા કરે છે. ϕ કોઈ પણ જગ્યાએ સતત નથી.

$\int_a^b \phi(x)\,dx$ મેળવવા માટે નવી રીતો મેળવવાની રહી. સતતતાથી દૂર રહીને સંકલન મેળવવાનો પ્રયત્ન રીમને કર્યો.

ધારો કે વિધેય f અંતરાલ $[a, b]$ માં સીમિત (bounded) છે. અંતરાલ $[a, b]$ ના n પેટા અંતરાલો માટે $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ બિંદુઓ એ રીતે લઈએ કે જેથી $a = x_0 < x_1, < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b$ થાય. પરિમણતા પેટા અંતરાલોની લંબાઈને $d_1 = x_1 - a, d_2 = x_2 - x_1,..., d_n = x_n - x_{n-1} = b - x_{n-1}$ થી દર્શાવીએ. પેટા અંતરાલ $[a, x_1]$ માં f ની વધુમાં વધુ કિંમત અને ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D_1 થી દર્શાવીએ, તે જ રીતે $[x_1, x_2]$ માં fની વધુમાં વધુ કિંમત અને ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D_2 થી દર્શાવીએ. એ જ રીતે D_n પેટા અંતરાલ $[x_{n-1}, b]$ માં fની વધુમાં વધુ અને ઓછામાં ઓછી કિંમતનો તફાવત

દર્શાવે છે. કોઈ પણ ધન સંખ્યા $\sigma > 0$ લઈએ. જે અંતરાલમાં તફાવત D_i , σ કરતાં વધારે હોય તેવા અંતરાલોના સરવાળાને $S = S(\sigma) = \Sigma d_k$ અંતરાલો જેમાં D_i, σ કરતાં વધારે છે.

આવા અંતરાલોને A પ્રકારના અંતરાલો કહીએ છીએ.

$\int_a^b f(x)dx$ હોવા માટે કોઈ પણ $\sigma > 0$ માટે A પ્રકારના પેટા અંતરાલોને મરજી પ્રમાણે જેટલા નાના જોઈએ તેટલા કરી શકો જેથી $\lim_{d \to 0} S(\sigma) = 0$. એટલે કે,

કોઈ પણ σ માટે, $\lim_{d \to 0} S(\sigma) = 0$ હોય, તો $\int_a^b f(x)dx$ મળે.

ઉદાહરણ : આપણે ડિરિક્લેટ વિધેય

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ જો } x \text{ સંમેય(Rational) હોય} \\ 0 \text{ જો } x \text{ અસંમેય(Irrational) હોય} \end{cases}$$

ધારો કે, $\sigma = \frac{1}{4}$ છે. અંતરાલ [0, 1]નું વિભાજન n પેટા અંતરાલોમાં કરવા માટે $0 < x_1 < x_2 \ldots x_{n-1} < 1$ લઈએ. આનો કોઈ પણ અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ લઈએ. આ અંતરાલ ગમે તેટલો નાનો હોય, તો પણ તેમાં અગણિત સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ હોઈને ϕ, 0 અને 1 વચ્ચે ફર્યા કરે છે. ϕ ની વધારેમાં વધારે કિંમત 1 અને ઓછામાં ઓછી 0 હોઈને તફાવત $D_i = 1 - 0 = 1 > \frac{1}{4}$ છે. આથી પેટા અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ A પ્રકારનો છે. બધા જ અંતરાલો A પ્રકારના હોઈને $S = S(\sigma) = \Sigma d_k = 1$ છે. રીમનની શરત મુજબ $\lim_{d \to 0} S(\sigma) = 1 \neq 0$, હોઈને $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ નું અસ્તિત્વ નથી.

રીમન સંકલ માટે આપણે ક્ષેત્ર $[a, b]$ નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ છીએ. લેબેગે આથી ઊલટો, સરળ અને હિંમતવાળો રસ્તો બતાવ્યો. વિધેયના

ક્ષેત્ર(Domain)ના બદલે વિસ્તાર(Range)નું વિભાજન કરવા સૂચવ્યું. ધારો કે, $L \leq f(x) \leq M$ જ્યાં L ની ઓછામાં ઓછી અને f ની વધારેમાં વધારે કિંમત M છે. F અને x ની કિંમત અંતરાલ $[a, b]$ માં આવેલી છે. y-અક્ષ ઉપરના અંતરાલ [L, M] નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ. આપણે y-અક્ષ ઉપર $L = y_0 < y_1 < y_2 \dots y_n = M$ બિંદુઓ લઈએ જેથી આપણને નાના અંતરાલો $[y_0, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_i, y_{i-1}] \dots, [y_{n-1}, y_n]$ મળે. આપણે $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ થી દર્શાવીએ. આપણે $y = y_i$ અને $y = y_{i+1}$ રેખાઓ દોરીએ જે $y = f(x)$ ના વક્રને અનેક જગ્યાએ છેદે છે. તે અંતરાલ ન પણ હોય તેથી તેને ગણ કહીશું. બધાના યોગને ગણ E_i થી દર્શાવીએ. આ ગણ હોઈને તેના માપને $m(E_i)$ થી દર્શાવીશું. Δy_i માં કોઈ પણ y_i^* લઈએ અને ગુણાકાર $m(E_i)\, y_i^*$ આપણને રીમનના $f(x_i)\, \Delta x_i$ ની જેમ ક્ષેત્રફળ આપે છે. આ બધાનો સરવાળો $\sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, y_i^*$ લંબચોરસોનું ક્ષેત્રફળ આપે છે. જેમ Δy_i નાનો બનાવતા જઈએ, તેમ તેમ $m(E_i)\, y_i^*$ ક્ષેત્રફળ આપે છે. આથી જો $\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m(E_i)\, y_i^*$ ચોક્કસ કિંમત હોય તો આપણે $\int_a^b f(x)\, dx$ થી દર્શાવીશું. આ લેબેગ સંકલ તરીકે ઓળખાય છે.

લેબેગ સંકલનના લગતાં ઘણાં પરિણામો મેળવ્યાં છે, પરંતુ નીચેનું પરિણામ ખૂબ જ અગત્યનું છે.

જો f સીમિત હોય અને અંતરાલ $[a, b]$ ઉપર રીમન સંકલનની કિંમત મળે, તો f ની અંતરાલ $[a, b]$ ઉપર લેબેગ સંકલની કિંમત મેળવી શકાય જે રીમન સંકલનની કિંમત જેટલી જ છે.

ડિરિક્લેટ વિધેય બધા જ બિંદુએ અસતત છે અને તેનું રીમન સંકલન થતું નથી, જ્યારે તે વિધેયનું લેબેગ સંકલન થાય છે. આનું નામ પ્રગતિ !!

આ પુસ્તક નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યું છે :

(1) Steven Strogatz, Infinite Powers, Houghton Miffin Harcourt, 2019

(2) Grabiner Judik V., The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2005.

(3) George Berkeley, Collected Works of George Berkeley (Kindled Edition) Minerva Classis.

(4) Calinger R., Classies of Mathematics, Prentice Hall, Englwood ciffs, New Jersey, 1995.

(5) Wilcox, H., J. Myers D.L. An introduction to Lebesgue Intigration and Fourer Series, Dover Publications, Ing, 1978.

(6) વિઠ્ઠલભાઈ પટેલ, *ગણિતની ક્રાન્તિઓ*, કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય, ગાંધીનગર, 2013.

◆

પિયેર્રી ડી ફર્મા (Pierre de Fermat)

1. પિયેર્રી ડી ફર્મા (Pierre de Fermat)

"It is impossible for any number which is a power greater than the second to be written as a sum of two like powers. I have a truley marvelous demonstration of this proposition which this margin is too narrow to contain."

– *Pierre de Fermat*

1.1 પ્રસ્તાવના

ગણિતના ઇતિહાસમાં પિયેર્રી ડી ફર્માનું સ્થાન શ્રેષ્ઠ ગણિતશાસ્ત્રીઓ જેવા કે આર્કિમિડિઝ, ન્યૂટન, ઑઇલર, ગૉસ વગેરે સાથે છે. યામ ભૂમિતિ(Co-ordinate geometry)ના શોધનારાઓમાંના એક હતા. તેમની કોઈ પણ વક્રના સ્પર્શક શોધવાની રીત અને વક્રના મહત્તમ અને લઘુત્તમ બિંદુઓ શોધવાની રીતોના કારણે વિકલન કલનગણિતના શોધક ગણાય છે. સંભાવનાશાસ્ત્ર અને હાલના સંખ્યાશાસ્ત્રના નિર્માણ કરનારા પણ હતા. પ્રકાશશાસ્ત્ર (optics)માં પણ તેમનો શોધેલો નિયમ છે. ફર્માના છેલ્લા પ્રમેય(Last Theorem of Fermat)થી તેઓ ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ છે.

પ્રમેય : x, y અને z ની કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ નથી કે જે સમીકરણ $x^n + y^n = z^n$ ને સંતોષે. અહીંયાં $n > 2$ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. ધારો કે $n = 3$ છે, તો સમીકરણ $x^3 + y^3 = z^3$ થાય. આનો અર્થ એ થયો કે કોઈ પણ સંખ્યાના ઘનને (cube) બે ઘન સંખ્યાઓના સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય તે જ પ્રમાણે કોઈ પણ સંખ્યાના ચતુર્ઘાતની સંખ્યાને બે ચતુર્ઘાતી સંખ્યાને સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય. આ જ રીતે કોઈ પણ સંખ્યાના n ઘાતની સંખ્યાને બે n-ઘાતની સંખ્યાના સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય. પ્રાકૃતિક સંખ્યા n બે કરતાં વધારે છે. "આ પ્રમેયની ખૂબ જ સરસ સાબિતી મેં શોધી કાઢી છે, પણ કૌંસમાં ઓછી જગ્યાના કારણે આપતો નથી" તેમ ફર્માએ તેમની નોંધપોથીમાં લખેલું. સદીઓ સુધી ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આ પ્રમેયની સાબિતી આપવા પ્રયત્ન કરેલો. આખરે 1995માં બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી અને પ્રિન્સ્ટન યુનિવર્સિટીના ગણિતના પ્રોફેસર એન્ડ્રુ વાઇલ્સે (Andrew Wiles) એનાલ્સ ઑફ મેથેમેટીક્સ(Annals of Mathematics)માં સાબિતી આપી છે.

ફર્મા પોતે એકલા જ તેમને યોગ્ય લાગે તે પ્રશ્ન ઉપર કામ કરતા. આના કારણે ફર્મા વિશેની માહિતી ફર્મા પાસેથી જ મળે અને ફર્માને તેમના વિશે વાત કરવી જરાયે ગમતી ન

હતી. અરે! તેમના વિચારો પણ જણાવવા ખાસ તૈયાર ન હોઈને તેમના વિશે બહુ જ ઓછું જાણવા મળે છે.

1.2 બાળપણ અને ભણતર

પિએર્રે ફર્માનો જન્મ બ્યુમોન્ટ-ડી-લોમાગ્ને (Beaumont-de-Lomagne), ફ્રાન્સમાં 31 ઑક્ટોબર અને 6 ડિસેમ્બર વચ્ચે 1601 કે 1607માં પંદરમી સદીના મેન્શનમાં (Mansion) થયેલો. તેમને ક્લીમેન્ટ(Climent) નામનો ભાઈ અને લૂઈઝ અને મેરિઆ (Louise and Maria) નામની બે બહેનો હતી. તેમના પિતાજી ડોમિનિક્યુ ફર્મા (Dominique Ferma) ચામડાના મોટા વેપારી હતા. તેમનાં માતા ક્લેર ડી લૉન્ગ (Claire de Long) પણ ખૂબ જ જાણીતા કુટુંબ ફેમિલી ડી લૉન્ગ (Familee de Long)માંથી હતાં. હાલમાં મળતા દસ્તાવેજો ઉપરથી કહી શકાય કે જેમ જેમ પિએર્રે મોટા થતા ગયા તેમ તેમ કુટુંબ વધારે ને વધારે સમૃદ્ધ બનતું ગયું. બીજી કોઈ સાબિતી ન હોઈને ગણિતના ઇતિહાસકારો એમ માને છે કે કુટુંબ બ્યુમોન્ટમાં જ રહ્યું અને આથી પિએર્રેનું બાળપણ, પ્રાથમિક અને માધ્યમિક શિક્ષણ ત્યાંની મોનેસ્ટરી ઑફ ગ્રાન્ડસેલ્વ(Monastery of Grandselve)માંથી મળ્યું. તેમના પિતાની માલમિલકત અને માતાની પૂર્વપીઠિકા જોતાં, પિએર્રેનું કાયદા માટેનું ભણવાનું કુદરતી જ છે. પૈસાની સાથે રાજકીય સામર્થ્ય મેળવવાનો આ શાહી રસ્તો છે. 1631 પહેલાં પિએર્રે યુનિવર્સિટી ઑફ ઑર્લીન્સમાંથી સિવિલ કાયદાની (University of Orlens) ડિગ્રી મેળવેલી.[1] તે સમયે ફ્રાન્સમાં ન્યાયાધીશની ઑફિસો વેચાતી જે આપણા માટે સ્વીકારવું અઘરું છે. તે સમયે 43,500 લિવ્રીસ(Livres) આપીને Offices of Conseiller au Parlement de Toulouse and Commissaire aux requetes du Palais કોઈ વિધવા બહેન જોડેથી ખરીદી. આવડી મોટી કિંમત તે આપી શક્યા તે કુટુંબની સંપત્તિ બતાવે છે. આટલું જ નહિ, પણ દહેજના 12,000 લિવ્રીસ આપીને લગ્ન પણ દૂરના સંબંધી જોડે કરેલાં. તેમના સસરાનું કુટુંબ પણ ખૂબ જ આગળ પડતું હોઈને તેમના નામ આગળ 'de' લખી શકેલા.

જેમ એમના બાળપણ વિશે વધારે જાણતા નથી તેમ તેમની પછીની જીંદગી વિશે ખાસ જાણી શકાયું નથી. હા, તેમને પાંચ બાળકો ક્લેમેન્ટ-સેમ્યુલ, જીન, ક્લેર, કેથરિન અને લૂઈઝ (clement-samual, Jean, Claire, Catherine and Louise) હતાં. સૌથી મોટા પુત્ર ક્લેમેન્ટ-સેમ્યુલ ફર્માની નજીક હતા અને તેમને ગણિતમાં રસ હતો. ફર્માના નિધન પછી ફર્માનાં બે પુસ્તકો Fermat's Observations on Diophantus (1670) અને Various Mathematical Works (1679)નું સંપાદન કરેલું. અને તેમને તેમના પિતાની ન્યાયાધીશની

---

1. યુનિવર્સિટીની સ્થાપના 1229માં થયેલી. આ યુનિવર્સિટીમાં 1,03,000 વિદ્યાર્થીઓ ભણે છે અને બે નોબેલ પ્રાઇઝ મેળવનારા અધ્યાપકો પણ છે.

ઑફિસ વારસામાં મળેલી જે તેમણે તેમના પુત્ર જીન-ફ્રાન્કોઇસ(Jaan-Francois)ને વારસામાં આપેલી. તે સમયના રીત-રિવાજ પ્રમાણે કુટુંબની Noblesse de robe કાયમી રહી.

ફર્મા તેમના જીવન દરમિયાન ત્રણ નગરો (Towns) જોડે સંકડાયેલા હતા. 1631 પછી તેમનું રહેવાનું મુખ્ય સ્થળ ટૂલૂઝ(Towlouse) હતું. જ્યાં પાર્લમેન્ટના (ફ્રેન્ચ : Parlement)ના સલાહકાર (ફ્રેન્ચ : Consciller) હતા.[2] બ્યુમોન્ટ માટે લાગણી હતી અને આથી બ્યુમોન્ટનું ધ્યાન રાખતા હતા અને કોઈ કોઈ વખત ત્યાંની Conseill general ના પ્રમુખ તરીકે રહ્યા હતા. ત્યાંના રોજિંદા કાયદાઓને બરાબર ગોઠવી આપ્યા. આ ઉપરાંત બ્યુમોન્ટના કાયદેસરના સલાહકાર તરીકે કામ કર્યું. આ ઉપરાંત કોઈ કોઈ વખત કેસ્ટ્રિસ (Castres) જતા અને 1632થી તેમનું નિધન થયું ત્યાં સુધી ત્યાનાં Chambre de l'Elit ના સભ્ય હતા. તેમનું નિધન 12 જાન્યુઆરી 1665ના રોજ કેસ્ટ્રિસમાં થયું.

ફ્રાન્સમાં તે જમાનામાં પાર્લામેન્ટ (Parlement) અપીલોને સાંભળનાર કૉર્ટ (Appellate court) હતી. 1789માં ફ્રાન્સમાં દરેક પ્રોવીન્સમાં એક એમ કુલ તેર parlement હતી. Parlement de Toulouse ના ફર્મા સભ્ય હતા. 1638માં ચેમ્બર ઑફ કૉમર્સના (Chamber of Commerse) સભ્ય બન્યા અને 1652માં ગ્રાન્ડ ચેમ્બરના, જે ગુનાવાળા કિસ્સાઓના ચુકાદામાં અગત્યનો ભાગ ભજવતી, સભ્ય બન્યા.

સોળમી અને સત્તરમી સદીમાં ભાતભાતનું ગણિત હતું અને ભાતભાતના ગણિતશાસ્ત્રીઓ હતા. નેપિયર બ્રિટિશ ઉમરાવ હતા. ટાર્ટાગ્લિઆ ટપાલ ખાતાના ઘોડાના અસ્વારનો ગરીબ દીકરો, રોમન કેથોલિક સોસાયટીના ઊંચા હોદ્દેદાર ક્લેવિઅસ, સાદા સાધુ કેવેલિરિ (Cavalieri), ફર્મા અને ડેકાર્ટ જેમને પૈસાની જરાયે ચિંતા ન હતી, જ્યારે ગૅલિલીયોને કોઈ દિવસ ક્યારેય પૂરતું ન હતું. આ બધાય એકબીજાથી જુદા પ્રકારનું ગણિત ગણતા કારણ કે દરેકનો આશય જુદો હતો. બહુ જ ઓછા તેમના ખાવાપીવા માટે ગણિત ઉપર આધાર રાખતા. ફર્મા પણ તેવા જ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તેમના ગણિતના કામ માટે તેમને કોઈનેય જવાબ આપવાનો ન હતો. તેમના ગણિતની સફળતા કે નિષ્ફળતા તેમના સિવાય બીજા કોઈનેય અસર ન કરતી. ફર્માને ગણિતનું કામ પ્રસિદ્ધ કરવાનો ખાસ ખ્યાલ ન હોઈને, તેમનું કામ ફક્ત મિત્રોને લખેલા પત્રો અને તેમના માલિકીના પુસ્તક "Arithmatic of Diophantus"ના હાંસિયામાં લખાયેલી નોંધો ઉપરથી મળે છે. વકીલ હતા અને પ્રોવિન્સિઅલ (રાજ્યના જેવું) સુપ્રિમ કૉર્ટના સભ્ય હતા. તેમને ગણિત ખૂબ ગમતું અને ગણિતની પાછળ ગાંડા હતા. સુપ્રિમ કૉર્ટના ન્યાયાધીશ તરીકે વધારે પડતું કામ ન હોઈને તેમને ગમતા કામ માટે સમય કાઢી શકતા અને કદાચ કુદરતી બક્ષિસ પણ ગણિતના માટે હોય!!

---

2. હાલમાં ટૂલૂઝ મેટ્રો વિસ્તાર ફ્રાન્સનો ચોથા નંબરનો વિસ્તાર ગણાય છે. હાલની યુરોપની એરબસ (Airbus)નું મોટું કેન્દ્ર છે. ત્યાં એરબસની ઉત્પાદનની મોટી ફેક્ટરી પણ છે.

1629માં તેમણે યામ ભૂમિતિ(Coordinate Geometry) શોધેલી અને તેમના વિચારો 'Introduction to Plane and Solid loci' નામની પુસ્તિકામાં છપાયેલા પણ ડેકાર્ટને 1637માં તેમના પ્રખ્યાત પુસ્તક, 'Discourse on Method'ના પરિશિષ્ટમાં તેમના વિચારો પ્રસિદ્ધ કરવા માટે યામ ભૂમિતિની શોધનો યશ તેમને મળે છે, પણ જેને આપણે યામ ભૂમિતિ ગણીએ છીએ તેમાંનું કંઈ આ પરિશિષ્ટમાં જોવા મળશે નહિ. હા, તેમાં બીજગણિત કઈ રીતે વાપરવું તે જાણવા મળશે. જ્યારે ફર્માએ બે લંબધરીઓ (આપણી જેમ નહિ) દાખલ કરી અને સુરેખા, વર્તુળ, પરવલય (Parabola), ઉપવલય (Ellipse), અતિવલય (Hyperbola)નાં સમીકરણો મેળવ્યાં. અને બતાવ્યું કે કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણ ઉપરના વક્રો બનાવશે. આમાંનું કંઈ પણ ડેકાર્ટના પરિશિષ્ટમાં જોવા મળશે નહિ.

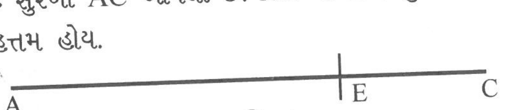
1.3 મહત્તમ અને લઘુત્તમ કિંમતો

ફર્માનો લેખ "On the Method for the Evaluation of Maxima and Minima" જે A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (1969) edited by D. J. Struik માં છે. તેના આધારે નીચેની રીતો આપેલી છે.

લઘુત્તમ અને મહત્તમ કિંમતોના મૂલ્યાંકન માટે આપણે બે અજાણી રાશીઓ (quantities) અને નીચેના નિયમો ધારીશું :

આપેલો પ્રશ્ન લઘુત્તમ કે મહત્તમ કિંમત a મેળવવાનો છે. અહીંયાં a લઘુત્તમ કે મહત્તમ કિંમત છે. હવે આપણે અજાણ્યા a ની જગ્યાએ $a + e$ લઈને મહત્તમ કે લઘુત્તમ કિંમતોને $a + e$ માં દર્શાવીએ. મહત્તમ કે લઘુત્તમ કિંમતો a કે $a + e$ માં દર્શાવેલી સરખી હોઈને, સરખી ગણતાં સમીકરણ મળશે. સરખી કિંમતો બાદ કરતાં આપણને e અને e ની ઘાતોમાં સમીકરણ મળશે. $e \neq 0$ હોઈને આ સમીકરણને e વડે ભાગતાં e વગરની અને e વાળી એમ બે જાતની રકમો મળશે. e વગરની રકમોમાંથી a ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ : સુરેખા AC આપેલી છે. AC ના E બિંદુથી બે ભાગ કરો કે જેથી AE × EC મહત્તમ હોય.



આકૃતિ 1

આપણે AC = b લઈએ. ધારો કે AE = a છે.

આથી EC = AC − AE = $b - a$ છે.

AE × EC = $a(b - a) = ab - a^2$ છે. આપણે આની મહત્તમ કિંમત મેળવવાની છે. આ સમીકરણમાં a ની જગ્યાએ $a + e$ મૂકીએ, એટલે કે AE = $a + e$ લઈએ, તો EC = AC − AE = $b - a - e$ થાય. આથી,

$$AE \times EC = (a + e)(b - a - e) = ab + be - a^2 - 2ae - e^2$$ છે.

બંને કિંમતો સરખી હોઈને,

$ab - a^2 = ab + be - a^2 - 2ae - e^2$ છે.

$\therefore\ be - 2ae - e^2 = 0$

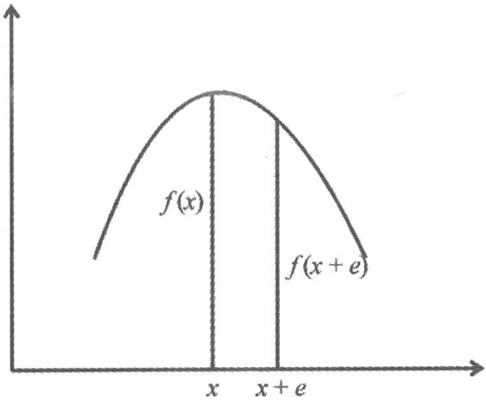
$e \neq 0$ વડે ભાગતાં

$b - 2a - e = 0$. e ની કિંમત શૂન્ય ભણી લઈએ તો $b - 2a$ ની કિંમત શૂન્ય ભણી જશે.

આથી, $b = 2a$ એટલે કે $a = b/2$ થાય.

E ને AC ના મધ્યબિંદુએ લેવાથી AE × EC મહત્તમ થશે.

આ રીતની પાછળનું કારણ ફર્માએ આપેલું ન હોઈને ઘણા બધાના માટે સમજવું અઘરું હતું. ધારો કે $f(x)$ ની આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે મહત્તમ કિંમત x બિંદુએ છે. x ની આસપાસ f ની કિંમત પ્રમાણમાં બહુ જ ઓછી બદલાતી હોઈને,



આકૃતિ 2

$$f(x + e) \approx f(x)$$

$$\therefore\ f(x + e) - f(x) \approx 0$$

f બહુપદી વિધેય હોઈને $f(x + e) - f(x)$ ને e વડે ભાગી શકાય, આથી,

આપણને $\dfrac{f(x+e) - f(x)}{e} \approx 0$

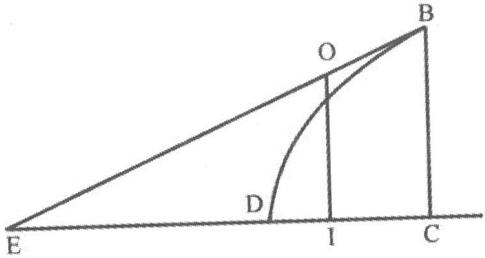
જેને આપણે $\lim\limits_{e \to 0} \dfrac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$ બરાબર ઓળખીએ છીએ.

1.4 સ્પર્શક

કલનગણિતની શોધ માટે આપણે ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝને યશ આપીએ છીએ. પણ જો વિકલન ફક્ત સ્પર્શક અને મહત્તમ અને લઘુત્તમ બિંદુઓ જ હોય, તો તેનો યશ ફર્માને મળે છે.

આજે પણ ફર્માનું મોટું પૂતળું ટૂલૂઝની હોટલ ડી વિલ્લીમાં છે અને પૂતળાની નીચે લખેલું છે, "Pierre de Ferment, father of differential calculus." 1934 માં ન્યૂટનનો જૂનો પત્ર મળ્યો અને તેમાં ન્યૂટન જણાવે છે કે તેમને કલનગણિતનો વિચાર, "ફર્માની સ્પર્શકો દોરવાની રીતો ઉપરથી આવેલો." ફર્માના પહેલાં બહુ જ ઓછા વક્રો હોઈને કોઈએ, ગંભીરતાથી તેના સ્પર્શકોનો વિચાર કરેલો નહિ. નવી યામ ભૂમિતિના કારણે ઘણા બધા વક્રો અને તેમનાં સમીકરણો ફર્મા જાણતા હોઈને તેમના સ્પર્શકોનો પ્રશ્ન ઊભો થયો.

ફર્માએ સ્પર્શકો મેળવવાની રીત આપેલી છે તે જોઈએ.



આકૃતિ 3

આપેલા વક્રના આપેલા બિંદુએ સ્પર્શક મેળવવા માટે બીજી કોઈ શરત શોધવાની રહી. પહેલી શરત તો તે સ્પર્શક આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થવો જોઈએ. બીજું, બિંદુ જેમાંથી આ સ્પર્શક પસાર થાય અથવા તો આ સુરેખ અક્ષ જોડે કેટલો ખૂણો બનાવે છે તે જાણીએ તો પણ ચાલે. આકૃતિ 3માં BD એ આપેલો પરવલય છે અને CE x-અક્ષ છે. B બિંદુએ દોરેલો સ્પર્શક x-અક્ષને E બિંદુએ છેદે છે. BD બહિર્મુખ (Convex) હોઈને B અને E વચ્ચે લીધેલું બિંદુ O પરવલયની ઉપર છે. પરવલય હોઈને $CD = BC^2$ અને $DI < IO^2$. આથી.

$$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{IO^2}.$$

Δ^S OEI અને BEC સમરૂપ હોઈને,

$$\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{EI}$$

$$\therefore \quad \frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{EI^2}$$

CD = g, CE = x અને CI = y લઈએ, તો EI = EC − IC = $x - y$ થશે અને આ કિંમતો $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{EI^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{g}{g-y} > \frac{x^2}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$\therefore \quad g(x^2 - 2xy + y^2) > x^2(g - y)$$

$$\therefore \quad -2gxy + gy^2 > -x^2y,\ y > 0 \text{ હોઈને}$$

$$\therefore \quad -2gx + gy > -x^2$$

$$\therefore \quad x^2 > 2gx - gy.$$

y ની બધી જ કિંમતો માટે આ સાચું હોઈને,

$$x^2 \geq 2gx$$

$$\therefore \quad x(x - 2g) \geq 0$$

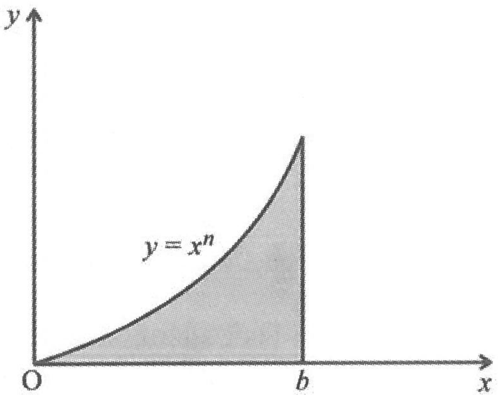
બધા જ $x > 0$, માટે $x \geq 2g$.

સ્પર્શક BE ને B તરફ લંબાવીએ અને તેના ઉપર B થી આગળ O બિંદુ લઈને આ જ પ્રમાણે ગણતાં સાબિત કરી શકાય કે $x \leq 2g$ છે. આથી, $x = 2g$ થાય. આથી સ્પર્શક ઉપર બિંદુ E($2g$, 0) મળ્યું.

1.5 ક્ષેત્રફળ

ફર્માંએ વક્ર $y = x^n$ અને x-અક્ષ વચ્ચેનું $x = 0$ થી $x = b$ સુધીનું ક્ષેત્રફળ શોધેલું. અહીંયા n ધન પૂર્ણાંક છે. આ ક્ષેત્રફળ હાલની સંકેતલિપિ(Notations)માં

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} \text{ છે.}$$



આકૃતિ 4

$n = 0, 1, 2, \ldots, 9$ લઈને ઇટાલિયન ગણિતશાસ્ત્રી કેવેલિરિ(Cavalieri)એ આ સૂત્ર સાબિત કર્યું, પણ $n = 10$ માટે ખૂંચી ગયા.

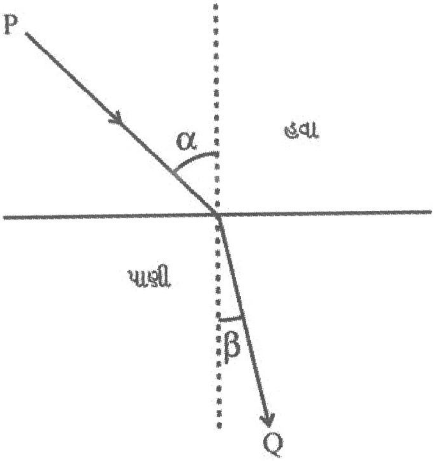
1.6 વક્રીભવન(Refraction)

આપણે બધાય જાણીએ છીએ કે પ્રકાશનું કિરણ એક માધ્યમથી બીજા માધ્યમમાં જાય ત્યારે આકૃતિ 5માં બતાવ્યા પ્રમાણે સીધું જવાના બદલે વાંકું વળે છે. હવામાંથી પ્રકાશનું કિરણ પાણીમાં જાય છે, ત્યારે લંબ તરફ વાંકું વળે છે. લંબની જોડે α ખૂણો બનાવતું કિરણ પાણીમાં પેસતાં જ લંબ જોડે α ખૂણો બનાવવાના બદલે α થી નાનો ખૂણો β બનાવે છે. ડચ વિજ્ઞાની સ્નેલે(Snell) પ્રયોગ દ્વારા શોધી કાઢેલું કે,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{અચળ}$$

આમ શાથી બને છે તેનો તેમને ખ્યાલ ન હતો. ડિસેમ્બર 1637માં ડેકાર્ટે (સ્નેલના કામનો ખ્યાલ ન પણ હોય) નીચેનો નિયમ આપ્યો

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_u}{v_e}$$



આકૃતિ 5

જ્યાં, v_e પ્રકાશની હવામાં ગતિ અને v_u પ્રકાશની પાણીમાં ગતિ દર્શાવે છે. સાબિત કરવા માટે $v_u > v_e$ માનીને દલીલ કરી. જ્યારે ફર્માએ પ્રકાશનું કિરણ P થી Q સુધી ઓછામાં ઓછા સમયમાં મુસાફરી કરે છે તેમ ધારીને (લઘુત્તમ કિંમત મેળવીને) સાબિત કરી શકેલા કે

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_e}{v_u}.$$ આ ફર્માના ઓછામાં ઓછા સમયના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે.

ઓછામાં ઓછા સમયના નિયમે ઑઇલર અને લગ્રાન્જને Calculus of Variations વિકસાવવા પ્રેરેલા. આ જ રીતે હામિલ્ટને(Hamilton) પણ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં Principle of Least action વિકસાવ્યો.

1654માં ફર્મા અને પાસ્કલે તેમના પત્રોથી સંભાવના સિદ્ધાંત(Probability Theory)નો પાયો નાખ્યો. બિંદુઓના પ્રશ્ન ઉપરના બંનેના સાથેના કામને કારણે બંને જણ સંભાવનાશાસ્ત્રના સ્થાપક ગણાય છે.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

(1) M. S. Mahones, The Mathematical Career of Pierra de Fermat, Princeton University Press, 1994

(2) G. F. Simmons, Calculus Gems, Brief Lives and Memorable Mathematics, The Mathematical Association of America, 2007

◆

ગૉટફ્રાઇડ વિલહેલ્મ લાઇબ્નિઝ (Gottfried Wilhelm Leibniz)

2. વિકલનનું સૌથી પ્રથમ સંશોધન પેપર અને ગૉટફ્રાઇડ વિલહેલ્મ લાઇબ્નિઝ (Gottfried Wilhelm Leibniz)

"The art of discovering the causes of phenomena, or true hypotheses, is like the art of deciphering, in which an ingenious conjecture often greatly shortnes the road."

– Leibniz

2.1 પ્રસ્તાવના

કલનશાસ્ત્ર(Calculus)ના શરૂઆતના બે શોધનારાઓ, ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝ એમનાં બીજાં કામો માટે વધારે જાણીતા છે. ન્યૂટનને મોટા ભાગના લોકો ભૌતિકશાસ્ત્રી તરીકે ઓળખે છે જ્યારે લાઇબ્નિઝને તત્ત્વજ્ઞાની તરીકે ઓળખે છે. ગણિતમાં મોટામાં મોટી લડાઈ ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝની – કોણે કલનશાસ્ત્ર શોધ્યું? ન્યૂટને કલનશાસ્ત્રની શરૂઆત કરી, પણ તે કામની દુનિયાને ખૂબ જ મોડી ખબર પડી. હૂક(Hooke)ના અનુભવના કારણે ન્યૂટન તેમનાં સંશોધનનાં કામો જાહેર ન કરતા. લાઇબ્નિઝે જ્યારે તેમના કલનગણિતના કામને જાહેર કરેલું એટલે કે જાણીતા સામયિક(જર્નલ)માં લાઇબ્નિઝનું કામ ન્યૂટનના કામ પહેલાં પ્રસિદ્ધ થયેલું. બંને જણે સ્વતંત્ર રીતે કલનગણિત શોધેલું.

2.2 બાળપણ અને અભ્યાસ

લાઇબ્નિઝનો જન્મ જુલાઈ 1, 1646ના રોજ લાઇપ્ઝિગ(Leipzig)માં થયેલો. લાઇપ્ઝિગ જર્મનીના સેક્સોની (Saxony) રાજ્યમાં આવેલું છે. બર્લિનથી (Berlin) દક્ષિણ દિશામાં 150 કિલોમીટર (73 માઈલ) દૂર લાઇપ્ઝિગ આવેલું છે. લાઇબ્નિઝના પિતા ફ્રેડરિક(Frederick) લાઇબ્નિઝ નૈતિક તત્ત્વજ્ઞાન(Moral Philosophy)ના લાઇપ્ઝિગ યુનિવર્સિટીમાં અધ્યાપક હતા અને લાઇબ્નિઝ છ વર્ષના હતા ત્યારે તેમનું નિધન થયેલું. ફ્રેડરિકનાં ત્રીજાં પત્ની કેથરીના સ્કમકે(Catherena Schmuck) ગૉટફ્રાઇડ અને તેમનાં નાનાં બહેન એન્ના(Anna)ને ઊછરેલાં. લાઇબ્નિઝનાં માતા કેથરીના વકીલનાં પુત્રી હતાં. લાઇબ્નિઝ તેમનાં માતા પાસેથી નૈતિક અને ધાર્મિક મૂલ્યો શીખ્યા, જેણે તેમની જિંદગી અને તેમના તત્ત્વજ્ઞાનમાં અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો.

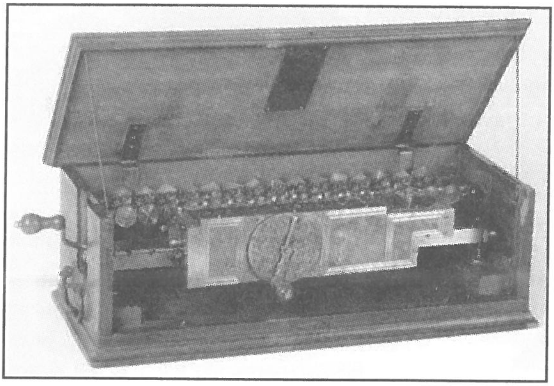
લાઇબ્નિઝ નાનપણથી જ ભણવામાં ખૂબ જ હોશિયાર હતા. તેમને તેમના પિતાની લાઇબ્રેરીનાં પુસ્તકો વાંચવાની તાલાવેલી લાગેલી. આઠ વર્ષની વયે લેટિન ભણવાનું શરૂ કર્યું અને તેમના પિતાની લાઇબ્રેરીનો બરાબર ઉપયોગ કરીને બાર વર્ષની વયે લેટિન ભાષામાં પારંગત થયા. તેમની સ્કૂલના ખાસ પ્રસંગે તેમણે લેટિન ભાષામાં એક જ સવારમાં 300 stanzas રચેલા.

14 વર્ષની વયે લાઇબ્નિઝ યુનિવર્સિટીમાં દાખલ થયા, પણ તે સમયે તેમની ઉંમરના ઘણા વિદ્યાર્થીઓ યુનિવર્સિટીમાં દાખલ થતા. તે સમયે તે યુનિવર્સિટીમાં તત્ત્વજ્ઞાન બહુ સારી રીતે શીખવાતું, જ્યારે ગણિત બરાબર શીખવાતું ન હતું. 1663માં તત્ત્વજ્ઞાનમાં બી.એ. થયા. 1663ની ઉનાળાની ટર્મ જીનામાં ગાળી. જીનામાં વેગેલ (Weigal) ગણિતના પ્રોફેસર હતા અને તત્ત્વજ્ઞાની પણ હતા. લાઇબ્નિઝ તેમની પાસેથી તર્કશાસ્ત્ર અને તત્ત્વજ્ઞાન માટે ગણિતની સાબિતીની રીતની અગત્યતા સમજ્યા. ફેબ્રુઆરી 7, 1664માં તત્ત્વજ્ઞાન સાથે એમ.એ. થયા. એક વર્ષના કાયદાના અભ્યાસ પછી સપ્ટેમ્બર 28, 1665માં કાયદાની બી.એ.ની ડિગ્રી મેળવી. તેમનો ખ્યાલ વકીલાત કરવાનું લાઇસન્સ અને કાયદામાં ડૉક્ટરેટ મેળવવાનો હતો. જેના માટે સામાન્ય રીતે ત્રણ વર્ષ અભ્યાસ કરવો પડે. લાઇબ્નિઝની પ્રતિષ્ઠા સરસ હતી અને છાત્રવૃત્તિ મેળવનાર હોવા છતાંય કાયદાશાસ્ત્રમાં ડૉક્ટરેટ માટે લાઇબ્નિઝને લાઇપ્ઝિગ યુનિવર્સિટીએ ના પાડી. કારણોના ઘણા અનુમાનો છે. આથી લાઇપ્ઝિગ યુનિવર્સિટી છોડીને યુનિવર્સિટી ઑફ ઍલ્ટ્ડ્રૉફ(Altdrof)માં ગયા અને ત્યાં જઈને લાઇપ્ઝિગ યુનિવર્સિટીમાં કરેલું કામ અને બીજું વધારાનું કામ કરીને 'Disputatio Inanguralis De Casibus Perplescisxis In Jure' નામની થીસિસ યુનિવર્સિટીમાં રજૂ કરી. લાઇબ્નિઝને વકીલાત કરવાનું લાઇસન્સ અને ડૉક્ટરેટ ઇન લૉ નવેમ્બર, 1666માં મળ્યાં. થીસિસનો બચાવ એટલો સરસ હતો કે જેનાથી પ્રભાવિત થઈને યુનિવર્સિટીએ તેમને પ્રૉફેસરની નિમણૂકનો પત્ર પણ આપ્યો. લાઇબ્નિઝનો ખ્યાલ બીજો હોઈને તે નિમણૂકનો સ્વીકાર ન કર્યો. આ સમયે તેમની ઉંમર ફક્ત વીસ જ વર્ષની હતી.

2.3 નોકરી

અલકેમિકલ સોસાયટીના મંત્રી તરીકે શરૂઆત કરી. તેમને જોહાન્ન ક્રિસ્ટિઅન વૉન બૉયનીબર્ગ(Johann Christian Von Boyneburg) જોડે ઓળખાણ થઈ. બૉયનીબર્ગના મદદનીશ, સલાહકાર, ગ્રંથપાલ અને વકીલ તરીકે ઘણાં વર્ષ કામ કર્યું. આ સમયે જર્મની ઘણા રાજ્યોનું બનેલું હતું. આ રાજ્યોના વડા બિશપ અને આર્ચબિશપ હતા. મેઇન્ઝ(Mainz) જર્મનીનું રાજ્ય હતું, પણ સાથે-સાથે નાનો દેશ હતો અને રોમન રાજ્યનો ભાગ હતો. બૉયનીબર્ગ મેઇન્ઝના આર્ચબિશપ સ્કૉનબૉર્ન(Schonborn)ની કોર્ટમાં પ્રધાન હતા. લાઇબ્નિઝે ''એ ન્યૂ મૅથડ ઑફ ટીચિંગ ઍન્ડ લર્નિંગ લૉ (A New Method of Teaching and Learning Law)''નો ખૂબ સરસ નિબંધ લખ્યો. બૉયનીબર્ગે લાઇબ્નિઝને આ નિબંધ સ્કૉનબૉર્નને અર્પણ

કરવા સૂચવ્યું જે લાઇબ્નિઝે સ્વીકાર્યું. આ અર્પણ કરેલો નિબંધ સ્કોનબોર્નને આપવા બોયનીબર્ગે ગોઠવણ કરી. આ મુલાકાતથી આર્ચબિશપ લાઇબ્નિઝથી એટલા બધા પ્રભાવિત થયા કે તેમણે લાઇબ્નિઝને ફક્ત ચોવીસ વર્ષની વયે હાઇકોર્ટ ઑફ અપીલના જજ(Judge) બનાવ્યા. આ કામની સાથે-સાથે તેમણે ગૂંચવણભર્યા કાયદાઓમાં મોટા સુધારા કરીને સરળ બનાવ્યા. ફુરસદના સમયમાં તેમણે ગણતરી કરવાનું મશીન બનાવ્યું જે સરળતાથી સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરી શકતું પણ તે સમય યંત્રોદ્યોગશાસ્ત્ર વિકસેલું ન હોઈને ખાસ સફળતા ન મળી.



લાઇબ્નિઝનું કેલ્ક્યુલેટર (Leibniz's Calculator)

2.4 પૅરિસ

1672માં લાઇબ્નિઝ, બોયનીબર્ગના બદલે ફ્રાન્સને (લુઇસ 14 Louis XIV) ઇજિપ્ત પર હુમલો કરવા સમજાવવા માટે પૅરિસ ગયા. સરકારી અધિકારીઓને મળવાની રાહ જોતાં જોતાં વૈજ્ઞાનિકો અને ગણિતશાસ્ત્રીઓને મળ્યા. પૅરિસમાં તેઓ એકલા હતા. રોજ-બરોજની ખાસ મોટી જવાબદારી ન હોઈને તેમણે ઘણા મહિના ફ્રેન્ચ શીખવામાં કાઢ્યા. બૉઇનીબર્ગના પ્રતિનિધિ હતા અને તેમના ઓળખાણપત્રથી પૅરિસનાં ઘણાં દ્વારો ખૂલી ગયાં. લાઇબ્નિઝને થોડુંઘણું કાયદાકીય કામ મળી રહેતું. કોઈ પરદેશી રાજકુંવરને જેલમાંથી છોડાવી લાવવાનું કામ, છૂટાછેડાને લગતા કાગળો, કોઈ ધંધાકીય દસ્તાવેજો તૈયાર કરવા વગેરે કામો કરતા. પુસ્તકાલયમાં પણ ઘણો સમય કાઢતા. ડચ ભૌતિકશાસ્ત્રી અને ગણિતશાસ્ત્રી ક્રિસ્ટિયન હુયગીન્સ (Christian Huygens) મળ્યા ત્યારે લાઇબ્નિઝને ખ્યાલ આવ્યો કે તેમનું ગણિતનું અને ભૌતિકશાસ્ત્રનું જ્ઞાન ખૂબ ઓછું અને છૂટુંછવાયું છે. ગણિતના સારા નસીબે આ બન્યું. હુયગીન્સે લાઇબ્નિઝને નીચેની સંખ્યાનો સરવાળો મેળવવા જણાવ્યું.

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots$$

બંને બાજુએ 2 વડે ભાગતાં,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \ldots$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad S = 2$$

લાઇબ્નિઝે આ સરવાળો હુયગીન્સને બતાવ્યો, ત્યારથી હુયગીન્સને ખ્યાલ આવી ગયો કે આ સામાન્ય વિદ્યાર્થી નથી. હુયગીન્સે અંગ્રેજ ગણિતશાસ્ત્રી જોહ્ન વાલિસ(John Wallis)ના લખેલા, 'એરિથમેટિકા ઇન્ફિનિટોરિયમ (Arithmatica Infinitorium)'નો અભ્યાસ કરવા જણાવ્યું. આ પછી પણ ઘણાં પુસ્તકો વાંચવા જણાવ્યું. લાઇબ્નિઝે ગણિતનો અભ્યાસ મોડેથી શરૂ કર્યો જેનું કારણ લાઇબ્નિઝને વૈજ્ઞાનિકો પહેલાં વકીલો મળેલા. હુયગીન્સના હાથ નીચે 1672માં ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્ર ભણવાનું શરૂ કર્યું.

1672માં બોયનીબર્ગના પુત્ર લાઇબ્નિઝના હાથ નીચે ભણવા માટે આવ્યા. બોયનીબર્ગના પુત્રની સાથે તેમના ભત્રીજા પણ ફ્રાન્સના રાજા લુઇસ XIVને શાંતિ માટેની કોન્ફરન્સ યોજવા માટેની ભલામણ લઈને આવેલા, પણ કંઈ આગળ ન ચાલ્યું. આથી જાન્યુઆરી 1673માં લાઇબ્નિઝ અને બોયનીબર્ગના ભત્રીજા શાંતિ માટેની કોન્ફરન્સ માટે ઇંગ્લૅન્ડ આવ્યા. અહીંઆં પણ શાંતિની કોન્ફરન્સ માટે સફળતા ના મળી. લાઇબ્નિઝ રોયલ સોસાયટીના સભ્યો હૂક, બોયલ અને પેલને મળ્યા. લાઇબ્નિઝે તેમના ગણતરી કરવાના મશીનની રજૂઆત પણ રોયલ સોસાયટીના સભ્યો આગળ કરી. આ મશીનમાં થોડાઘણા સૂચવેલા સુધારા લાઇબ્નિઝ કરશે તે આશાએ રોયલ સોસાયટીએ લાઇબ્નિઝને 19 એપ્રિલ, 1673ના રોજ રોયલ સોસાયટીના સભ્ય બનાવ્યા.

હુયગીન્સને મળ્યા અને તેમણે લેખકો જોહ્ન વાલિસ, પાસ્કલ, ફેબ્રી, ગ્રેગરી, સેન્ટ વિન્સેન્ટ, ડેકાર્ટ અને સ્લુઝના પુસ્તકો વાંચવા સૂચવ્યું. પૅરિસમાં રહેવા આવ્યા પછી કલનશાસ્ત્રનો વિચાર કરવા માંડ્યા. 1673માં કલનશાસ્ત્ર માટે સારા સંકેત (Notations) શોધવાની ભારે મહેનત કરતા હતા અને શરૂઆતની ગણતરીઓ ગૂંચવણભરી હતી. તેમની 21 નવેમ્બરની હસ્તપ્રતમાં (Manusrcipt) પહેલી વખત સંકેત $\int f(x)\, dx$ વાપર્યો હતો. આ જ હસ્તપ્રતમાં $d(xy)$ નો નિયમ આપ્યો છે. 1676ની પાનખર ઋતુમાં (Autum) $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ જ્યાં, n પૂર્ણાંક અને અપૂર્ણાંક છે તે મેળવેલું.

પૅરિસ આવ્યાને વર્ષ થયા પહેલાં બૉઇનબર્ગનું નિધન થયું. આના એક મહિના પછી તેમની બહેન એન્નાનું પણ નિધન થયું. આની અસર લાઇબ્નિઝ ઉપર ઘણી થઈ. બૉઇનબર્ગ જ લાઇબ્નિઝનો પગાર આપતા હતા. નસીબજોગે બૉઇનબર્ગે તેમના નિધન પહેલાં જ તેમના

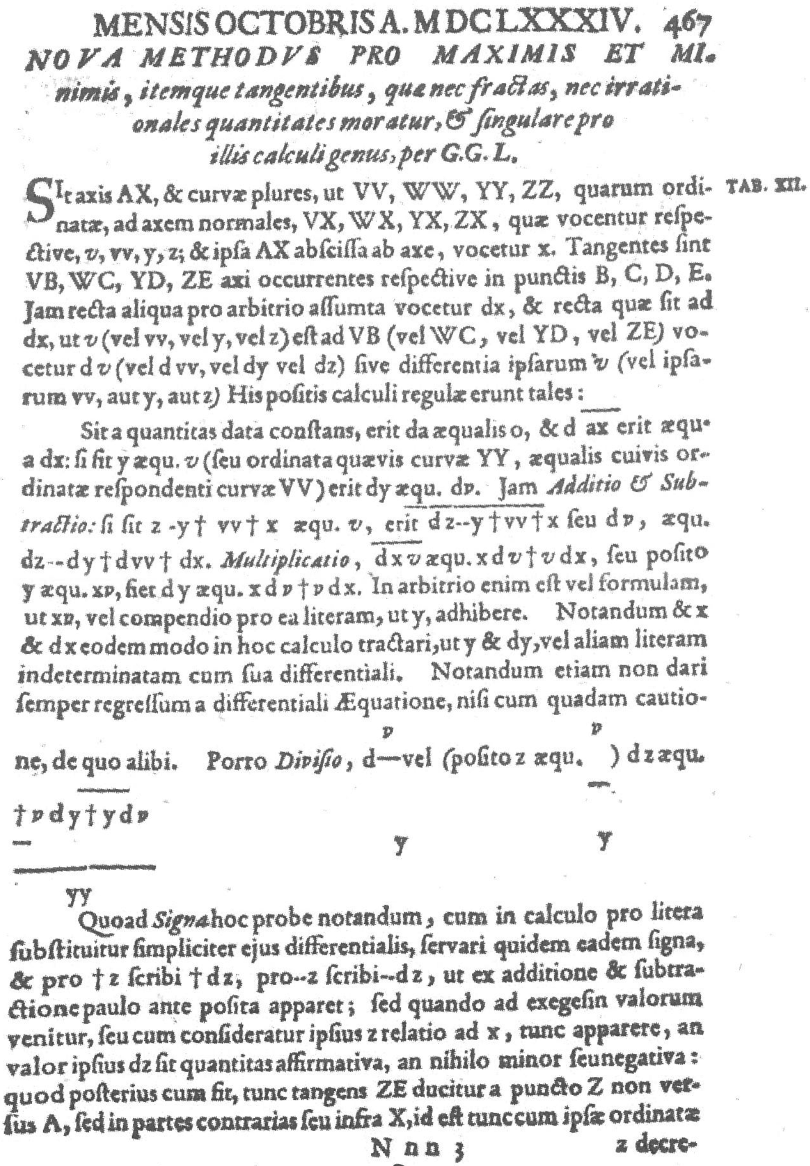
પુત્ર ફિલિપ વિલ્લિઅમ(Philip William)ને લાઇબ્નિઝના હાથ નીચે પૅરિસ ભણવા મૂકેલો. લાઇબ્નિઝના કહેવા પ્રમાણે સવારના છથી રાતના દસ વાગ્યા સુધી ફિલિપ કામ કરવા તૈયાર ન હોઈને બંનેને ન ફાવ્યું. આથી લાઇબ્નિઝે બૉઇનબર્ગના કુટુંબને ફિલિપના લગતો પત્ર લખ્યો. આમાં અગાઉના બાકીના પગારના અને ફિલિપના ભણાવવાના પગારનું લખ્યું. ફિલિપની બાએ 1673થી ફિલિપની ટ્યૂટરશિપ બંધ કરીને પગાર ઘટાડી દીધો અને આખરે સપ્ટેમ્બર 13, 1674થી પગાર આપવો બંધ કરી દીધો.

2.5 1676 થી 1716

બ્રુન્સવિક(Brunswick)ના રાજવીએ(ડ્યૂક, Duke) 1673માં લાઇબ્નિઝને સલાહકાર (કાઉન્સેલર, Counseller) તરીકેની જગ્યાની નોકરીની દરખાસ્ત આપેલી. લાઇબ્નિઝને પૅરિસમાં જ રહેવું હતું.

લાઇબ્નિઝને પૅરિસમાં ઍકેડેમી ઑફ સાયન્સિસમાં રહેવું હતું, પણ તેમાં ઘણા પરદેશીઓ હોઈને લાઇબ્નિઝને આમંત્રણ ન મળ્યું. આખરે બ્રુન્સવિકની દરખાસ્ત સ્વીકારીને 1676ના અંતમાં બ્રુન્સવિકના સામ્રાજ્યની રાજધાની હૅનોવર (Honover) આવી પહોંચ્યા. આવતાં પહેલાં તેમણે લંડનની મુલાકાત લીધેલી. હૅનોવર પહોંચ્યા પછી રાજવીને તેમણે પ્રીવિ કાઉન્સેલર ઑફ જસ્ટીસ(Privy Counsellor of Justice)ની જગ્યા આપવા વિનંતી કરી. જે રાજવીએ મંજૂર કરી. જીવ્યા ત્યાં સુધી એટલે કે 1714 સુધી લાઇબ્નિઝે રાજવી કુટુંબ જોડે કામ કર્યું. બ્રુન્સવિકના ત્રણ ત્રણ રાજવીઓ જોડે તેમણે ઇતિહાસકાર, રાજકીય સલાહકાર અને ડ્યુકલ (રાજવી) પુસ્તકાલયના ગ્રંથપાલ તરીકે કામ કર્યું. બ્રુન્સવિક રાજવંશના આ સમય દરમિયાનની ઘણી બધી ઘટનાઓ વિશે લાઇબ્નિઝે લખેલું છે તે હાલમાં તે સમયનો ઐતિહાસિક ખજાનો છે. લાઇબ્નિઝ કલનગણિત, ગણિત, ભૌતિકશાસ્ત્ર, તર્કશાસ્ત્ર અને તત્ત્વજ્ઞાન વગેરેના અભ્યાસમાં ઘણો સમય આપતા અને ઘણા બધાની જોડે પત્રવ્યવહાર પણ કરતા. આ બધું ઘણો સમય લે, તે રાજવીઓ ચલાવી લેતા.

હેનોવરમાં સ્થાયી બન્યા પછી લાઇપ્ઝિગના નવા સામયિક Acta Eruditorum 1682માં કલનગણિતના અસ્તિત્વની જાહેરાત કરી અને 1684માં સૌથી પહેલું લાઇબ્નિઝનું વિકલન કલનગણિતનું સંશોધન પેપર પ્રસિદ્ધ થયું. Acta Eruditorum 1682માં શરૂ થયું અને 1732માં નવું નામ Nova Acta Euroditarum રાખ્યું અને 1782માં બંધ થયું. વિકલન કલનગણિતનું પહેલું સંશોધન પેપર લેટિનમાં લખાયેલું અને આ ઐતિહાસિક પ્રસંગ હોઈને તેનું પહેલું પાનું આકૃતિ 1માં આપ્યું છે. તેના મથાળાનું અંગ્રેજી ભાષાંતર "A New Method for Maxima and Minima as well as tangents, which is Impeded Neither by Fractional nor by Irrational quantities, and a remarkable type of calculus for this (1684)"


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

TAB. XII.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, *v*, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut *v* (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d *v* (vel d vv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum *v* (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu. *v* (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. d*v*. Jam *Additio & Subtractio:* si sit z -y † vv † x æqu. *v*, erit d z--y † vv † x seu d*v*, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dx*v* æqu. x d*v* † *v* dx, seu posito y æqu. x*v*, fiet d y æqu. x d*v* † *v* dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut x*v*, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\dagger v\,dy \dagger y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro † z scribi † d z, pro--z scribi--d z, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

આકૃતિ 1

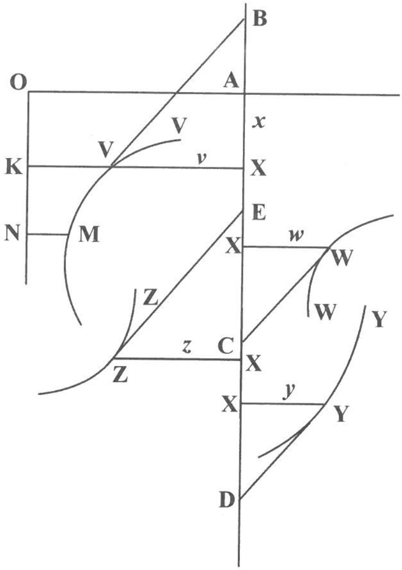
આ સાડા છ $\left(6\frac{1}{2}\right)$ પાનાના સંશોધન પેપરમાં ઘણી ટાઇપિંગની ભૂલો છે અને અવ્યવસ્થિત પણ છે. આ સંશોધન પેપરમાં કોઈ પણ જાતની સાબિતી આપી નથી અને

ઓછામાં ઓછું લખાણ હોઈને બહુ જ ઓછા લોકો તે સમયે સમજી શકેલા. જાણે કે આ પેપર અગત્યનું હતું. બર્નૂલિભાઈઓએ સાથે મળીને આ અને લાઇબ્નિઝનાં બીજાં પેપરોનો અભ્યાસ કરીને પારંગત બનેલા.

લાઇબ્નિઝ આ પેપરની શરૂઆત જ વક્રોની x-અક્ષના સંદર્ભે, ચલો અને સ્પર્શકોથી કરે છે. કાર્ટિસિઅન રીત પ્રમાણે, ભૌમિતિક સંદર્ભ છે અને વક્રને સ્પષ્ટ અને સવિસ્તારથી x ના સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે છે. તે સમયે વિધેય અને સાપેક્ષ ચલોની શરૂઆત થયેલી ન હતી અને ફક્ત x-અક્ષ જ હતો અને y-અક્ષ ન હતો, વક્રને નાની નાની અનંત બાજુઓનો ગણવામાં આવતો અને નાના વૃત્તખંડને લંબાવીને સ્પર્શક મેળવતા. આ સંશોધન પેપરમાં વિકલનના વ્યાપક નિયમો આપ્યા છે. વિકલિતના (Derivative) બદલે વિકલ(Differential) વાપર્યું છે. વિકલની વ્યાખ્યામાં dx ને અનંત સૂક્ષ્મ ગણેલા પણ તેની ખૂબ જ ઊંડાણપૂર્વક વ્યાખ્યા આપેલી ન હોઈને ગણિતશાસ્ત્રીઓના વિરોધના ડરના કારણે કંઈ જ જણાવ્યું નથી.

2.6 કલનગણિત

કલનગણિતમાં તેમના ફાળાનો ખ્યાલ આવે તે માટે 1684માં પ્રસિદ્ધ થયેલા તેમના પ્રખ્યાત સંશોધન પેપર, "A New Method for Maxima and Minima as well as Tangents, which is Impeded Neither by Fractional nor by Irrational Quantities and a Remarkable Type of Calculus for This (1684)"ના થોડાક ભાગનું નીચે ભાષાંતર આપ્યું છે. આ લેખ મૂળ લૅટિન ભાષામાં લખાયેલો છે.



આકૃતિ 2

આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે AX x-અક્ષ, VV, WW, YY, ZZ આપેલા વક્રો છે. Y-યામો VX, WX, YX, ZX x-અક્ષને લંબ છે અને તેઓ અનુક્રમે v, w, y, z કહેવાય છે. VB, WC, YD, ZE સ્પર્શકો છે. જે x-અક્ષને B, C, D અને E માં છેદે છે.

આખરે ઉપયોગિતા માટે dx ને ખૂબ જ નાનો ગણવામાં આવે છે અને પછી કોઈ વિકલ dv વ્યાખ્યા આપી, જે રીતે, v, XB ને છે તે જ રીતે dv, dxને છે એટલે કે,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{XB}$$

કોટિ, સ્પર્શક અને ઉપસ્પર્શકથી બનતો ત્રિકોણ અને વિકલનોથી બનતો ત્રિકોણ એકરૂપ હોઈને, $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{XB}$.

આ ધારણાઓ નીચે કલનગણિતના નીચેના નિયમો મળે. (આ તો ફક્ત લાઇબ્નિઝ જોઈ શકે, બીજા તેમના જેવા.)

જો a આપેલો કોઈ પણ અચળ હોય, તો $d(a) = 0$ અને $d(ax) = a\ dx$ થાય. જો $y = v$ હોય (એટલે કે, જો કોઈ પણ વક્ર YY ના યામ બરાબર સુસંગત વક્ર VV ના યામ હોય), તો $dy = dv$. હવે સરવાળો અને બાદબાકી : જો $z - y + w + x = v$ હોય, તો $d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$. ગુણાકાર : $d(xv) = xdv + vdx$ અથવા $y = xv$ મૂકતાં $dy = xdv + vdx$. આપણે xv નું સૂત્ર લઈએ અથવા તો તેને બદલે y લઈએ તો કોઈ ફેર પડતો નથી. આપણે એટલું ધ્યાન રાખીએ કે કલનગણિતમાં જે રીતે x અને dx ગણીએ તે જ રીતે y અને dy ગણીશું અથવા તો કોઈ પણ અનિશ્ચિત મૂળાક્ષર તેના તફાવત સાથે. નોંધ કરવા જેવું છે કે વિકલ સમીકરણમાંથી થોડીક કાળજી વગર આપણે બધી વખત પાછા વળી ન શકીએ, જેની ચર્ચા આપણે બીજે કરીશું.

હવે ભાગાકાર : $d\left(\frac{v}{y}\right)$ or $\left(\text{જો } z = \frac{v}{y}\right)$

$$dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y\,y}$$

(નોંધ : તે સમયે y^2 ના બદલે yy વપરાતું.)

નીચેના ચિહ્નો માટે મગજમાં રાખવું. કલનગણિતમાં જ્યારે અક્ષરની જગ્યાએ તેનો વિકલ મુકાય, ત્યારે ચિહ્નો સચવાય; z ના બદલે dz લખીએ, અગાઉના સરવાળા અને બાદબાકીના નિયમોથી બનતું દેખાય છે. ગમે તેમ પણ જ્યારે કિંમતોનું સ્પષ્ટીકરણ કરવામાં આવે ત્યારે, એટલે કે z નો x સાથેનો સંબંધ ગણીએ ત્યારે આપણે નક્કી કરી શકીએ કે $dz > 0$ કે $dz < 0$ છે. જ્યારે પાછળનું બને છે, ત્યારે સ્પર્શક, ZE, Aની દિશામાં નથી, પણ ઊલટી દિશામાં, x થી નીચે છે. જ્યારે x વધતો જાય ત્યારે z ઘટતો

જાય ત્યારે આ બને છે. અને કોટિ v કોઈ વખતે વધે અને કોઈ વખતે ઘટે એમ હોવાથી dv પણ કોઈ વખત ધન અને કોઈ વખતે ઋણ હશે; પહેલા કિસ્સામાં સ્પર્શક VB, Aની દિશામાં છે, પાછળનામાં ઊલટી દિશામાં છે. આમાંનું કંઈ મધ્યના બિંદુ M એ બનતું નથી, આ ક્ષણે v વધતો નથી કે ઘટતો નથી, પણ સ્થિર છે. એમ હોવાથી $dv = 0$ છે અને પરિમાણ(Quantity) ઋણ હોય કે ધન હોય, $+0 = -0$ હોઈને કોઈ ફેર પડતો નથી. આ જગ્યાએ v જેના y-યામ બરાબર LM છે (આકૃતિમાં L બતાવ્યો નથી) તે મહત્તમ (Maximum) છે (અથવા જ્યારે બહિર્મુખતા (Convexity) અક્ષ તરફ વળેલી હોય, ન્યૂનતમ (Minimum) અને M બિંદુએ સ્પર્શક Xથી Aની દિશામાં કે એથી ઊલટી દિશામાં નથી, પણ તે અક્ષને સમાંતર છે. જો dv, dx ની સાપેક્ષમાં અનંત હોય, તો સ્પર્શક અક્ષને લંબ છે અથવા તો તે કોટિ(Ordinate) છે. જો $dv = dx$ હોય, તો સ્પર્શક અક્ષ જોડે અડધો કાટખૂણો બનાવે છે. જ્યારે કોટિઓ v વધે, તેના વધારાઓ કે તફાવતો dv પણ વધે. (એટલે કે જ્યારે dv ધન હોય, ત્યારે ત્યારે $d(dv)$, તફાવતનો તફાવત, પણ ધન છે અને જ્યારે dv ઋણ હોય, ત્યારે $d(dv)$ પણ ઋણ છે). ત્યારે વક્ર તેની બહુર્મુખતા (Convexity) અક્ષ તરફ વાળે છે, જ્યારે બીજા કિસ્સામાં અંતર્મુખતા (Concavity) તરફ વાળે છે. જ્યાં વધારો વધુમાં વધુ કે ઓછામાં ઓછો છે, અથવા જ્યાં વધારો ઘટતાં ઘટતાં વધારો થાય અથવા આથી ઊલટું બને, તે બિંદુ વક્રતાપરિવૃત્તિ (Point of inflection) બિંદુ છે. અહીંયા અંતર્મુખતા અને બહિર્મુખતા અદલબદલ થઈ છે એ શરતે કે કોટિ (Ordinate) વધવામાંથી ઘટે નહિ એ જ પ્રમાણે ઊલટું કારણ કે અંતર્મુખતા કે બહિર્મુખતા રહેશે. ગમે તેમ પણ વધારો વધે જવાનું કે ઘટે જવાનું અશક્ય છે, પણ કોટિએ વધવામાંથી ઘટવાનું કે એથી ઊલટું. જ્યારે $d(dv) = 0$ હોય તે દરમિયાન $v = 0$ અથવા $dv = 0$ ન હોય, ત્યારે તે બિંદુએ વક્રતાપરિવૃત્તિ બિંદુ ઉદ્ભવે છે. વક્રતાપરિવૃત્તિ બિંદુ શોધવા માટે મહત્તમ બિંદુ (maximum) શોધવા માટે બે સરખા ઉકેલો મેળવવાના બદલે ત્રણ સરખા મેળવવાનો પ્રશ્ન છે. આ બધાનો આધાર સાચા ચિહ્નોના ઉપયોગ ઉપર છે.

બરાબર કયું ચિહ્ન છે તે નક્કી કરતાં પહેલાં અગાઉ જેમ આપણે ભાગાકારમાં કરેલું તેમ કોઈ વખતે અસ્પષ્ટ ચિહ્નોનો ઉપયોગ વધુ અંશે સારો છે. જ્યારે x વધતો v/y વધે (કે ઘટે) છે, ત્યારે

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y \cdot y}$$

અસ્પષ્ટ ચિહ્નો એ રીતે પસંદ કરો કે જેથી આ અપૂર્ણાંક ધન (અથવા ઋણ) રહે. પણ $\mp$ ઊલટું $\pm$ હોઈને, જ્યારે એક + હોય, ત્યારે બીજું − હોય અથવા ઊલટું (Vice versa). એક જ પગલામાં ઘણી બધી અસ્પષ્ટતાઓ હોઈ શકે, જેને હું કૌંસથી જુદી પાડીશ. દાખલા તરીકે, જો $v/y + y/z + x/v = w$ હોય, તો આપણે

$$\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{zz} + \frac{(\pm)\, xdv\, (\mp)\, vdz}{vv} = dw$$

લખવું જોઈએ. આથી જુદી જુદી રકમોની અસ્પષ્ટતા ગુંચવણ ઊભી કરશે નહિ. આપણે નોંધવું જોઈએ કે અસ્પષ્ટ ચિહ્નો તેમની જાતે જ + આપે છે, તેની સાથે વિરુદ્ધ − આપે છે, જ્યારે બીજું અસ્પષ્ટ ચિહ્ન બંને ઉપર આધાર રાખતી અસ્પષ્ટતા ઊભી કરે છે.

ઘાતો (Powers)

$$dx^a = ax^{a-1}\, dx$$

દાખલા તરીકે,

$$dx^3 = 3x^2\, dx$$

$$d\left(\frac{1}{x^a}\right) = -a\,\frac{dx}{x^{a+1}}$$

દાખલા તરીકે, જો $w = \dfrac{1}{x^3}$, તો $dw = -\dfrac{3dx}{x^4}$

મૂળો (Roots)

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\, dx\, \sqrt[b]{x^{a-b}}$$

(આથી, $d\sqrt[2]{y} = \dfrac{1}{2}\, dy\, \sqrt[2]{y^{1-2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{dy}{\sqrt[2]{y}}$)

આ બાબતમાં $a = 1,\ b = 2$ આથી,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\sqrt[b]{x^{a-b}} = \frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{1-2}} = \frac{1}{2}\,\frac{dy}{\sqrt[2]{y}}$$

પણ y^{-1} એ $1/y$ના સમાન છે; સમગુણોત્તર શ્રેણીના ઘાતાંકના નિયમથી, અને

$$\sqrt[2]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[2]{y}},\ d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{a}{b}\frac{dx}{\sqrt[b]{x^{a+b}}}$$

પૂર્ણાંક ઘાતનો નિયમ અપૂર્ણાંકો તેમ જ મૂળો(Roots)ને આવરી લેવા માટે પૂરતો હોત, જ્યારે ઘાતાંક ઋણ હોય, ત્યારે ઘાત અપૂર્ણાંકમાં ફેરવાય છે, જ્યારે ઘાતાંક અપૂર્ણાંક હોય, ત્યારે ઘાત મૂળમાં ફેરવાય છે. તેમ છતાંયે બીજાઓને આ નિગમનો (Deductions) મેળવવાનું સોંપવાના કરતાં હું મારી જાતે આ નિષ્કર્ષો (Conclusions) મેળવવાનું પસંદ કરું, કારણ કે આ અમુક અંશે વ્યાપક છે અને વારંવાર ઉદ્ભવે છે. જે બાબત તેમની જાતે મુશ્કેલ છે, તેના માટે સરળ કરી આપતી ક્રિયા ઇચ્છવા યોગ્ય છે.

આ કલનગણિતના અલ્ગોરીધમ (Algorithm) જે આપણે જાણીએ છીએ તેને હું વિકલન કલનગણિત(Differential Calculus) કહું છું. બાકીનાં બીજા વિકલન સમીકરણોના ગણતરી કરવાના નિયમો ઉકેલ વ્યાપક રીતથી ઉકેલક્ષમ(Solveble) છે. આપણે અપૂર્ણાંકો, અસંમેયો અને બીજી મર્યાદાઓ વગેરે દૂર કર્યા સિવાય વધારેમાં વધારે અને ઓછામાં ઓછી (કિંમત) તેમજ સ્પર્શકો હાલ સુધીમાં પ્રસિદ્ધ થયેલી રીતોથી મેળવી શકીએ. (જેને આવી બાબતનો અનુભવ છે અને અત્યાર સુધી જેની પૂરેપૂરી તલાશ થઈ નથી તેવા dx, dy, dv, dw, dz જેને ક્ષણિક તફાવતના પ્રમાણસર ગણી શકાય, એટલે કે x, y, v, w, z ના અનુરૂપમાં થયેલો વધારો કે ઘટાડો ગણે તેને માટે આ બધાની દાખલા દલીલ સાથેની સ્પષ્ટ રજૂઆત સરળ હશે. કોઈ પણ આપેલા સમીકરણ માટે આપણે તેનું વિકલન સમીકરણ લખી શકીએ.

Supplementum કલનશાસ્ત્રનું મૂળભૂત પ્રમેય(Fundamental Theorem of Calculus)

ક્ષેત્રકલન(Quadrature)નું અગત્યનું પરિણામ તેમના 1693ના સંશોધન પેપર, "Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima Omnium tetragonismorum effectio per motum similirque multiplex constructio linease ex data tangentium conditione (More on geometric measurement, or most generally of all practicing of quadrilateralization through motion; likewise many ways to construct a curve from a given on tangents)".

સૌથી પહેલા વૈજ્ઞાનિક સામયિક(Journal) Acta Eruditorumમાં 1693માં પ્રસિદ્ધ થયું. આ પરિણામ એટલું બધું અગત્યનું છે કે જેને આપણે 'કલનશાસ્ત્રના મૂળભૂત પ્રમેય (Fundamental Theorem of Calculus)' તરીકે ઓળખીએ છીએ. આ મૂળભૂત પ્રમેયોની જુદા જ પ્રકારની સાબિતી છે.

શૂન્યાભિચલોના (Infinitesimals) તફાવત અને સરવાળા માટે સંકેતનો (Notations) દાખલ કર્યા અને તેને સુધારતા પણ ગયા અને આખરે x ની કિંમતોના શૂન્યાભિચલના તફાવત માટે $d(x)$ અને લૅટિન ભાષાના 'Summa' Sને મોટો કરીને $\int$ ને શૂન્યાભિચલના સરવાળા માટે વાપર્યા અને તે સંકેતનો હાલમાં પણ આપણે વાપરીએ છીએ.

2.7 ઉપસંહાર

રાજવી અર્નેસ્ટ ઑગસ્ટસે(Earnest Augustus) લાઇબ્નિઝને બ્રુન્સવિક વંશનો ઇતિહાસ લખવા સોંપેલું. આ કામ માટે લાઇબ્નિઝ જર્મની, ઑસ્ટ્રીયા, ઇટાલિ વગેરે જગ્યાએ ફર્યા, પણ બીજાં ઘણાં કામોના કારણે અને તેમની નજરે સરસ કામ કરવા માટે ઘણો સમય લીધો જેના કારણે ઘણા રાજવીઓ લાઇબ્નિઝ ઉપર નાખુશ હતા. ઓગણીસમી સદીમાં આખરે આ કામ પ્રસિદ્ધ થયું જે ત્રણ દળદાર ગ્રંથો છે.

1700માં બર્લિન ઍકેડેમી શરૂ કરવામાં લાઇબ્નિઝનો ખૂબ જ અગત્યનો ફાળો હોઈને જીવ્યા ત્યાં સુધી બર્લિન ઍકેડેમીના તેઓ પ્રમુખ રહ્યા.

ઇંગ્લૅન્ડનાં રાણી એન્ન(Ann)નું 1714માં નિધન થયું. આ પછી બ્રિટનના 1701ના સમજૂતી(Settlement)ના કાયદા પ્રમાણે બ્રુન્સવિકના રાજવી બ્રિટનના રાજા જ્યૉર્જ બન્યા. આ રાજવીનો હનોવરની કૉર્ટનો મોટો કાફલો બ્રિટન પહોંચ્યો, પણ જ્યૉર્જ I એ લાઇબ્નિઝને તેમની સાથે બ્રિટન આવવાનું આમંત્રણ ન આપ્યું. કદાચ ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝની લડાઈ કારણભૂત હોય.

લાઇબ્નિઝનું 1716માં નિધન થયું ત્યારે તેમના શબની અંતિમક્રિયા વખતે રાજવી કુટુંબનું કોઈ ન હતું.

લાઇબ્નિઝે જિંદગીભર લગ્ન કરેલાં ન હતાં. જિંદગીમાં કોઈ કોઈ વખત લાઇબ્નિઝ પૈસાની ફરિયાદ કરતા, પણ આખરે તેમની બચત તેમની બહેનના સાવકા પુત્ર (step-son) માટે મૂકી ગયેલા, તે જોતાં એવું લાગે છે કે બ્રુન્સવિકના રાજવીઓએ લાઇબ્નિઝને સારું વેતન આપેલું.

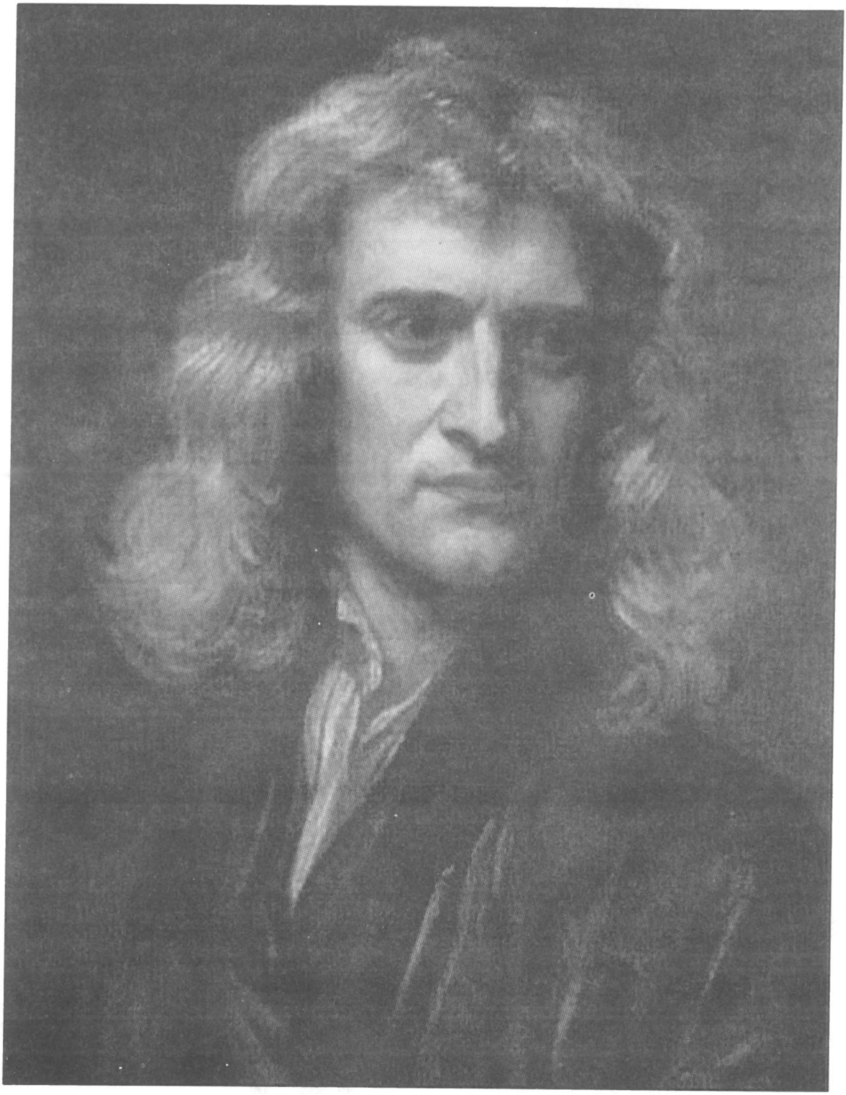
કલનગણિતના બે મહાન શોધકો ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝનો ભેદ તેમના અંતમાં દેખાય છે. ન્યૂટન એમનું શોધેલું ફ્લક્સિઑન્સ તેમની સાથે તેમની કબરમાં લઈને ગયા. એકલા, અટૂલા, માનવી પ્રત્યે પ્રેમ ન રાખનારા સર આઇઝેક ન્યૂટન તેમની આસપાસ પ્રકૃતિદત્ત સૂઝવાળા (Talented), શીખવા ઉત્સુક, તેમનું કામ વિશુદ્ધ કરીને આગળ ધપાવનારા અનુયાયીઓનું ટોળું ઊભું કરી ન શક્યા. જ્યારે આથી વિરુદ્ધ લાઇબ્નિઝના સ્વિટ્ઝરલૅન્ડના બે ઉત્સાહી અનુયાયીઓ જેકોબ I અને જ્હૉન I બર્નૂલિ કલનગણિતનો યુરોપમાં ફેલાવો કરનારા અને ટેકેદારો હતા. તેમના પ્રયત્નોએ અને કદાચ લાઇબ્નિઝના પ્રયત્નોના કારણે આપણે જે હાલમાં કલનગણિત જોઈએ તે છે.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે.

(1) Classics of Mathematics, Ronald Clinger (Prentice Hall, Englwood cliffs, New Jersey 07632, 1995)

(2) The Calculus Gallery, William Dunham (Princeton University, Princeton and Oxford, 2005)

◆



સર આઇઝેક ન્યૂટન (Sir Isaac Newton)

3. દ્વિપદી પ્રમેય, ફ્લક્સિઓનો અને ફ્લુઅન્ટો

"Errors are not in the art but in the artificers."

– Isaac Newton

3.1 ન્યૂટન અને ન્યૂટનનું બાળપણ

કોઈ પણ ગણિતશાસ્ત્રીને પૂછવામાં આવે કે ગણિતશાસ્ત્રના ઇતિહાસમાં પહેલા પાંચ અસરકારક ગણિતશાસ્ત્રીઓ કોણ કોણ ? જરૂરથી ન્યૂટનનું નામ પહેલા પાંચમાં હશે જ. આ જ પ્રમાણે કોઈ પણ ભૌતિકશાસ્ત્રીને પૂછવામાં આવે કે ભૌતિકશાસ્ત્રના ઇતિહાસમાં પહેલા પાંચ ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ કોણ કોણ? એમાં પણ પહેલા પાંચમાં ન્યૂટનનું નામ હશે જ. ન્યૂટનના જમાનામાં ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રના પ્રશ્નો સરખા જ હતા. તે જમાનામાં ખગોળશાસ્ત્ર (Astronomy), યંત્રશાસ્ત્ર(Mechanics), દૃષ્ટિ અને પ્રકાશનું શાસ્ત્ર(Optics) ગણિતની જ શાખાઓ ગણાતી. છતાંયે બંને ક્ષેત્રોમાં આગળ પડતા ગણાવવું તે અસામાન્ય છે. શેક્સ્પીઅર (Shakespeare) નાટ્યકાર અને શિલ્પી હતા. છતાંયે ન્યૂટનની જોડે સરખામણી ન થઈ શકે.

આઇઝેકની જિંદગીની શરૂઆત જ રામભરોસે થયેલી. તેઓ વુલ્સથોર્પ (Woolsthorpe) (ઇંગ્લૅન્ડ)માં ઈ.સ. 1642માં નિયત સમય કરતાં વહેલા જન્મેલા. એ જમાનામાં જીવવાની ઘણી ઓછી શક્યતા હતી. આ ઉપરાંત જન્મના થોડાક મહિના પહેલાં જ તેમના પિતાનું નિધન થયેલું. તેમના પિતાનું નામ પણ આઇઝેક ન્યૂટન હતું. આઇઝેકની ખરી કરુણતા તો તે ત્રણ વર્ષના હતા ત્યારે તેમની વિધવા બા હેન્નાહ એસક્ફે (Hannah Ayscough) ફરીથી લગ્ન કર્યાં, અને આઇઝેકને તેમની દાદીને ત્યાં મૂકીને તેમના નવા પતિ બેર્નેબેસ સ્મિથની(Barnabas Smith) સાથે રહેવા ગયાં. તેમના નવા પતિને ત્રણ વર્ષના બાળકને રાખવામાં કોઈ રસ ન હતો. આઇઝેકનાં બા હેન્નાહ એસક્ફના ભાઈ વિલિયમ એસક્ફ કેમ્બ્રિજમાં ભણેલા અને તેમના નજીકના ગામમાં પાદરી હતા.

જ્યારે આઇઝેક ઉંમરલાયક થયા ત્યારે તેમના ગામની નિશાળમાં ભણવા જતા અને આ શાળામાં બાઇબલ શીખ્યા અને ગણિતના ઘડિયા શીખ્યા. આ શાળામાં આપણી શાળાઓની જેમ ઘડિયા બોલાવતા.

જ્યારે આઇઝેક દશ વર્ષના થયા ત્યારે તેમનાં સાવકા બાપા બેર્નેબેસ સ્મિથનું નિધન થયું અને તેમનાં બા વુલ્સથોર્પ તેમનાં ત્રણ બાળકો સાથે રહેવા આવ્યાં. આઇઝેકનું ગામમાં ભણવાનું પૂરું થયેલું હોઈને તેમને વુલ્સથોર્પથી આશરે સોળ કિલોમીટર દૂર ગ્રેન્થેમમાં (Grantham) ભણવા મૂક્યા. કિન્ગ્સ સ્કૂલ(Kings School)માં પણ એક જ રૂમ હતી

અને તેમના શિક્ષક હેન્રી સ્ટોક્સ(Henry Stokes) 80 વિદ્યાર્થીઓને ગ્રીક, હીબ્રુ અને લેટિન ભણાવતા. અંકગણિત અને ખેડૂતોને ઉપયોગી ક્ષેત્રફળ, સર્વેક્ષણ શીખવતા. અહીંયાં બનેલા એક પ્રસંગે તેમની જિંદગી બદલી કાઢી. દરેક જગ્યાએ કોઈ કોઈ વખત વર્ગમાં એક વિદ્યાર્થી દરેકને દબડાવતો હોય છે, દાદાગીરી કરતો હોય છે. આવા વિદ્યાર્થીએ આઇઝેકને લાત મારી. આઇઝેકે તેને લડવાનું આહ્વાન આપ્યું અને શારીરિક નબળા બાંધાના આઇઝેકે ફક્ત મનોબળથી તેને હરાવ્યો. આ દાદાગીરી કરનાર વિદ્યાર્થી ભણવામાં હોશિયાર હતો અને વર્ગમાં પ્રથમ નંબર રહેતો. આઇઝેકે આને ભણવામાં પણ હરાવવા ખૂબ જ મહેનત કરી અને વર્ગમાં પ્રથમ નંબર આવ્યા. જ્યારે આઇઝેક 16 વર્ષના થયા ત્યારે તેમનાં બાએ આઇઝેકને ખેતી કરવા માટે ઘેર પાછા બોલાવ્યા.

આઇઝેકને શું કરવું છે તેની બહુ ખબર ન હતી, પણ તેમને હળ તો હાંકવું જ ન હતું. ઘેટાં તો ચારવાં જ ન હતાં. આથી ઘેર આ સિવાયનું બીજું બધું કામ કર્યા કરતા. આખરે તેમના મામા વિલિયમ અને તેમના જૂના શિક્ષક હેન્રી સ્ટોક્સ વચ્ચે પડ્યા અને તેમના મામા કેમ્બ્રિજમાં ભણેલા હોઈને આઇઝેકને કેમ્બ્રિજમાં ભણવા માટે મૂકવામાં આવ્યા. એ સમયે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીએ વિદ્યાર્થીઓને ત્રણ વિભાગમાં વહેંચેલા. (1) ઉમરાવનાં સંતાનો. જે સુંદર અને મોંઘા પોષાકો પહેરતા અને સારામાં સારું ભોજન જમતા. ડિગ્રી માટે તેમને બહુ જ ઓછી પરીક્ષાઓ લેવી પડતી. (2) સામાન્ય રીતે ટ્યૂશન, રહેવાનું અને જમવાનું ખર્ચ આપનારા જે અભ્યાસ પૂરો થતાં બ્રિટનનાં ચર્ચોમાં પાદરીઓ તરીકે જોડાતા. (3) બધા વિદ્યાર્થીઓની જરૂરિયાતો પૂરી પાડનારા અને ભણનારા વિદ્યાર્થીઓ જેઓ 'સિઝાર-Sizar' તરીકે ઓળખાતા. હન્નાહ સ્મિથ તે સમયના ધોરણ પ્રમાણે પૈસાવાળા ગણાય, પણ તેમણે ન્યૂટનને ઓછામાં ઓછો આર્થિક ટેકો કર્યો, આથી ન્યૂટન 'સબસિઝાર'(Subsizer) વિદ્યાર્થી તરીકે જૂન 1661માં જોડાયેલા.

1661માં કેમ્બ્રિજને લગભગ 400 વર્ષ પૂરાં થયેલાં. જૂની અને જાણીતી ખરી, પરંતુ એ સમયે પૂરિટન(Puritan, ધર્માચરણ અને નીતિની બાબતમાં અતિ કડક) અને રાજાના ટેકેદારો વચ્ચે મોટો ઝઘડો હતો. પૂરિટનો રાજાશાહી નાબૂદ કરવાના મતના હતા, પણ સફળ ન થતા, 1660માં ફરીથી ઇંગ્લૅન્ડમાં રાજાશાહી પાછી આવી. પૂરિટનનું કેન્દ્ર કેમ્બ્રિજ અને રાજાશાહીના ટેકેદારોનું કેન્દ્ર ઑક્સફર્ડ હતું. માનવું અઘરું છે પણ તે સમયે અધ્યાપકો રાજકારણ (Politics) કે ચર્ચના કારણે નિમાતા. ઘણા અધ્યાપકો એવા હતા કે પચાસ વર્ષમાં તેમનો કોઈ વિદ્યાર્થી જ ન હોય, કોઈ દિવસ ભણાવ્યું પણ ન હોય. અરે! કેમ્બ્રિજ કે કેમ્બ્રિજની આસપાસ રહેતા પણ ન હોય. આના કારણે વિદ્યાર્થીઓ પણ એવા જ!! દારૂડિયા. આઇઝેક જુદા પ્રકારના વિદ્યાર્થી હતા. ખાઉધરા જેમ ખા ખા કર્યા કરે, ન્યૂટન નવું નવું વાંચ્યા કરતા. વાંચવામાં અને વિચારવામાં ખાવાપીવાનું પણ ભૂલી જતા. આવામાં ડાયરી પણ રાખતા અને પાપોની નોંધ પણ રાખતા. આ પાપોમાં પર્યાપ્ત વખત પ્રાર્થના ન કરવા, ચર્ચની પ્રાર્થનાની સભામાં બરાબર ધ્યાન ન રાખવા માટે, અપવિત્ર વિચારો કરવા માટે વગેરે.

જ્યારે વાંચતા, લખતા કે પાપો ન કરતા હોય ત્યારે પ્રકાશ, રંગો, દૃષ્ટિ વગેરેના પ્રયોગો કરતા હોય. એક વખત સૂર્યને આંખો પહોળી કરીને એકીટસે લાંબો વખત જોયા કર્યો. તેજના ઝબકારાથી દૃષ્ટિ ઉપર થયેલી અસરની નોંધ કરી. આંખે સરખું થવા માટે તેમને અંધારામાં રહેવું પડેલું. આંખના ડોળાના આકારની દૃષ્ટિ ઉપર કેટલી અસર છે તે જાણવા માટે તેમણે તેમના આંખના ડોળા ઉપર કઠોર અખતરો કરેલો.

કેમ(Cam) નદીના કિનારે આવેલું કેમ્બ્રિજ, લંડનથી લગભગ 90 કિલોમીટર દૂર છે અને તે સમયે કેમ્બ્રિજની વસ્તી લંડનથી સોમા ભાગની વસ્તી હતી. દર વર્ષે પાક લેવાની અને પાક વાવવાની સિઝનના વચ્ચેના સમયમાં ઇંગ્લૅન્ડનો મોટામાં મોટો મેળો ત્યાં ભરાતો જે સ્ટાઉરબ્રીજ(Stourbridge)ના મેળા તરીકે ઓળખાતો. ઊન, ધાતુનાં અને કાચનાં વાસણો, સંગીતનાં સાધનો, પુસ્તકો, રમકડાં વગેરે આ મેળામાં વેચાતાં. આઇઝેક પૈસાની બાબતમાં ખૂબ જ કાળજી રાખનારા હોઈને, 1663માં આ મેળામાંથી જ્યોતિષશાસ્ત્રનું પુસ્તક ખરીદ્યું. સાથેસાથે ત્રિપાર્શ્વ કાચ પણ ખરીદી લાવેલા. આ પુસ્તકની આકૃતિઓ સમજવા માટે ભૂમિતિ જાણવી જરૂરી લાગેલી. કેમ્બ્રિજની ઘણી બધી તકલીફોમાં એક સુખ હતું. તેનું પુસ્તકાલય તે સમયે પણ અદ્ભુત હતું. ભૂમિતિનું પુસ્તક 'યુક્લિડ'સ એલિમેન્ટ્સ(Euclid's Elements)' વાંચ્યું અને પહેલી જ વખતે વાંચતાં સ્વયંસિદ્ધ પુરાણું પુસ્તક ઉપરચોટિયું લાગેલું(ઉંમરલાયક ન્યૂટને આ અભિપ્રાય બદલેલો). ડેકાર્ટ(Descartes)ની ભૂમિતિ કોઈનીયે મદદ વગર જાતે ઘણા પ્રયત્ને પચાવી શકેલા. વાંચવાનું શરૂ કરે, સમજ પડે ત્યાં સુધી જતા, એ સમજ ન પડે એટલેથી પાછા ફરે. ફરીથી પહેલા પાનાથી શરૂ કરે અને ધીરેધીરે આગળ વધે. ન્યૂટન જ્યારે બીજા વર્ષમાં હતા ત્યારે પૂંછડિયો તારો આકાશમાં દેખાયો. ન્યૂટન રાતોની રાતો પૂંછડિયા તારાના રસ્તાનો અને તેનો અભ્યાસ કરતા. જ્યારે સવારના દેખાતો બંધ થાય ત્યારે જ રૂમ ઉપર આવતા. ઊંઘ્યા જ ન હોય તેવું બનતું. આ પૂંછડિયા તારાથી લોકો ડરતા અને કંઈક ખરાબ થશે તેનો ડર રાખતા. કમનસીબે થોડાક વખતમાં લંડનમાં પ્લેગનો રોગ ચાલુ થયો. શરૂઆતમાં દર અઠવાડિયે સો માણસોનું નિધન થતું, પછી દર અઠવાડિયે હજારો માણસોનું નિધન થતું. લંડનની વસ્તીના છઠ્ઠા ભાગની વસ્તીનું નિધન થયું. કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટી લંડનની નજીક હોઈને બંધ કરેલી અને વિદ્યાર્થીઓને તેમના ઘેર મોકલી દેવાયા.

1664માં કેમ્બ્રિજમાં સૌથી પહેલવહેલા ગણિતના પ્રોફેસર તરીકે આઇઝેક બેરોની (Isaac Barrow) નિમણૂક થઈ. બેરો પણ કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીની ટ્રિનિટી કૉલેજના વિદ્યાર્થી હતા. તેમણે ન્યૂટનની એલિમેન્ટ્સ ઑફ યુક્લિડની પરીક્ષા લીધેલી. 1664માં ન્યૂટનને ટ્રિનિટી કૉલેજના સ્કૉલર બનાવ્યા. માસ્ટરની ડિગ્રી સુધી ચાર વર્ષ આર્થિક ટેકો મળ્યો. આ બઢતીથી ન્યૂટનને જેમાં રસ હોય તેમાં આગળ વધવાની તક મળી. વિશાળ વાચનના કારણે, કોઈ પણ કલ્પના ન કરી શકે તેવું નક્કર કામ બે વર્ષમાં ફક્ત 23 વર્ષના વિદ્યાર્થીએ કર્યું. 1665ની શરૂઆતમાં કોઈ પણ ઘાત માટે વપરાય તેવું 'વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય (Generalized Binomial

Theorem)' મેળવ્યું. આ પછી તુરત જ એ જ વર્ષમાં જે વિકલન કલનગણિત (Differential Calculus) તરીકે ઓળખાય છે તેના લગતાં પરિણામો તેમણે મેળવ્યાં. ન્યૂટન તેને 'ફ્લક્સિઓનોની રીત (Method of Fluxions)' તરીકે ઓળખતા. જ્યારે લાઇબ્નિઝે (Leibniz) તેના માટે કેલક્યુલસ(Calculus) શબ્દ વાપરેલો અને આપણે હાલમાં પણ તેને 'કેલક્યુલસ' જ કહીએ છીએ. 1666માં જે સંકલન કલનગણિત (Integral Calculus) તરીકે ઓળખાય છે તેને લગતાં પરિણામો ન્યૂટને મેળવ્યાં. ન્યૂટન તેને 'Inverse Method of Fluxions' તરીકે ઓળખતા. આપણા માધ્યમિક શાળાના વિદ્યાર્થીઓ જે હાલમાં અગિયાર અને બારમા ધોરણમાં કલનશાસ્ત્ર ભણે છે તેના શોધનારા ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝ હતા. 1664-66ના વર્ષોમાં પ્લેગના રોગચાળાના કારણે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટી બંધ હોઈને ન્યૂટને આ કામ તેમના વતન વૂલ્સથોર્પ અને કેમ્બ્રિજમાં કરેલું. આ બે પ્લૅગનાં વર્ષો ન્યૂટન અને વિજ્ઞાન માટે અદ્ભુત વર્ષો હતાં. સહેલાઈથી આપણા ધ્યાન બહાર જતું રહે, પણ ન્યૂટને આ શોધો કેમ્બ્રિજના નનામા(anonymous) વિદ્યાર્થી તરીકે કરી હતી.

ગણિતનો ઇતિહાસ જોતાં નવા વિચારો નવી નવી જગ્યાએથી મળ્યા છે, પાયથાગોરીઅન એકેડમી ક્રોટોનથી, પ્લેટોની એથેન્સિઅન અકેડેમીથી, એલેક્ઝાન્ડ્રીયાથી, બગદાદથી, કેરાલાના ઇરિન્જાલકુડાથી, કૉર્ડાનો અને ફેરારિ ઇટાલીમાંથી અને ન્યૂટનની ટ્રિનિટી કૉલેજની ન્યૂટનની રૂમમાંથી. દુનિયાનું ગણિતનું કેન્દ્ર ન્યૂટન જ્યાં હતા ત્યાં જતું રહ્યું.

3.2 ન્યૂટનનું દ્વિપદી પ્રમેય (Newton's Binomial Theorem)

ખરેખર આ પ્રમેય નથી, કારણ કે ન્યૂટને તેની સાબિતી આપી નથી. ન્યૂટનની સમજ(Insight) અને અન્તદૃષ્ટિ(Intution)થી મેળવેલું અદ્ભુત સૂત્ર છે.

દ્વિપદી પ્રમેય $(a + b)^n$ ના વિસ્તારનું સૂત્ર છે. આપણે શાળામાં નીચેનાં સૂત્રો ગુણાકારથી મેળવીએ છીએ.

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ગુણાકાર કરીને $(a + b)^n$ ની કિંમતો મેળવી શકીએ, પણ સરળ રસ્તો પાસ્કલના ત્રિકોણનો છે. પાસ્કલ ત્રિકોણની બે બાજુઓમાં 1 જ છે. સૌથી પહેલી હારમાં 1 જ છે. બીજી હારમાં બે 1 છે અને એ રીતે લખેલા છે કે જેથી પહેલી હારનો 1 બીજી હારના બંને 1ની વચ્ચે રહે. ત્રીજી હારમાં ત્રણ રકમો છે અને પહેલી અને છેલ્લી રકમ 1 છે. વચ્ચેની રકમ ઉપરની હારની

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

પાસ્કલનો ત્રિકોણ

ડાબી બાજુની (1) અને જમણી બાજુની (1) રકમોનો સરવાળો જે 2 થાય તે છે. ચોથી હારમાં પહેલી અને છેલ્લી રકમો 1 છે. વચ્ચેની બે રકમો 3 અને 3 ઉપરની હારની આજુબાજુની રકમો 1 અને 2નો સરવાળો 3 અને એ જ રીતે આજુબાજુની રકમો 2 અને 1નો સરવાળો 3 છે. આ જ રીતે બાકીની જેટલી જરૂરી હોય તેટલી હારમાળાઓ લખી શકાય. ધારો કે આપણે $(a + b)^7$ ની કિંમત મેળવવી છે. પાસ્કલ ત્રિકોણની આઠમી હારમાળા ઉપરથી ગુણકો લખી શકાય. જેમ કે,

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^4b^3 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$ થાય.

પાસ્કલના ત્રિકોણની આઠમી હારની રકમો આપણા $(a + b)^7$ ના વિસ્તરણના ગુણકો છે.

અત્યાર સુધી $(a + b)^n$ માં n પૂર્ણાંક છે, પણ જો n ઘનપૂર્ણાંક કે અપૂર્ણાંક હોય તો શું ? જેમ કે $(a + b)^{-2}$ કે $(a + b)^{1/3}$ નું વિસ્તરણ કઈ રીતે થાય ? ન્યૂટને લાઇબ્નિઝને 1676માં લખેલા પત્રમાં નીચેનું સમીકરણ લખેલું :

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots$$

જ્યાં A, B, C, D આગળની રકમો છે. આની ન્યૂટને કોઈ સાબિતી આપી નથી. તે સમયે ટેઇલર શ્રેઢી (Taylor Series) કે એના જેવું કંઈ શોધાયેલું ન હતું. આ હૈયાસૂઝ એમ ને એમ ન આવે. ઘણાં બધાં વિસ્તરણો કરીને અને ઊંડા વિચારો કરીને

જ મળે. આપણા જાણીતા સ્વરૂપમાં આ સૂત્ર નથી, પણ A, B, C, D,... વગેરેની કિંમતો મૂકતાં સરળતાથી જાણીતું સૂત્ર મળે.

$$A = P^{m/n}$$

$$B = \frac{m}{n} AQ = \frac{m}{n} P^{m/n}Q$$

$$C = \frac{m-n}{2n} BQ = \frac{m}{n}\frac{(m-n)}{2n} P^{m/n} Q^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right) P^{m/n} Q^2$$

$$D = \frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2\times 3} P^{m/n} Q^3 \text{ વગેરે.}$$

આ કિંમતો સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} (1 + Q)^{m/n}$$

$$= P^{m/n} \left\{1 + \frac{m}{n}Q + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2} Q^2 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2\times 3} Q^3 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{2\times 3\times 4} Q^4 + \ldots\right\}$$

$P^{m/n}$ વડે બન્ને બાજુએ ભાગતાં, આપણને

$$(1 + Q)^{m/n} = 1 + \frac{m}{n}Q + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2} Q^2 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2\times 3} Q^3 + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{2\times 3\times 4} Q^3 + \ldots$$

મળે જે આપણા જાણીતા સ્વરૂપમાં છે. આનો ઉપયોગ કરીને આપણે $(1 + X)^3$ નું વિસ્તરણ કરીએ. $\frac{m}{n} = \frac{3}{1}$ છે. આથી,

$$(1 + X)^{3/1} = 1 + \frac{3}{1}X + \frac{\frac{3}{1}\left(\frac{3}{1}-1\right)}{2} X^2 + \frac{\frac{3}{1}\left(\frac{3}{1}-1\right)\left(\frac{3}{1}-2\right)}{2\times 3} X^3 + \frac{\frac{3}{1}\left(\frac{3}{1}-1\right)\left(\frac{3}{1}-2\right)\left(\frac{3}{1}-3\right)}{2\times 3\times 4} X^3 + \ldots$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + \frac{0}{2\times3\times4}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$(1 + X)^{-2}$ નું વિસ્તરણ કરીએ. $\frac{m}{n} = -\frac{2}{1}$ છે. આથી,

$$(1+x)^{-\frac{2}{1}} = 1 + \left(-\frac{2}{1}\right)x + \frac{\left(-\frac{2}{1}\right)\left(-\frac{2}{1}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{2}{1}\right)\left(-\frac{2}{1}-1\right)\left(-\frac{2}{1}-2\right)}{2\times3}x^3$$

$$= 1 - 2x + \frac{2\times3}{2}x^2 - \frac{2\times3\times4}{2\times3}x^3\ldots$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

$$\therefore \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$$

$$\therefore \quad 1 = (1 + 2x + x^2)(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4\ldots)$$

$$= 1 + (2x - 2x) + (x^2 - 4x^2 + 3x^2) + (-4x^3 + 6x^3 - 2x^3) + \ldots$$

$$= 1$$

આથી, $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$

$(1 + x)^{1/2}$ નું વિસ્તરણ કરીએ. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ છે. આથી,

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2\times3}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8\times2}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

$$\therefore \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5\ldots$$

બંને બાજુએ વર્ગ લઈને સાબિત કરી શકાય કે

$$\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 ...\right)^2 = 1 + x \text{ થાય.}$$

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા $\frac{m}{n}$ માટેની સાબિતી ઑઇલરે(Euler) આપેલી જ્યારે સંકર સંખ્યા $\frac{m}{n}$ માટેની સાબિતી આબેલે(Abel) આપેલી.

3.3 ફ્લક્સિઓનો અને ફ્લુઅન્ટો(Fluxions and Fluents)

ઉત્કટ સર્જનાત્મક શક્તિ અને સમયનો ઉપયોગ કરીને ન્યૂટને તેમનું ફ્લક્સિઓન કેલ્યુલસ વિકસાવ્યું. ન્યૂટનનું ફ્લક્સિઑન આપણું વિકલનફળ(Derivative) છે. એ તે પણ સમયની સાથે તેમના dot notation માં $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ છે. લક્ષ્યનો વિચાર જે રીતે હાલમાં સમજીએ છીએ તે રીતે તે સમયે સ્પષ્ટ ન હતો. કલનગણિતના પાયાનું કામ કુશી (Cauchy) અને વાયરસ્ટ્રાસે(Weirstrauss) ન્યૂટનના કામ પછીની એક સદીમાં કર્યું.

ન્યૂટન આપણા ચલ(Veriable)ને વહેતી માત્રા એટલે કે ફ્લુઅન્ટ(Fluent) કહેતા. આ ફ્લુઅન્ટના તાત્ક્ષણિક ફેરફારના દરને(Instantanuous rate of change) ન્યૂટન ફ્લક્સિઓનથી ઓળખતા.

ન્યૂટને કેવું કામ કર્યું તેનો ખ્યાલ આવે તે માટે ન્યૂટનના લેટીનમાં લખેલા પુસ્તક ઓપ્ટીક્સ(Optics)ના પરિશિષ્ટ અને 'The Tractatus de quadratura Curvarum (1704)'ના થોડાક ભાગોનું ગુજરાતી ભાષાંતર નીચે પ્રમાણે છે.

(નોંધ : ન્યૂટને ચલને વહેતી માત્રા ગણી અને વહેતી માત્રાને ફ્લોઇંગ કહેતા અને ફ્લોઇંગ ઉપરથી તેમાં થતા તાત્ક્ષણિક ફેરફારના દરને માટે ફ્લક્સિઑન શબ્દ વાપર્યો. વિધેય શબ્દ તે સમયે જાણીતો ન હતો, લાઇબ્નિઝે તે સમયે 1694માં પહેલી વખતે વાપર્યો.)

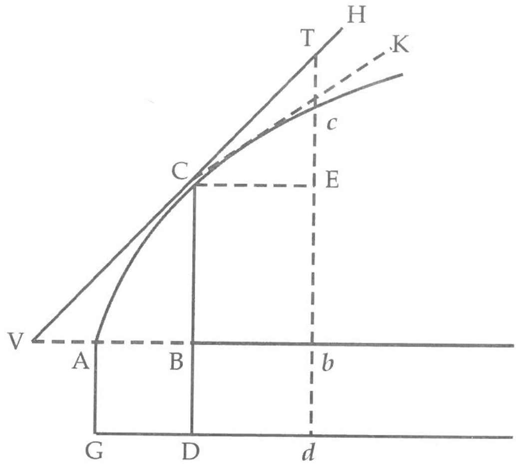
(1) આ જગ્યાએ હું ગણિતની માત્રાઓ(quantities)ને નાના નાના ભાગોથી બનેલી ગણવાને બદલે સતત ગતિથી વર્ણવું છું. રેખાઓને પાસ પાસેના ભાગોને બંધ બેસાડીને જોવાને બદલે સતત ગતિથી જોઈશું. રેખાઓની સતત ગતિથી સપાટી (પૃષ્ઠ) અને પૃષ્ઠની સતત ગતિથી ઘન; ખૂણાઓ બાજુઓને ગોળ ફેરવવાથી; સમયનો ભાગ સતત પ્રવાહથી; અને આ જ રીતે બીજી માત્રાઓ. વસ્તુઓની સહજતામાં ખરેખર આનાં મૂળ સમાયેલાં છે,

અને પદાર્થોની ગતિમાં દરરોજ જોઈ શકાય છે. પ્રાચીન કાળના લોકોએ બે સ્થિર સુરેખાઓ ઉપર બે નેવું અંશના ખૂણા બનાવતી ફરતી સુરેખાઓ ઉપરથી લંબચોરસની ઉત્પત્તિ જોયેલી.

(2) આથી, જે સરખા સમયમાં વધતી હોય અને નિર્માણ થયેલો વધારો, વધારે કે ઓછા વેગથી નિર્માણ થયો હોય તેવી માત્રાઓ ધ્યાન ઉપર લઈશું. હું નિર્માણ થયેલા વધારાને નક્કી કરવાની રીત ગતિના વેગથી કે વધારાથી શોધું છું અને આ ગતિના વેગોને કે વધારાઓને ફ્લક્સિઓનો (Fluxions) અને નિર્માણ થયેલી માત્રાઓને ફ્લુઅન્ટ્સ(Fluents)થી ઓળખીશું.

(3) ફ્લક્સિઓનો સરખા પણ ખૂબ જ નાના સમયના કણોમાં ફ્લુએન્ટોનો વધારો છે અને સ્પષ્ટ રીતે કહેતાં તે પ્રારંભિક વધારાનો પહેલો ગુણોત્તર છે; પણ સ્પષ્ટ રીતે કોઈ પણ રેખા જે તેમના પ્રમાણમાં હોય તેનાથી દર્શાવી શકાય.

(4) આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણેના ક્ષેત્રફળો ABC, ABDG પાયા AB ઉપર એક ધારી ગતિથી ફરતા યામો BC, BDથી વર્ણવી શકાય. આ ક્ષેત્રફળોના ફ્લક્સિઓનો ગુણોત્તર વર્ણન કરતા યામો BC અને BDના ગુણોત્તર બરાબર છે અને સ્પષ્ટ છે કે યામો પ્રારંભિક દશાના ક્ષેત્રફળોનો વધારો બતાવે છે.



આકૃતિ 1

(5) યામ BC તેની જગ્યાએથી આગળ વધીને નવી જગ્યા bc એ આવે છે. ચતુષ્કોણ BCEb દોરો અને વક્રરેખાને C એ અડકતી (સ્પર્શરેખા) સુરેખા VTH દોરો અને સુરેખા bc સુરેખા VCHને Tમાં મળે છે અને સુરેખા BAને લંબાવતાં સ્પર્શકને Vમાં મળે છે; અને Bb, Ec અને Cc ભૂજ AB, યામ BC અને વક્રરેખા AC માં થયેલો વધારો છે; અને CET ની બાજુઓ પ્રારંભિક વધારાનો પહેલો ગુણોત્તર હોઈને AB, BC અને ACના ફ્લક્સિઓનો CET ની બાજુઓ CE, ET અને CT છે અને આ VBC, જે CET ને સમરૂપ છે, ની બાજુઓથી પણ દર્શાવી શકાય.

(6) ફ્લક્સિઓન એ અલોપ થઈ જતા ભાગોનો આખરે ગુણોત્તર છે એ બધાનો આશય છે. સુરેખા Cc ને K સુધી લંબાવો. ધારો કે યામ bc તેની મૂળ જગ્યા BC એ આવે અને જ્યારે C અને c જોડાઈ જાય ત્યારે Ck સ્પર્શક CHને મળી જાય અને અલોપ થતો ΔCEc, ΔCET ને સમરૂપ થાય અને તેમની અલોપ થતી બાજુઓ CE, Ec અને Cc આખરે ΔCET ની બાજુઓ CE, ET અને CT બનશે અને આથી રેખાઓ AB, BC અને AC ના ફ્લક્સિઓનો સરખા ગુણોત્તરમાં છે. જો બિંદુઓ C અને c વચ્ચેનું અંતર નાનું હોય, CK ની જમણી બાજુ સ્પર્શક CH થી થોડીક દૂર હોય. એટલે કે CK ની જમણી બાજુ સ્પર્શક CH ને મળી પણ જાય અને આખરે CE, Ec અને Cc નો ગુણોત્તર મેળવી શકાય, બિંદુઓ C અને c મળી જવાં જોઈએ અને એકાકાર(Coincide) થવાં જોઈએ. ગણિતની બાબતમાં નાનામાં નાની ભૂલ અવગણવી ન જોઈએ.

(11) ધારો કે કોઈ પણ માત્રા(Quantity) x સતત એકધારી રીતે વહે છે અને આપણે x^n નો ફ્લક્સિઓન(જેને આપણે વિકલનથી ઓળખીએ છીએ.) શોધવો છે. આપેલા સમયમાં x વહેતાં $x + 0$ બને છે અને તે જ સમયમાં x^n, $(x + 0)^n$ બનશે; એટલે કે અનંત શ્રેઢીની રીતથી,

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, 00\, x^{n-2} + \text{ વગેરે વગેરે.}$$

અને વધારાઓ

$$0 \text{ અને } n\, 0\, x^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, 00\, x^{n-2} + \text{ વગેરે વગેરે.}$$

જે એકબીજાને

$$1 \text{ અને } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}\, 0\, x^{n-2} + \text{ વગેરે વગેરે.}$$

હવે આ વધારાઓને અદૃશ્ય થવા દઈએ, અને આખરે તેમનો ગુણોત્તર 1 થી nx^{n-1} બનશે.

(13) હવે પછી હું અનિશ્ચિત માત્રાઓ(Indeterminate quantities) જે સતત ગતિના કારણે વધતી હોય કે ઘટતી હોય એટલે આગળ કે પાછળ વહેતી હોય તેમને હું અક્ષરો z, y, x, v થી પ્રયોજુ અને તેમના ફ્લેક્સિઓનોને ટપકા સાથેના તે જ અક્ષરો $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$ થી હું દર્શાવું છું. આ ફ્લક્સિઓનોના વધારે કે ઓછા ઝડપી

ફ્લેક્સિઓનો હશે જેને z, y, x, v ના બીજા ફ્લક્સિઓનો કહેવાય અને જેની ભાત $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$ છે. છેલ્લાના ફ્લક્સિઓનો કે z, y, x, v ના ત્રીજા ફ્લક્સિઓને $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ થી દર્શાવીશું. આ જ રીતે ચોથા ફ્લેક્સિઓનો $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$ છે. આ જ રીતે $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$ ના ફ્લેક્સિઓનો $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$ છે અને આ z, y, x, v ના ફ્લેક્સિઓનો છે અને એ છેલ્લે z, y, x, v ના ફ્લેક્સિઓનો છે. આથી, z, y, x, v પણ કોઈ માત્રાઓના ફ્લક્સિઓનો હોવા જોઈએ. જેને હું z', y', x', v' થી દર્શાવું છું અને આ પણ z'', y'', x'', v'' ના ફ્લેક્સિઓનો હોવા જોઈએ અને આ છેલ્લા પણ z''', y''', x''', v''' ના ફ્લેક્સિઓનો છે. આથી, z'', z', z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$,... વગેરે વગેરે એવી શ્રેણી છે કે જેમાં પાછળની રકમ તુરત જ આગળ આવતી રકમની ફ્લેક્સિઓન છે અને દરેક આગળની વહેતી માત્રા(Flowing Quantity) છે જેના પછીની રકમ તેનો ફ્લેક્સિઓન છે. આના જેવી જ શ્રેણી

$$\overset{\prime\prime}{\sqrt{az - zz}}, \quad \overset{\prime}{\sqrt{az - zz}}, \quad \sqrt{az - zz}, \quad \overset{\cdot}{\sqrt{az - zz}}, \quad \overset{\cdot\cdot}{\sqrt{az - zz}} \text{ છે}$$

અને આના જેવી જ શ્રેણી

$$\overset{\prime\prime}{\frac{az + zz}{a - z}}, \quad \overset{\prime}{\frac{az + zz}{a - z}}, \quad \frac{az + zz}{a - z}, \quad \overset{\cdot}{\frac{az + zz}{a - z}}, \quad \overset{\cdot\cdot}{\frac{az + zz}{a - z}} \text{ છે.}$$

(14) આ શ્રેણીમાં ધ્યાન રાખવા જેવું છે કે પાછળની રકમ વક્રીય આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ છે જેમાં આગળની રકમ કોટિ (y - યામ) છે અને ભૂજ (x - યામ) z છે જેમકે કોટિ $\sqrt{az - zz}$ અને ભૂજ z હોય તેવા વક્રના ક્ષેત્રફળ બરાબર $\overset{\prime}{\sqrt{az - zz}}$ છે.

પ્રમેય I : પ્રશ્ન I

(15) કોઈ પણ સંખ્યાની વહેતી માત્રાઓનું સમીકરણ આપેલું છે અને તેનું ફ્લક્સિઓન શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણની દરેક રકમને તેની વહેતી માત્રાના ઘાતાંકથી ગુણો અને દરેક ગુણાકારમાં ઘાતાંકના મૂળને ફ્લક્સિઓનમાં ફેરવો, અને આ બધા ગુણાકારોના યોગ્ય ચિહ્ન સાથેના સમૂહનું નવું સમીકરણ બનશે.

(16) સ્પષ્ટીકરણ : ધારો કે, a, b, c, d વગેરે વગેરે નિશ્ચિત અને ન બદલાતી માત્રાઓ છે અને ધારો કે, z, y, x વગેરે વગેરે વહેતી માત્રાઓ વચ્ચેના સંબંધોનું સમીકરણ $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$ છે. પહેલા x ની રકમોને તેમના ઘાતથી ગુણીએ

અને દરેક ગુણાકારમાં એક પરિમાણના x માટે $\dot{x}$ લખીએ અને એક ઘાત ઓછો કરીને $\dot{x}$ થી ગુણીએ. x ની રકમોનો સરવાળો $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$ થશે. એ જ પ્રમાણે y ની રકમ લઈને એ જ પ્રમાણે કરતાં $-2\,x\,\dot{y}\,y$ મળે. એ જ પ્રમાણે z ને કરતાં $a^2\dot{z}$ મળે. આ બધા જ ગુણાકારોનો સરવાળો કરીને તેના બરાબર શૂન્ય મૂકતાં તમને સમીકરણ $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = 0$ મળશે. હું કહું છું કે આ સમીકરણ ફ્લક્સિઓનો વચ્ચેનો સંબંધ છે.

દાખલાથી સ્પષ્ટ રજૂઆત :

(17) સમજૂતી : 0 ઘણી નાની માત્રા છે અને $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ ક્ષણો (moments) એટલે કે ખાસ સમક્રમિક z, y, x ના વધારા છે. અને જો વહેતી માત્રાઓ હાલ z, y, x હોય, તો ક્ષણમાં તેમનો વધારો $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ હોઈને માત્રાઓ $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, બનશે જે z, y, x ના સમીકરણ $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$માં મૂકતાં,

$$(x + o\dot{x})^3 - (x + o\dot{x})(y + o\dot{y})^2 + a^2(z + o\dot{z}) - b^3 = 0 \text{ થશે.}$$

$$\therefore\quad x^3 + 3x^2(o\dot{x}) + 3x\,(o\dot{x})^2 + (o\dot{x})^3 - xy^2 - 2xy(o\dot{y}) - x(o\dot{y})^2$$
$$- (o\dot{x})\,y^2 - (o\dot{x})\,(2yo\dot{y}) - (o\dot{x})\,(o\dot{y})^2 + a^2z + a^2(o\dot{z}) - b^3 = 0$$

આમાંથી મૂળ સમીકરણ બાદ કરી, 0 વડે બાકી રહેલા સમીકરણને ભાગતાં,

$$3x^2\dot{x} + 3x\,\dot{x}\,(o\dot{x}) + o^2\dot{x}^3 - 2x\dot{y}y - x\dot{y}(o\dot{y})$$
$$- \dot{x}y^2 - \dot{x}\,(2yo\dot{y}) - \dot{x}\,(o\dot{y})^2 + a^2\dot{z} = 0 \text{ રહેશે.}$$

0 અમર્યાદિત રીતે ઘટે, અને જે રકમો લોપ થઈ તેને દૂર કરતાં,

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = 0 \text{ રહેશે.}$$

(18) સંપૂર્ણ સમીકરણ : જો સમીકરણ $x^3 - xy^2 + aa\sqrt{ax - y^2} - b^3 = 0$ હોય, તો એ જ રીતે કરતાં, $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + aa\dot{\sqrt{ax - y^2}} = 0$ થશે.

જ્યાં $\dot{\sqrt{ax - y^2}} = 0$ મેળવવા માટે $\sqrt{ax - y^2} = z$ મૂકો અને તે $ax - y^2 = z^2$ થશે અને પ્રમેયથી આ $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2z\dot{z}$

અથવા $\dfrac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$

એટલે કે $\dfrac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - y^2}}}$

અને આથી,

$$3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2\dot{y}yx + \frac{aa(a\dot{x} - 2\dot{y}y)}{2\sqrt{ax - y^2}} = 0.$$

(19) અને આ ક્રિયાનું પુનરાવર્તન કરીને, તમે બીજા, ત્રીજા અને પછીનાં ફ્લક્સિઓનો મેળવવા આગળ વધો.

ધારો કે, સૂચવેલું સમીકરણ $zy^3 - z^4 + a^4$ છે, અને પહેલી ક્રિયાથી

$\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$ થાય છે. બીજી ક્રિયાથી

$$\ddot{z}y^3 + 3y^2\dot{y}\dot{z} + 3y^2\dot{y}\dot{z} + 3y^2z\ddot{y} - 6y\dot{y}z^2 - 12z^2(\dot{z})^2 - 4z^3\ddot{z} = 0$$

અને ત્રીજી ક્રિયાથી

$$\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3zy^2\dddot{y} + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 4\dddot{z}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}z^2 - 24z(\dot{z})^3 = 0$$

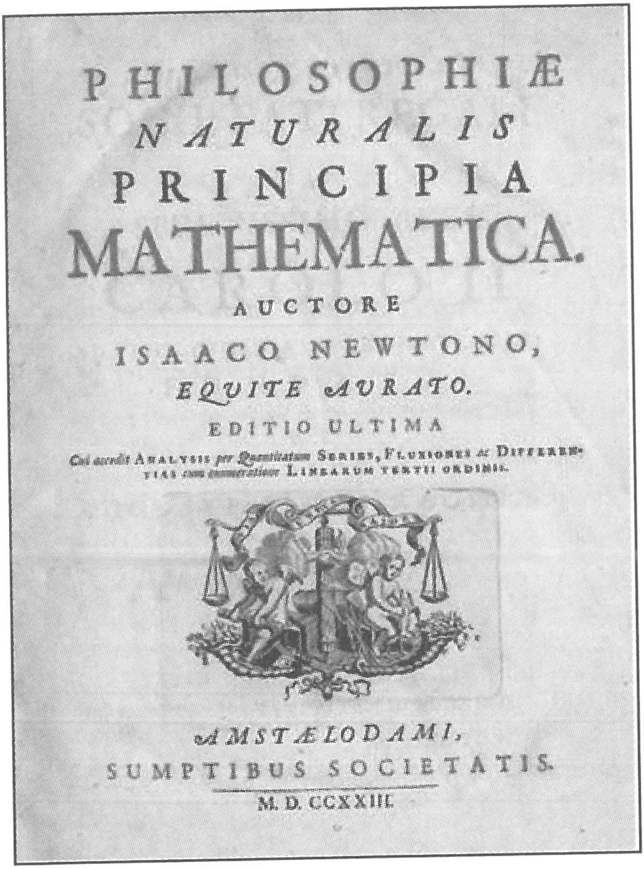
ન્યૂટને દ્વિપદી પ્રમેય અને ફ્લક્સિઓનો શોધીને બીજું કંઈ ન કર્યું હોત તો પણ દુનિયાના મહાન વિજ્ઞાનિકોમાંના એક હોત જ!! ન્યૂટને ભૌતિકશાસ્ત્રને આપેલો અમૂલ્ય ફાળો જાણવાને યોગ્ય હોઈને તેમનું શેષ જીવન પછીના પ્રકરણમાં આપ્યું છે.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયેલું છે :

(1) Calinger, Ronald, Classics of Mathematics. Prentice Hall, 1995

(2) Dunham, William. The Mathematical Universe. New York : John Wiely & Sons, 1994

◆


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO ULTIMA
Cui accedit ANALYSIS per Quantitatum SERIES, FLUXIONES ac DIFFERENTIAS cum enumeratione LINEARUM TERTII ORDINIS.

AMSTÆLODAMI,
SUMPTIBUS SOCIETATIS.
M. D. CCXXIII.

ધ પ્રિન્સિપિયા (The Principia)

આઇઝેક ન્યૂટનના નિરીક્ષણ હેઠળ તૈયાર થયેલ ચલણી સિક્કાઓ
(Coins Minted under Isaac Newton)

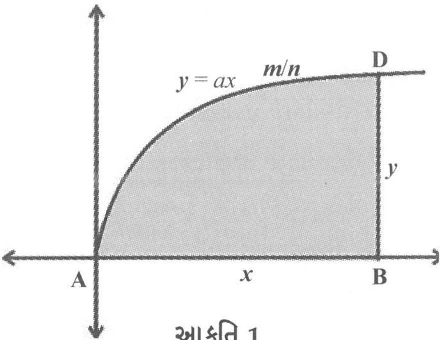
4. સંકલન અને સર આઇઝેક ન્યૂટન (Sir Isaac Newton)

"No great discovery was ever made without a bold guess."

– *Isaac Newton*

4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે પ્રકરણ 3માં સર આઈઝેક ન્યૂટનની જીવનની શરૂઆતનો ભાગ જોયો. તેમણે પ્લેગનાં વર્ષો દરમિયાન શોધેલા વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય અને ફ્લક્સિઓન્સ (વિકલનો) જોયાં. તેમણે તે જ વર્ષો દરમિયાન સંકલનની શોધ કરેલી, પણ સંકલનને બદલે 'ઇન્વર્સ ફ્લક્સિઓન્સ (Inverse Flexions)' તરીકે ઓળખતા.



આકૃતિ 1

ન્યૂટનના પોતાના મિત્રો માટે ઈ. સ. 1669ના લખેલા પુસ્તક 'De Analyst'માં લખેલો 'ઇન્વર્સ ફ્લક્સિઓન્સ'નો પહેલો નિયમ મળે છે. આ પુસ્તક ખૂબ મોડું પ્રસિદ્ધ થયેલું. આના કારણે ન્યૂટનને કલનગણિત શોધવાનો પૂરેપૂરો યશ મળતો નથી.

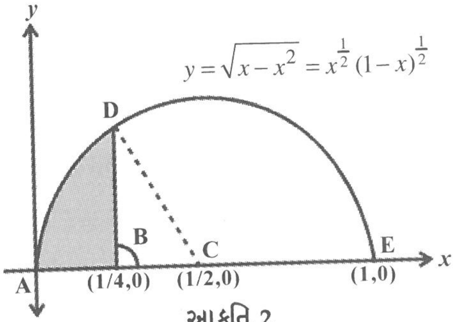
આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે વક્ર AD $y = ax^{m/n}$નો પાયો AB છે અને DB x-અક્ષ ઉપર લંબ છે. AB = x, BD = y કહો. અહીંયાં a અચળ છે અને m અને n પૂર્ણાંકો છે.

નિયમ I : જો $ax^{m/n} = y$ હોય, તો ABDના ક્ષેત્રફળ = $\dfrac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ ન્યૂટનના કહેવા પ્રમાણે છે.

4.2 πની કિંમત

ન્યૂટને યામ ભૂમિતિ(Co-ordinate Geometry) બરાબર પચાવી હોઈને તેમના કામમાં તેનો બરાબર ઉપયોગ કરતા. યામ ભૂમિતિનો ઉપયોગ કરીને તેમણે πની કિંમત મેળવી છે, તે તેમની ગણિતશાસ્ત્રી તરીકેની ઊંડી સમજનો ખ્યાલ આપતી હોઈને,

આપણે જોઈએ. આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે અર્ધવર્તુલનું કેન્દ્ર $(\frac{1}{2},0)$ અને ત્રિજ્યા $\frac{1}{2}$ છે. આ વર્તુળના સમીકરણ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ની ન્યૂટનને ખબર હતી.



આકૃતિ 2

સાદુરૂપ આપતાં $y=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ મળે. વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

$$y=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$=x^{\frac{1}{2}}\{1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{128}x^4\ldots\}$$
$$=x^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\tfrac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}-\ldots.$$

તેમણે ACનું મધ્યબિંદુ B $(\frac{1}{4},0)$ આકૃતિ-2માં બતાવ્યા પ્રમાણે લીધું. બિંદુ Bથી વ્યાસ AEને લંબ BD દોર્યો. તેમણે ADBનું ક્ષેત્રફળ બે રીતે મેળવ્યું.

1. ઇન્વર્સ ફલક્સિઓન્સની રીત

ઇન્વર્સ ફલક્સિઓન્સની રીતે વક્ર $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ અને x-અક્ષ વચ્ચેનું x=o થી x સુધીનું ક્ષેત્રફળ નિયમ I પ્રમાણે

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{128}\cdot\frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}\ldots$$

ABDનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા $x=\frac{1}{4}$ મૂકતાં

ABDના ક્ષેત્રફળ =

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{9}{2}}\text{X}\frac{5}{64\text{x}11}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{11}{2}}\ldots$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{160}-\frac{1}{3584}-\frac{1}{36864}-\frac{5}{1441792}\cdots-\frac{429}{163208757278}$$

(પહેલી નવ રકમો)

$$=0.076\ 773\ 10678$$

2. ભૂમિતિની રીત

ન્યૂટને ભૂમિતિની રીતે ABDનું ક્ષેત્રફળ મેળવ્યું. આ મેળવવા માટે Δ DBCનું ક્ષેત્રફળ મેળવ્યું. BC = $\frac{1}{4}$ અને CD = $\frac{1}{2}$ હોઈને

$BD^2 = CD^2 - BC^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ છે. આથી $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore$ Δ DBCના ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} BD.BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}$ છે.

$$\text{Cos } \angle BCD = \frac{BC}{CD} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$

આ ખૂણો 60° હોઈને, ન્યૂટન જોઈ શકેલા કે

ACDના ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{3}$ અર્ધ વર્તુલ ADEનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{2^2}\right) = \frac{\pi}{24}$$

ABDના ક્ષેત્રફળ = ACDનું ક્ષેત્રફળ - Δ BCDનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = 0.07677310678$$

$\therefore \; \pi \approx 24(0.0767731067\ 8 + \frac{\sqrt{3}}{32}) = 3.141592665$

પ્રમેય : $\pi \approx 3.141592668$

આ અંદાજિત કિંમત માટે આશ્ચર્ય પમાડે તેવી વસ્તુ તો વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેયની પહેલી નવ રકમો લઈ ગણેલી કિંમત છે. આ કિંમત π ની સાચી કિંમતથી 0.00000014 ઓછી છે. આ કિંમત 1671માં લખેલા પુસ્તક "Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum"માંથી લીધેલી છે. આ પુસ્તક 1669માં લખેલા "De Analyst"નું વિસ્તરણ છે. આ પુસ્તકો ઘણાં મોડાં પ્રસિદ્ધ થયેલાં. Methodusમાં ન્યૂટને π ની કિંમત વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેયની પહેલી 20 રકમો લઈને ગણીને π ની કિંમત 16 દશાંશ સુધી આપેલી છે.

4.3 લૂકેસિઅન અધ્યાપક (Lucasian Professor)

ન્યૂટનની પ્રતિષ્ઠા ટ્રિનિટી કૉલેજમાં સુધરી. ઑક્ટોબર, 1667માં ત્રણ વર્ષમાં પહેલી વાર ફેલો પસંદ કર્યા. ફેલોને પગાર મળતો, રહેવા રૂમ મળતી, અકાદમીના સભ્ય ગણાતા અને પુસ્તકાલય વાપરવા મળતું. ચારિત્રની વિશુદ્ધિની આશા રાખવામાં આવતી અને લગ્ન કરવાની મનાઈ હતી. ન્યૂટન ફેલો તરીકે પસંદ થયા. તેમને વર્ષે બે પાઉન્ડનો પગાર મળતો. તેમની માતા તરફથી પણ ટેકો મળતો. 1669માં કેમ્બ્રિજના ગણિતના લૂકેસિઅન અધ્યાપક બેરોએ (Barrow) રાજીનામું આપ્યું અને તેમની જગ્યાએ ન્યૂટનને લૂકેસિઅન અધ્યાપક બનાવવા બેરોએ વિનંતી કરી. આ વિનંતી સ્વીકારવામાં આવી અને ન્યૂટનને 26 વર્ષની વયે લૂકેસિઅન અધ્યાપક બનાવવામાં આવ્યા.

હેન્રી લુકાસ કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થી હતા અને બ્રિટિશ પાર્લામેન્ટના સભ્ય પણ હતા. તે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીના પ્રતિનિધિ હતા. હેન્રી લુકાસે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીને 1663માં આ પ્રોફેસરના પગારની કાયમી આવક કરી આપેલી. ન્યૂટન, ઍરી (Airy), બેબેજ (Babbage), ડિરાક, હૉકિન્સ, ગ્રીન વગેરે લૂકેસિયન પ્રોફેસરો હતા.

લૂકેસિઅન અધ્યાપક તરીકે તેમની ફરજમાં નિયમિત ગણિતના કોઈ પણ વિષય ઉપર નિયમિત ભાષણ આપવાનું હતું. એ વખતે ન્યૂટનને કોઈ ખાસ ઓળખતું ન હતું. તેમનાં ભાષણોમાં ખાસ કોઈ આવતું ન હતું અને આવતું તો તેમાંથી બહુ જ ઓછા તેમનાં ભાષણો સમજી શકતા. આ ભાષણો અડધો કલાક ચાલતાં. જો કોઈ સાંભળનાર ન હોય તો તે પંદર મિનિટ વર્ગમાં રહેતા.

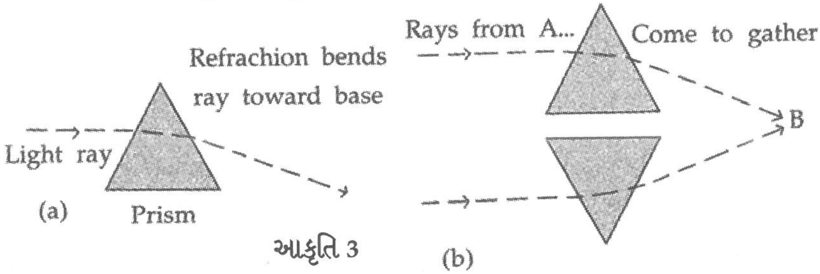
શિક્ષક તરીકે ન્યૂટન ખાસ સફળ ન હતા, પણ તેમનું વૈજ્ઞાનિક તરીકે સંશોધનનું કામ અદ્ભુત હતું. ટ્રિનિટી કૉલેજમાં તેમણે ખાસ મિત્રો બનાવેલા નહિ, એકલા અટૂલા જ રહેતા. ન્યૂટનને ભાગ્યે જ કોઈએ હસતાં જોયા હોય. ન્યૂટન વિશે તેમના ભત્રીજા હમ્ફ્રી ન્યૂટને લખેલું કે,

"તે તેમના અભ્યાસમાં જ રચ્યાપચ્યા રહેતા, ભાગ્યે જ કોઈનેય મળવા ગયા હોય, અને તેમને ખૂબ જ ઓછા મળવા આવ્યા હોય... તેમને કોઈ પણ જાતનું મનોરંજન કરતાં જેવું કે ચાલતાં, બૉલિંગ(Bowling) કરતાં કે કોઈ પણ જાતની કસરત કરતાં મેં જાણ્યું નથી. અભ્યાસમાં સમય ન કાઢ્યો, તે સમય ગયો તેમ માનતા. ભાગ્યે જ જમવા માટે ભોજનખંડમાં જતા... જો જતા, તો નફિકરા જતા, બૂટની દોરીઓ લબડતી હોય અને ભાગ્યે જ માથું હોળેલું હોય."

દૂરબીનની શોધથી પ્રકાશનાં કિરણોના ગુણધર્મોમાં ન્યૂટનને ખૂબ જ રસ હતો. આથી તેઓ ગણિતને બદલે પ્રકાશ અને રંગો ઉપર ભાષણ આપતા. તેમનું શોધેલું દૂરબીન ખગોળશાસ્ત્રમાં ખૂબ જ ઉપયોગી બનેલું હોઈને, આપણે દૂરબીનની બનાવટ જોઈએ.

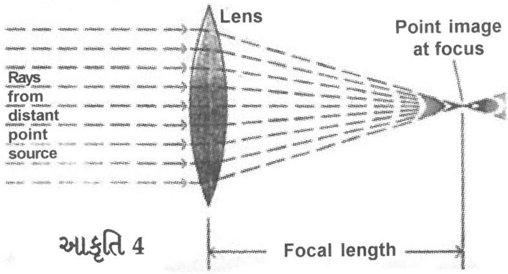
દૂરબીન

પ્રકાશ જ્યાં સુધી એક જ માધ્યમમાં મુસાફરી કરે છે, ત્યાં સુધી સુરેખામાં મુસાફરી કરે છે. બીજા માધ્યમમાં પ્રકાશ દાખલ થાય ત્યારે આકૃતિ 3 (a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાચમાંથી પસાર થતાં દિશા બદલે છે. કાચમાં સુરેખામાં મુસાફરી કરે છે. કાચ બહાર નીકળતાં ફરીથી દિશા બદલીને પ્રકાશ સુરેખામાં મુસાફરી કરે છે. પ્રકાશની એક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં



આકૃતિ 3

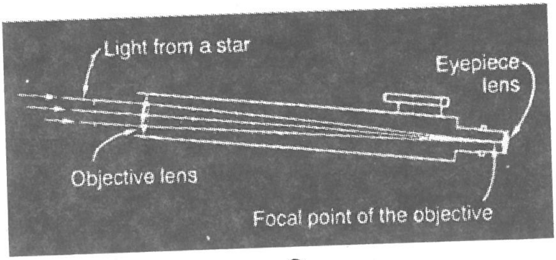
જતાં દિશા બદલવાની પ્રક્રિયાને વક્રીભવન(Refraction) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. બે ત્રિપાર્શ્વ કાચો આકૃતિ 3(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો, જેથી દૂરથી આવતાં પ્રકાશનાં કિરણો એક બિંદુએ મળે. બે જુદી જુદી ઊંચાઈએ અને જુદા જુદા ખૂણે દાખલ થતાં કિરણોને એક જ જગ્યાએ મળવું મુશ્કેલ છે. આકૃતિ 4માં બતાવ્યા પ્રમાણે બંને બાજુએ લીસા અને ગોળ હોય તેવા કાચની જરૂર છે. આવા



આકૃતિ 4

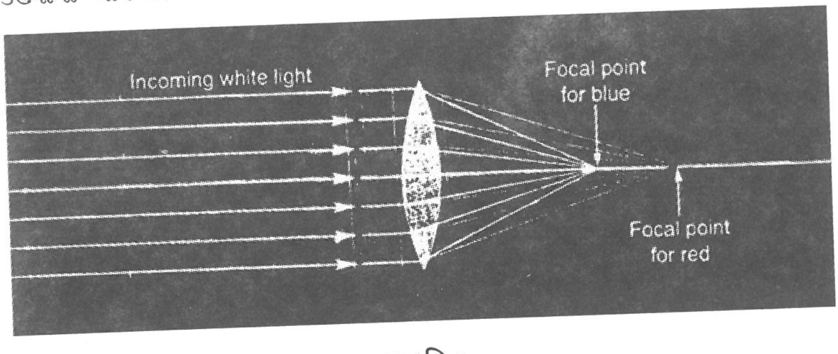
લીસા અને ગોળ કાચને લૅન્સ(Lens) કહીશું. આવા લૅન્સનો ઉપયોગ કરીને આકૃતિ 5માં બતાવ્યા પ્રમાણે દૂરબીન બનાવી શકાય.

મિલનબિંદુએ (Focus) જે પ્રતિકૃતિ (Image) મળે તેને નેત્રકાચ(Eyepiece)થી વિસ્તૃત કરી શકાય છે. આવા દૂરબીનને વક્રીભવનવાળા દૂરબીન(Refracting Telescope)થી



આકૃતિ 5

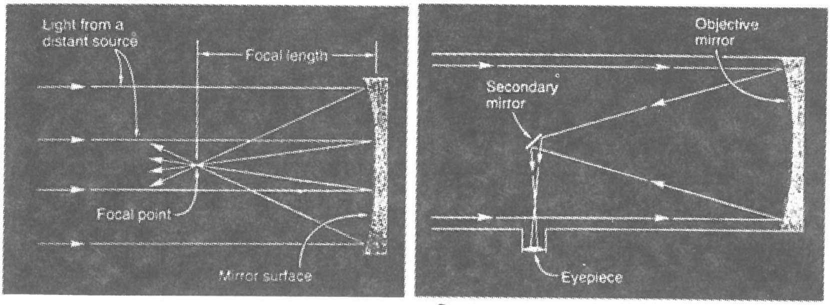
ઓળખવામાં આવે છે. ત્રિપાર્શ્વ કાચ પ્રકાશનું જુદા-જુદા રંગોમાં વિભાજન કરે છે અને દરેક રંગના પ્રકાશની તરંગલંબાઈ જુદી-જુદી હોઈ, વક્રીભવન જુદી-જુદી રીતે થાય છે. ત્રિપાર્શ્વ કાચની જેમ લૅન્સમાંથી પસાર થતા પ્રકાશનું પણ જુદા-જુદા રંગોમાં વિભાજન થાય છે. આથી આકૃતિ 6માં બતાવ્યા પ્રમાણે જુદા-જુદા તરંગલંબાઈવાળા રંગના પ્રકાશનાં જુદાં-જુદાં મિલનબિંદુઓ હોય છે. આકૃતિ 6માં મોટું કરીને આ બતાવ્યું છે. આના કારણે પ્રતિકૃતિ (Image) અસ્પષ્ટ (Fuzzy) હોય છે. આને રંગનું ઉન્માર્ગગમન (Chromatic Aberration) કહેવામાં આવે છે.



આકૃતિ 6

ન્યૂટને બંને બાજુએ લીસો અને ગોળ લૅન્સ લેવાને બદલે આકૃતિ 7(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક બાજુએ લીસો અને ગોળ અરીસો લીધો અને તેના મિલનબિંદુએ આકૃતિ 7(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે નાનું દર્પણ ગોઠવ્યું જે પ્રકાશને વાળીને નેત્રકાચને મોકલે છે. આ ન્યૂટને સૂચવેલું. આવા દૂરબીનને પરાવર્તનવાળા દૂરબીન(Reflecting Telescope) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ન્યૂટને જાતમહેનતથી 1669માં 16 સે.મી. (લગભગ 6 ઇંચ) લાંબું, જાડું અને મજબૂત નળીનું પરાવર્તનવાળું દૂરબીન બનાવ્યું જે ચાલીસગણું પ્રતિકૃતિને વિસ્તૃત કરતું. લંડન અને



(a) આકૃતિ 7 (b)

ઇટાલીમાં આના જેટલું જ વિસ્તૃત કરતાં વક્રીભવનવાળાં દૂરબીનો હતાં જે આનાથી દસગણાં લાંબાં હતાં. આ દૂરબીનનનો ઉપયોગ ન્યૂટને બે વર્ષ કર્યો અને પછી બેરોનને આપ્યું. જેમણે લંડનમાં રૉયલ સોસાયટીના સભ્યોને બતાવ્યું.

Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum અને De Analystના અંગત અહેવાલો અને પરાવર્તનવાળા દૂરબીન માટે ન્યૂટનને પ્રતિષ્ઠા મળી અને આના કારણે ન્યૂટનને 1672માં રૉયલ સોસાયટીના સભ્ય તરીકે ચૂંટવામાં આવ્યા. આ સફળતાના કારણે ન્યૂટને રૉયલ સોસાયટીને પ્રકાશવિજ્ઞાનનું સંશોધન પેપર જેમાં પ્રકાશ અતિસૂક્ષ્મ કણોનો બનેલો છે તે અને પ્રકાશને લગતા ઘણા પ્રયોગોનાં પરિણામો મોકલી આપ્યાં. પ્રચલિત પ્રણાલિકાથી તદ્દન નવા વિચારોને સંશયથી અને ઉપહાસથી રૉબર્ટ હૂક(Robert Hooke) જેવા વિદ્વાને જોયા. રૉબર્ટ હૂક, હૂકના નિયમથી ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ હતા. કમિટીના બીજા બે સભ્યો ગણિતશાસ્ત્રી લુકાસ(Lucas) અને ભૌતિકશાસ્ત્રી લિનસ(Linus) પણ હૂકની સાથે જોડાયા. ન્યૂટન બિનજરૂરી ટીકાઓથી જખમી થયા અને પોતાની દુનિયામાં ડૂબી ગયા. એમના વિચારો કે નવું કામ આવી ટીકાઓના ડરથી પ્રસિદ્ધ કરવાનું બંધ કર્યું. આના કારણે ઘણું બધું ઉચ્ચ કોટિનું સંશોધન કામ દસકાઓ સુધી તેમના મેજના ખાનામાં પડ્યું રહ્યું. આના કારણે ભારે અનર્થકારી પરિણામો આવ્યાં. કલનગણિતનાં ઘણાં પરિણામો લાઇબ્નિઝે (Leibniz) ન્યૂટન પહેલાં પ્રસિદ્ધ કરેલાં, જે વિચારોનો દાવો ન્યૂટન પણ કરતા. હકીકતમાં તેમના વિચારો હતા, પણ તેમણે તેમનાં પરિણામો જાહેરમાં પ્રસિદ્ધ કર્યાં ન હતાં.

જેમ-જેમ 1670થી આગળ વધીએ તેમ-તેમ ન્યૂટનનો રસ ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રથી દૂર જતો ગયો. તેમણે ઘણો સમય હલકી ધાતુ કે લોખંડનું સોનું બનાવવાની રસાયણિક વિદ્યા (alchemy)માં કાઢ્યો. તેમના આ સંશોધનમાં હાલના રસાયણશાસ્ત્રી જોઈ શકાય અને અહીંથી તેમને ખ્રિસ્તી ધર્મશાસ્ત્રમાં ખૂબ જ રસ પડ્યો અને ઊંઘ વગર રાતોની રાત ધર્મશાસ્ત્રનું

વાંચતા અને વિચારતા રહ્યા. જીસઝ(Jesus)ને ભગવાન તરીકે માનતા ન હતા. જીસઝને માણસ કરતાં વધારે માનતા હતા. ભગવાનના પુત્ર હતા અને ભગવાન અને માણસ વચ્ચે મધ્યસ્થી હતા. ન્યૂટન ભાગ્યે જ ચર્ચમાં જતા.

ન્યૂટન પ્લેગના વર્ષો બાદ ભાગ્યે જ તેમના વતન લિન્કનશાયર ગયા હોય. વસંત, 1679માં ન્યૂટનનાં બા માંદાં પડી ગયાં. ન્યૂટન કેમ્બ્રિજ છોડીને લિન્કનશાયર આવ્યા અને તેમની બાનું નિધન થયું ત્યાં સુધી તેમની રાતદિવસ તકેદારી રાખી. તે તેમની બાના સૌથી મોટા પુત્ર હોઈને તેમની બાના વારસદાર અને તેમની ઇચ્છાને અમલમાં મૂકનાર હતા. તેમની બાનું તેમના પિતાની નજીક કોલ્સ્ટરવર્થ(Colsterworth) ચર્ચયાર્ડમાં દફન કર્યું.

4.4 ધી પ્રિન્સિપિયા(The Principia)

ઈ. સ. 1684 વિજ્ઞાન માટે નસીબવંતુ વર્ષ ગણાય. ઑગસ્ટ કે મે 1684માં પૂંછડિયા તારાના નામ જોડે જેમનું નામ જોડાયેલું છે તે ઇડમુન્ડ હેલી(Edmund Halley) ન્યૂટનને મળવા આવ્યા અને વાતમાં ને વાતમાં તેમણે ન્યૂટનને પુછ્યું કે, "ઇન્વર્સ સ્કવેરના નિયમ મુજબ સૂર્યની આસપાસ ફરતા ગ્રહનો માર્ગ કેવો હશે ?" ન્યૂટને જવાબ આપ્યો, "તે માર્ગ ઉપવલયી કે લંબગોળ (ellptic) છે" હેલી અચંબો પામી ગયા અને આનંદમાં આવી ગયા અને તેમણે ન્યૂટનને પૂછ્યું કે, "તમને આની કઈ રીતે ખબર ?" ન્યૂટને જણાવ્યું કે, આ તેમણે વર્ષો પહેલાં સાબિત કર્યું છે. હેલીએ સાબિતી જોવા માગી પણ ન્યૂટન તેમના ઘણા કાગળોમાં શોધી ન શક્યા અને તેમણે હેલીને જણાવ્યું કે તે ફરીથી સાબિત કરીને તે સાબિતી તેમને મોકલી આપશે. આ સાબિતી ફરીથી લખતાં તેમનો ગતિવિજ્ઞાનમાં(Dynamics) રસ એકદમ વધી ગયો અને આ પરિણામો જે તેમણે 1679માં સાબિત કરેલાં તે ફરીથી સાબિત કર્યાં અને ગોળ ગોળ ફરતા પદાર્થની ગતિ ઉપર નિબંધ લખ્યો. આ બધું તેમણે નવેમ્બર 1684માં હેલીને મોકલી આપ્યું. હેલી આ જોઈને ખૂબ જ પ્રભાવિત થયા અને નવેમ્બર માસમાં ફરીથી મળવા આવ્યા. ન્યૂટનને આ બધાં પરિણામો લખીને પુસ્તક સ્વરૂપે પ્રસિદ્ધ કરવા વિનંતી કરી, પણ ન્યૂટને ના પાડી. હેલીએ બધો જ ખર્ચ આપવાની તૈયારી બતાવી. આખરે ન્યૂટન તૈયાર થયા.

ન્યૂટને તેમનાં ખગોળશાસ્ત્ર અને ગતિવિજ્ઞાનના સંશોધનોનાં પરિણામો કોઈએ ન કરી હોય તેવી સતત અને સખત મહેનત કરીને Philosohiae Naturalis Principia Mathematicaમાં (Mathematical Principles of Natural Sciences) આપ્યાં. આને ટૂંકમાં પ્રિન્સિપિયા (Principia) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેમણે તેમના શરીરની જરાયે કાળજી રાખ્યા વગર લખ્યું. તેમના શરીરને ખાવાનું અને ઊંઘવાનું જોઈએ તે પણ ભૂલી ગયા.

પ્લેગનાં વર્ષોમાં જે તેમનો જુસ્સો હતો, તે જુસ્સો આ પુસ્તક લખવામાં હતો. ઊભા ઊભા રૂમમાં જ થોડુંક ખાતા. તેમજ ઊભા ઊભા તેમના મેજ ઉપર લખતા. જો એ બહાર જવાની હિંમત કરતા તો એવું લાગતું તે ખોવાઈ ગયા છે. અસ્થિર હોય તે રીતે ચાલતા. કોઈ પણ કારણ વગર ઊભા રહેતા અને તેમની રૂમમાં પાછા આવી જતા. તેમની આસપાસ હસ્તલિખિત પોથીનાં હજારો પાનાં પડેલાં એમાં ઘણાંએ ચાર દાયકા પહેલાંનાં તારીખ વગરનાં પણ ખરાં. તેમણે કોઈ દિવસ આ રીતે લખેલું ન હતું. એક જ આશયથી લખતા : કોઈ દિવસ એક-એક શબ્દ કોઈ વાંચશે. કલાકોના કલાકો ખાવાની કે ઊંઘની પરવા કર્યા વગર માસ્ટરપીસ (Mastrpiece) લખ્યા કરીને 1686માં રૉયલ સોસાયટીને પ્રિન્સિપિયા આપ્યું અને હેલીના ખર્ચે છપાયું.

હેલીએ પ્રિન્સિપિયાની 60 નકલો લંડનથી વેગનમાં ન્યૂટનને કેમ્બ્રિજ મોકલી જેમાંની 20 નકલો ન્યૂટનને સહકાર્યકર્તાઓને આપવા વિનંતી કરી હતી અને બાકીની 40 નકલો પુસ્તકભંડારોને 5થી 6 શિલિંગે વેચવા આપવા જણાવેલું.

પ્રિન્સિપિયા ખરેખર ત્રણ પુસ્તકોનું બનેલું છે. પહેલાં પુસ્તકમાં ન્યૂટનનું ગતિશાસ્ત્ર છે, બીજા પુસ્તકમાં વિશ્વવ્યાપક ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ અને ત્રીજા પુસ્તકમાં આ બંને પુસ્તકોનો ઉપયોગ કરીને સૂર્યમંડળનો અભ્યાસ રજૂ કર્યો છે. યુક્લિડની ભૂમિતિની જેમ જ પ્રિન્સિપિયા લખેલું છે. વ્યાખ્યાઓ (Definitions), પ્રસ્થાપિત સિદ્ધાંતો (Axioms), પ્રમેયો (Theorems), ઉપપ્રમેયો (Corollaries) અને Q. E. D. પણ છે. દ્રવ્ય (Mass), દ્રવ્ય અને ગતિનો ગુણાકાર જેને આપણે વેગમાન(momentum)થી ઓળખીએ છીએ, જડતા (Inertia), લગાડેલું બળ (Impressed Force), કેન્દ્રગામી બળ(Centripetal Force), કેન્દ્રગામી બળની નિરપેક્ષ સંખ્યા (Absolute Quantity of Centripetal Force), કેન્દ્રગામી બળની પ્રવેગીય સંખ્યા (Accelerative Quantity of centripetal Force) અને કેન્દ્રગામી બળની પ્રેરક સંખ્યા (Motive Quantity of centripetal Force) વગેરેની વ્યાખ્યાઓ આપી છે અને તેને લગતી ચર્ચા પણ કરી છે. ગતિના નિયમોમાં ત્રણ જાણીતા ન્યૂટનના નિયમો પૂર્વધારણા તરીકે આપ્યા છે. આ ત્રણે નિયમો પાયાના નિયમો છે જેના ઉપર આખું તંત્ર રચાયેલું છે. આ ત્રણે નિયમોના આધારે રચાયેલાં ઘણાં ઉપપ્રમેયો આપ્યાં છે અને છેલ્લે આ બધા ઉપર વિવરણ (Scholium) પણ આપ્યું છે.

કેપ્લરે આકાશમાં ગ્રહોનાં નિરીક્ષણો ઉપરથી નીચેના ત્રણ નિયમો મેળવેલા :

(1) ગ્રહો સૂર્યની આસપાસ ઉપવલયી (લંબગોળ) માર્ગે ફરે છે અને સૂર્ય આ ઉપવલયની એક નાભિ(Focus)એ છે.

(2) સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખા સરખા સમયમાં સરખું ક્ષેત્રફળ કાપે છે.

(3) ગ્રહના આવર્તકાળ(Perieod)નો વર્ગ તેના ઉપવલયની અર્ધ મુખ્ય ધરીના ઘનના પ્રમાણસર છે. ($T^2 \propto a^3$)

બીજા પુસ્તકમાં ન્યૂટને વિશ્વવ્યાપી ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ ($F = G \cdot Mm/r^2$)લઈને ઉપરના કેપ્લરના નિયમો મેળવ્યા છે. ન્યૂટને પત્રમાં જણાવેલું કે આ બધાં પરિણામો તેમણે કલનગણિતની રીતો વાપરીને મેળવેલાં, પણ સમકાલીનની સરળતા માટે ભૂમિતિની રીત વાપરીને આપ્યાં છે.

ત્રીજા પુસ્તકમાં ઇતિહાસમાં કોઈએ ન કરી હોય તેવી ચોક્સાઈથી સૂર્યમંડળની ઘટનાઓ ભેગી કરી છે. ગુરુના ગ્રહ(Jupiter)ને ચાર ઉપગ્રહો(ચંદ્રો, Moons) છે. ચારે ઉપગ્રહોના નિરીક્ષણોનો ઉપયોગ કરીને ગુરુની આસપાસ ફરવાનો સમય દિવસો, કલાકો, મિનિટો અને સેકન્ડોમાં આપ્યો છે. આ ઉપગ્રહોનું ગુરુથી વધારેમાં વધારે અંતર પણ આપ્યું છે. આ જ પ્રમાણે બુધ(Mercury), શુક્ર(Venus), શનિ(Saturn) અને મંગળ(Mars)ના ઉપગ્રહો માટે પણ આપ્યું છે.

પુસ્તક એકના પ્રમેયોથી ન્યૂટને સાબિત કર્યું કે આ બધા ઉપગ્રહોને સુરેખામાંથી તેમની ભ્રમણકક્ષામાં ગ્રહના કેન્દ્રમાં લાગતું બળ ખેંચી લાવે છે - ગુરુ, પૃથ્વી અને મંગળ - અને આ બળ ઉપગ્રહના કેન્દ્રથી ગ્રહના કેન્દ્ર સુધીના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે અને આના માટે ન્યૂટને 'ગ્રેવિટેટ(Gravitate, ગુરુત્વાકર્ષણથી ખેંચાવું)' શબ્દ વાપર્યો છે. ચંદ્ર ગુરુત્વાકર્ષણથી પૃથ્વી તરફ ખેંચાય છે અને ચંદ્રને સુરેખામાંથી તેની ભ્રમણકક્ષામાં પૃથ્વીનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ ખેંચી લાવે છે.

ન્યૂટનને એકાએક આવેલો આ વિચાર નથી. એક પછી એક તદ્દન અપરિચિત દાવાઓમાંથી પસાર થઈને બનેલો આ વિશ્વવ્યાપી ગુરુત્વાકર્ષણનો નિયમ છે. પૃથ્વી પદાર્થોને તેના કેન્દ્ર ભણી ખેંચે છે. જે રીતે પૃથ્વી સફરજનને પૃથ્વીના કેન્દ્ર ભણી ખેંચે છે, તે જ રીતે પૃથ્વી ચંદ્રને પૃથ્વીના કેન્દ્ર ભણી ખેંચે છે. આના જેવું જ બળ પૃથ્વીને સૂર્યના કેન્દ્ર ભણી ખેંચીને પૃથ્વીને તેની ભ્રમણકક્ષામાં રાખે છે. દરેક ગ્રહને પોતાનું જ જુદુ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ હોય છે. ન્યૂટને સૂર્યના દરેક ગ્રહોનાં ગુરુત્વાકર્ષણ-બળો ગણીને આપ્યાં છે. જે રીતે ગુરુ તેના ઉપગ્રહો માટે છે, તે જ રીતે સૂર્ય તેના ગ્રહો માટે છે. તેમનાં દ્રવ્યો પ્રમાણે તેઓ એકબીજાને આકર્ષે છે. પૃથ્વી ચંદ્રને આકર્ષે છે, તે જ રીતે ચંદ્ર પૃથ્વીને આકર્ષે છે. સૂર્યના પૃથ્વીને આકર્ષતા ગુરુત્વાકર્ષણબળમાં આ બળ વધારો કરે છે. અને આ બળ મહાસાગરની દરરોજની ભરતીના માટે કારણભૂત છે. ન્યૂટને પ્રિન્સિપિયામાં ભરતી-ઓટનું ઘણું કામ નિરક્ષણ સાથે સરખાવ્યું છે.

કેન્દ્ર ગાણિતિક કારણોથી છે, બીજું કોઈ ખાસ કારણ નથી. બ્રહ્માંડમાં દરેક કણ બીજા કણને આકર્ષે છે. બ્રહ્માંડમાં બધે જ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ છે.

પૃથ્વીનો આકાર પણ ગણી બતાવ્યો છે. પૃથ્વી ગોળ-ગોળ ફરતી હોઈને વિષુવવૃત્તના ભાગમાં ઉપસેલો ભાગ(સોજો આવેલો હોય તેવો) છે. આથી પૃથ્વીનો આકાર ગોળા જેવો નથી, પણ નારંગી જેવો એટલે કે ટોચે અને તળિયે ચપટો છે જેને અંગ્રેજીમાં Oblate (ઑબ્લેટ) કહે છે. ગ્રહના આકાર ઉપર તેના દિવસની લંબાઈનો આધાર છે તે પણ તેમણે સાબિત કર્યું. જુદી-જુદી ઊંચાઈ કેન્દ્રથી જુદા-જુદા અંતરે આવેલી હોઈને, સમાન દ્રવ્યનું જુદી-જુદી ઊંચાઈએ જુદું-જુદું વજન છે તે ગણી બતાવ્યું.

જેમ-જેમ પ્રિન્સિપિયાના સમાચાર પ્રસરતા ગયા તેમ-તેમ ઘણા લોકોને એવું લાગતું કે મશીનનાં બધાં તત્ત્વોના દાંતા એકબીજામાં, જટિલ ઘડિયાળના ભાગોની જેમ, એવી રીતે બેસાડવામાં આવેલા છે કે બધું ખોડખામી વગર ચાલ્યા કરે છે. ન્યૂટન ક્ષતિ વિનાના નિયતવાર અને સંપૂર્ણ વ્યવસ્થાના કલ્પનાચિત્રને આધીન ન થયેલા. બે કે ત્રણ ગ્રહોને બદલે વધારે ગ્રહોનું એકબીજાનું આકર્ષણબળ ગણતાં તેમને કેયૉસ(Chaos) દેખાયેલો, ન્યૂટન સૂર્યના બધા ગ્રહોનું કેન્દ્ર સૂર્યના બદલે ઝોલાં લેતું બધાનું ગુરુત્વાકર્ષણ કેન્દ્ર જોતા. દરેક ગ્રહ તેના તે જ ઉપવલયી માર્ગે ભ્રમણ કરતો નથી. ઘણા ગ્રહો અને ઉપગ્રહોની અસર એકબીજા ઉપર હોઈને, દરેક ગ્રહ કે ઉપગ્રહ દરેક વખતે નવા જ ઉપવલયી માર્ગે ભ્રમણ કરે છે. આ નવો માર્ગ અગાઉના માર્ગથી નરી આંખે જુદો ન પણ દેખાય. વધારે વર્ણન પ્રિન્સિપિયામાંથી મળશે.

પ્રિન્સિપિયા ખૂબ જ સફળ થયું, પણ પુસ્તકની ગૂંચવણો બહુ જ ઓછા સમજી શકે છે. થોડાક ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓ પ્રિન્સિપિયાની છેક સુધીની દલીલો સમજી શકે છે. પ્રિન્સિપિયા ન વાંચી શકાય તેવા ગ્રંથ તરીકેની ખ્યાતિ પ્રિન્સિપિયાની ગ્રંથ તરીકેની ખ્યાતિ કરતાં વધારે ઝડપથી ફેલાયેલી. અરે ન્યૂટન જ્યારે કોઈ વિદ્યાર્થી પાસેથી પસાર થઈ રહ્યા હતા ત્યારે તે વિદ્યાર્થીએ બીજા વિદ્યાર્થીઓને કહેલું, ''અરે, જુઓ, આ જઈ રહેલા પ્રોફેસરે એવું પુસ્તક લખ્યું છે કે જે ન તો તે કે બીજું કોઈ સમજી શકે.''

4.5 પાર્લામેન્ટના સભ્ય

ખ્રિસ્તી ધર્મના બે અગત્યના ફાંટાઓ પ્રોટેસ્ટન્ટ અને કેથોલિક છે. બ્રિટનમાં પ્રોટેસ્ટન્ટોની બહુમતી છે. જેમ્સ બીજા(James II) 1686માં ઇંગ્લૅંડના રાજા બન્યા. તેઓ બ્રિટનને રોમન કેથોલિક ધર્મ તરફ લઈ જવા મથતા. તેમણે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીમાં ફેલો અને અધિકારીઓ તરીકે કેથોલિકોને ગોઠવવાનો પ્રયત્ન કર્યો. જેમ્સે કેથોલિક સંતને પરીક્ષાઓ લીધા

વગર અને એન્ગ્લિકન ચર્ચ(Anglican Church)ના સોગંદ લીધા વગર એમ. એ.ની (M. A.) ડિગ્રી આપવા હુકમ કર્યો. યુનિવર્સિટીના અધિકારીઓ અંદર ને અંદર ક્રોધે ભરાયા અને બધું ઢીલમાં નાખ્યું. ન્યૂટન આ બખેડામાં પડ્યા. ન્યૂટન દૃઢ નિશ્ચયી પ્યુરીટન (રાજાશાહી વિરોધી), મૂર્તિપૂજા અને અનીતિમાન વિરોધી હતા. તેમણે રાજાના હુકમનો અભ્યાસ કર્યો, રાણી ઇલિઝાબેથનો યુનિવર્સિટીને અપાયેલ લેખિત અધિકારપત્ર અને જરૂરી બીજા બધાનો અભ્યાસ કર્યો. તેમણે કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીને કાયદાને વળગી રહેવા અને રાજાના હુકમને પડકારવા જણાવ્યું. યુનિવર્સિટી કાયદાને વળગી રહી અને એમ. એ. ડિગ્રી ન આપી. કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીના ઉપકુલપતિને હુકમ ન માનવા બદલ બરતરફ કરવામાં આવ્યા.

આખરે જેમ્સ બીજાને ઇંગ્લૅંડ છોડીને ભાગી જવું પડ્યું અને તેમની જગ્યાએ નવા રાજા વિલિયમ ત્રીજા આવ્યા. આની સાથે નવી પાર્લામેન્ટ આવી. ન્યૂટનની હિંમતની કદર કરીને જાન્યુઆરી 1689માં કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીના પ્રતિનિધિ તરીકે ચૂંટીને ન્યૂટનને પાર્લામેન્ટમાં મોકલ્યા. ફેબ્રુઆરી, 1690માં પાર્લામેન્ટ બરખાસ્ત થઈ ત્યાં સુધી ન્યૂટન નિયમિત હાજર રહેતા પણ કોઈ દિવસ વ્યાખ્યાન આપેલું નહિ. તેમની જિંદગીએ નવી દિશા લીધી. થોડાંક વર્ષો પહેલાં કોઈ વિચારી ન શકે તે રીતે એકાન્તવાસી વિદ્વાનની જિંદગી પ્રજાના કાર્યક્ષેત્રવાળી બની ગઈ. પ્રિન્સિપિયાની મહાન સિદ્ધિથી કેમ્બ્રિજના અધ્યાપક લંડનના અધિકારી બન્યા. જાણે કે આ ફેરફાર તેમને આનંદ આપતો હતો. 1701માં ફરીથી પાર્લામેન્ટના સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા. ત્રીજી વખત 1706માં ચૂંટણીમાં હારી ગયા.

તેમણે પાર્લામેન્ટની નજીક રૂમ ભાડે રાખી. રૉયલ સોસાયટીની મિટિંગોમાં અને સામાજિક પ્રસંગોમાં હાજરી આપવા માંડી. રૉયલ સોસાયટીના પ્રમુખ સેમ્યુઅલ પીપીસ(Samual Pepys) અને જાણીતા તત્ત્વજ્ઞાની જોહ્ન લૉક(John Locke) મિત્રો બની ગયા. જાણીતા ભૌતિકશાસ્ત્રી ક્રિસ્ટિઅન હુયગીન્સ(Christion Huygens) પણ લંડનમાં રહેતા હતા. હુયગીન્સના મિત્ર નિકોલસ ફેટિઓ(Nicolas Fatio) પણ ન્યૂટનના ખાસ ટેકેદાર બની ગયા.

લંડન પણ પ્લેગ અને મોટી આગ પછી ઝડપથી વિકસવા મંડ્યું. ઈંટોની દીવાલનાં હજારો ઘરો બંધાયાં. પેરિસ(Paris) અને ઍમ્સ્ટરડૅમ(Amsterdam)ની સાથે હરીફાઈ કરે તેવું વેપારનું અને નાણાકીય કેન્દ્ર બની ગયું. નિયમિત વર્તમાનપત્રોની શરૂઆત કૉફી હાઉસમાંથી થઈ. કૉફી હાઉસોમાં અને પરદેશમાં પ્રિન્સિપિઆના સમાચાર ફેલાતા હતા. માર્કઅસ ડી લૉપિટલે(Marcus de l'Hopital) સવાલ કર્યો : કયા પ્રકારનો પદાર્થનો આકાર પ્રવાહીમાંથી

ઓછામાં ઓછા અવરોધથી પસાર થશે તેનો જવાબ કોઈ કેમ જાણતું નથી ? સ્કૉટલેન્ડના ગણિતશાસ્ત્રી જોહ્ન અર્બુથનૉટે(John Arbuthnot) કહ્યું, “આનો જવાબ ન્યૂટનના ઉચ્ચ કોટિના કામ(Masterwork)માં છે.” તે માન સાથે રડી રહ્યો અને કહ્યું કે, “એ પુસ્તકમાં કેટલું જ્ઞાન ભરેલું છે ? તે (ન્યૂટન) ખાય કે પીએ કે ઊંઘે છે ? તે બીજા માણસોના જેવો માણસ છે ?”

4.6 ટંકશાળ (Mint)

સદીના અંત સમયે ઇંગ્લૅંડમાં સિક્કાઓનો કટોકટીનો સમય હતો. ચાંદીની પેની ઘણો વખત અગત્યનો સિક્કો હતો. સોનાનો સિક્કો પણ ચલણમાં વપરાતો થયો. ચાંદી અને સોનાના ભાવની વધઘટના કારણે સિક્કાઓની કિંમતમાં વધઘટ થતી. આના કારણે નવા સિક્કાઓ લોકો જલદીથી વાપરતા ન હતા. ખૂબ જૂના સિક્કાઓ પણ ચલણમાં હતા. સિક્કાની ધારો કાપીને સિક્કાનું વજન ઓછું કરતા, તેમજ સિક્કાઓ ઓગાળીને ધાતુ તરીકે વેચતા. આથી રાજ્યે કેટલાક આગળ પડતા નાગરિકો જેવા કે લૉક(Locke), રેન(Wren) અને ન્યૂટન જેવાની આ કટોકટી નિવારવા દોરવણી માગી. રેને સિક્કાઓ માટે દશાંશ પદ્ધતિ કરવા સૂચવ્યું, પણ કોઈએ ધ્યાનમાં ન લીધું. તે વખતના નવા નાણાંમંત્રી ચાર્લ્સ મોન્ટેગ્યુ(Charles Montague)એ સિક્કાઓ માટે તદ્દન નવો જ મૂળભૂત પ્રોગ્રામ અપનાવ્યો. જૂના સિક્કાઓ પાછા ખેંચી લઈને નવા સિક્કાઓ ચલણમાં ચાલુ કરવા. મોન્ટેગ્યુ ન્યૂટનને કેમ્બ્રિજમાં હતા ત્યારથી ઓળખતા હતા. આથી રાજાને ટંકશાળના વૉર્ડન(Warden) તરીકે ન્યૂટનનું નામ સૂચવ્યું. રાજાએ ન્યૂટનને એપ્રિલ 1696માં ટંકશાળના વૉર્ડન તરીકે નીમ્યા. ન્યૂટને તાત્કાલિક નવી યોજનાની ઘડિયાળના કાંટે કાળજી રાખી. નવા સિક્કાઓ તૈયાર કરવાના અને જૂના સિક્કાઓ પાછા ખેંચી લેવાના હોઈને વેપારધંધા માટે સિક્કાઓની ખેંચ ગૂંગળામણ ઊભી ન કરે તેનું પણ ન્યૂટનને ધ્યાન રાખવું પડતું.

ન્યૂટન પોતે પણ પૈસાવાળા બનતા ગયા. તે વૉર્ડનમાંથી માસ્ટર પણ બનેલા. તેમને વાર્ષિક 500 પાઉન્ડ મળતા અને દર રતલે નવા બનેલા સિક્કા ઉપર દલાલી પણ મળતી જે પ્રમાણમાં ઘણી હતી. જેર્મીન સ્ટ્રીટ(Jermyn Street) ઉપર ઘર પણ ખરીદ્યું અને તે સમયે જાણીતી કંપની ક્રિમસન(Crimson)નું વૈભવી ફર્નિચર પણ ખરીદ્યું. ઘર માટે ઘણા મદદગારો પણ હતા. ટંકશાળની જગ્યા સારી આવક ઓછી મહેનતે આપતી. ન્યૂટન જીવ્યા ત્યાં સુધી ટંકશાળની નોકરી ખંતથી અને ક્રૂરતાથી કરી. નકલી સિક્કાઓ બનાવનાર અને જાણીજોઈને નકલી સિક્કાઓ વાપરનારને દયા વગર કાયદા પ્રમાણે કડકમાં કડક સજા કરાવવા મથતા. ખબર ન પડે તે રીતે સિક્કાઓ કાપનારની પણ તે હાલત ખરાબ કરતા.

ન્યૂટન પોતે પણ ધાતુઓ ઓગાળનાર અને ધાતુઓની અચ્છી કસોટી કરનાર હતા. સિક્કાઓના દ્રવ્ય(વજન) અને વિશુદ્ધિ માટે ટંકશાળના માસ્ટરને રાજસત્તા જવાબદાર ગણતી અને તેમની જરા પણ ભૂલ માટે ખૂબ જ મોટો દંડ થતો. સોનીઓનું પંચ તેમની પસંદગીના કોઈ પણ સિક્કાઓની મન ફાવે તેવી કસોટીઓ કરીને તેનો ચુકાદો રાજસત્તાની કાઉન્સિલને આપતું. તેમના જણાવ્યા પ્રમાણે ન્યૂટન સિક્કાઓની વિશુદ્ધિને ખૂબ જ ઊંચા ધોરણે લઈ ગયા હતા. 1702માં રાણી ઍન્ની(Anne)ના રાજ્યાભિષેક માટે સોનાના અને ચાંદીના ચંદ્રકો તેમણે તૈયાર કર્યા.

4.7 રૉયલ સોસાયટી (Royal Society)

હૂક(Hooke)નું માર્ચ 1703માં નિધન થયું; આના થોડાક મહિના પછી રૉયલ સોસાયટીના પ્રમુખ(President) તરીકે ન્યૂટનની વરણી થઈ. ભૂતકાળમાં રાજનીતિકુશળ વ્યક્તિઓને જ માનનીય પ્રમુખ બનાવતા. ન્યૂટને રૉયલ સોસાયટી ઉપર કાબૂ મેળવી લીધો. કાઉન્સિલના સભ્યોની પસંદગીમાં પણ અગત્યનો ભાગ ભજવતા. લગભગ બધી જ મિટિંગોમાં પ્રમુખ તરીકે હાજરી આપતા અને લગભગ વાંચવામાં આવેલાં પેપરના ગુણદોષનું વિવેચન પણ કરતા. રૉયલ સોસાયટીને પોતાના ગજવાના પૈસે આર્થિક રીતે મજબૂત બનાવી.

અજોડ વૈજ્ઞાનિક, અગ્રગણ્ય ગણિતશાસ્ત્રી, પ્રજાના સેવક અને રૉયલ સોસાયટીના પ્રમુખ ન્યૂટનને રાણી ઍન્નીએ 1705માં 'સર'નો ઇલ્કાબ આપીને નવાજ્યા. યોગ્ય રીતે, આ વિધિ ટ્રિનિટી કૉલેજમાં કરવામાં આવી.

ન્યૂટનના મિત્ર ગણિતશાસ્ત્રી જોહ્ન વાલિસે (John Wallis) ન્યૂટનને તેમનો ખજાનો (વિજ્ઞાનનાં પરિણામો) અંધારામાંથી બહાર કાઢવા આજીજી કરી. આ આજીજી ધ્યાનમાં લઈને અને હવે હૂક ન હોઈને તેમનું અગત્યનું બીજું કામ, લૅટિનના બદલે અંગ્રેજીમાં અને ઓછામાં ઓછા ગણિતવાળું પુસ્તક, "Optics or a Treatise on the Reflexions, Inflexions and Colours of Light" રૉયલ સોસાયટીને આપ્યું અને સાથે-સાથે જાહેરાત પણ આપી જેમાં તેમણે 1675નું આ કામ જાહેર ન કરવાનાં કારણો આપ્યાં. તેમાંનું એક કારણ "ઝઘડાથી દૂર રહેવાનું" હતું. આ વખતે કોઈ તંત્રીની જરૂર ન હતી.

ઑપ્ટિક્સ(Optics)માં ન્યૂટને તેમના પ્રયોગોનું સ્પષ્ટ વર્ણન કર્યું છે અને તેમની કામ કરવાની રીત પ્રિન્સિપિયા કરતાં વધારે જણાવી છે. જેમ આપણે પથ્થરોમાં એક બાજુથી બીજી બાજુ કૂદકા મારીને જઈએ તેમ પ્રકાશ અને દૃષ્ટિને લગતી અદ્ભુત વસ્તુઓ ન્યૂટને કૂદકાઓ મારીને બતાવી છે : વક્રીભવનની રચનાથી બિલોરી કાચ(chrystal)માં વક્રીભવન.

પણ પ્રકાશને કઈ રીતે સમજવો : મોજાઓ(Waves)થી કે કણો(Particles)થી ? ન્યૂટન પ્રકાશ દ્રવ્યના કણોનો પ્રવાહ છે તેમ સ્પષ્ટપણે માનતા પણ પ્રકાશ તરંગોથી મુસાફરી કરે છે તેની ઊંડાણથી તપાસ કરી. ન્યૂટનના પ્રકાશના પ્રયોગો સમજવા માટે પ્રકાશ મોજાંઓમાં મુસાફરી કરે છે તેમ માનવું પડે. વક્રીભવનના પ્રયોગોમાં ભૂલ વગર સ્પષ્ટપણે પ્રકાશ મોજાંઓમાં મુસાફરી કરે છે તેની નિશાની છે. ન્યૂટન આ બાબતમાં તેમની માન્યતાનું કોઈ પણ પ્રકારનું સમાધાન કરી શક્યા નથી. સાથે-સાથે પ્રયોગોનાં આખરી પરિણામો કાઢી પણ નાખ્યા નથી. એવું લાગ્યું કે ન્યૂટન આ બાબતમાં ખોટા રસ્તે છે, પણ આખરે બે સદીઓ પછી આઇન્સ્ટાઈને બતાવ્યું કે પ્રકાશ નાના-નાના જથ્થાઓ(Quanta)માં મુસાફરી કરે છે. ન્યૂટને ઑપ્ટિક્સને વિશ્વશાસ્ત્ર(Cosmology) અને અધ્યાત્મશાસ્ત્ર(Metaphysico) સુધી વિસ્તૃત કર્યું છે.

ગુરુત્વાકર્ષણના નિયમ માટે પ્રિન્સિપિયાએ જે કર્યું તે પ્રકાશ અને દષ્ટિ માટે દળદાર પુસ્તક ઑપ્ટિક્સે કર્યું. ઑપ્ટિક્સના પરિશિષ્ટ(appendix)માં ન્યૂટને ફ્લક્સિઓન્સ(વિકલન, DeriVative)ની રીત પહેલી જ વખત આપી જે તેમણે 1665માં વિકસાવેલી. દુનિયાએ 1704માં પહેલી વખત જોઈ. કલનગણિતને લગતું સંશોધનનું કામ યુરોપના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઘણાં વર્ષો પહેલાં કરેલું. ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આ કામ 40 વર્ષ પહેલાં થયેલું તે સીધેસીધું શંકાની દષ્ટિએ જોવાના બદલે કોઈ પણ જાતનો પ્રત્યાઘાત ન બતાવ્યો.

પાછળનાં વર્ષો ન્યૂટન લંડનમાં રહ્યા. તેમનો સમય ટંકશાળ, રૉયલ સોસાયટી, વાંચવા અને લખવામાં અને બ્રિટિશ રાજધાનીમાં સાજશણગાર ભોગવવામાં કાઢ્યો. ન્યૂટનની તંદુરસ્તી છેલ્લાં વર્ષો સુધી ઘણી સારી હતી. તેમણે કોઈ દિવસ ચશ્માં પહેર્યાં નથી અને ફક્ત એક જ દાંત પડી ગયેલો. ત્રીસ વર્ષની વયે વાળ ધોળા થઈ ગયેલા પણ છેક સુધી ઘટ્ટ અને સુંવાળા હતા. તેમના છેલ્લા દિવસો સામાન્ય માણસો જેવા હતા. તેમને પણ દુઃખ સહન કરવું પડેલું. છેલ્લાં બે કે ત્રણ વર્ષ સતત દુઃખ બોલ્યાચાલ્યા વગર હિંમતથી સહન કર્યે ગયા. છેલ્લા દિવસોમાં મદદ કરનારાઓ માટે લાગણીવશ બની જતા. આખરે સતત કફના કારણે ગંભીરપણે નબળા થઈ ગયા અને થોડા દિવસ માટે દુઃખ ઓછું થઈ ગયેલું. ઊંઘમાં જ શાંતિથી રવિવાર માર્ચ 20, 1727માં સવારના એક અને બેના વચ્ચે 85 વર્ષની વયે ન્યૂટનનું નિધન થયું. તેમના લાયક મહત્ત્વનું માન આપીને તેમને રાજાઓ અને લશ્કરના વીરો સાથે વેસ્ટમિન્સ્ટર એબ્બી(Westminster Abbey)માં દફનાવવામાં આવ્યા.

માર્ચ 24, 1727 ગુરુવારની રૉયલ સોસાયટીની જનરલ બૂકમાં નોંધેલું, "સર આઈઝેક ન્યૂટનના નિધનથી ખુરશી ખાલી છે."

ન્યૂટન 84 વર્ષની ઉંમરમાં દંગ કરે તેટલા પૈસા કમાયા. તે સમયના £ 31,826 પાઉન્ડ જે ખૂબ જ મોટી રકમ ગણાય. યાદ રાખો તે સમયે કેમ્બ્રિજના ફેલોને વાર્ષિક £ 2 પાઉન્ડ અને બીજું ઘણું મળતું. આ મિલકતમાં ઘર, ફર્નિચર, સોનાની પાટો અને સિક્કાઓ, 39 ચાંદીના ચંદ્રકો અને વિશાળ લાઇબ્રેરી જેમાં બે હજાર પુસ્તકો (તે જમાનામાં) હતાં. આટલું બધું હોવા છતાં ન્યૂટન કોઈ પણ પ્રકારનું વિલ મૂકી ન ગયેલા.

4.8 ઉપસંહાર

આ એકલા મુસાફરના પ્રભાવ વિશે ખ્યાલ બાંધવો જરાયે અઘરો નથી. ન્યૂટનની સદી પહેલાંની સદી અંધશ્રદ્ધાવાળી હતી. કૉમેટ(પૂંછડિયો તારો), સૂર્યગ્રહણ અને ચંદ્રગ્રહણને લોકો કુદરતનો કોપ માનતા અને આખી દુનિયા સૂઝ સમજ વિહોણી લાગતી. ન્યુટોનીઝમનો ઉપયોગ કરીને હેલિએ સાબિત કર્યું કે 76 વર્ષે પૂછડીઓ તારો પાછો આવશે અને જ્યારે 76 વર્ષે પૂછડિયો તારો જોવામાં આવ્યો ત્યારે ન્યૂટનના કામની કિંમત થઈ. 1715માં આવી જ ગણતરી કરીને સંપૂર્ણ સૂર્યગ્રહણ થશે અને ઇંગ્લૅંડમાં ક્યાં અને ક્યારે દેખાશે તેનો નકશો હેલીએ પ્રસિદ્ધ કર્યો. રૉયલ સોસાયટીના સભ્યો નિયત સમયે ચોખ્ખા આકાશ નીચે ખુલ્લા મેદાનમાં મળ્યા અને નિયત સમયે કસમયની રાત પડી હોય તેવું અંધારું થયું અને સૂર્યની કિનારી જ તેજમય દેખાઈ. ન્યૂટનના અદ્ભુત સમીકરણોથી ચંદ્ર, ગ્રહો, સૂર્ય અને તારાઓની ગતિ કહી શકાય છે. પૂંછડિયા તારાનું દેખાવું, સૂર્યગ્રહણ અને ચંદ્રગ્રહણ કુદરતનો કોપ નથી. આ દુનિયા પાયાના નિયમો પ્રમાણે ચાલે છે તે ન્યૂટનના કામે બતાવ્યું તે ન્યૂટનની માનવજાતને મોટામાં મોટી ભેટ છે. આવું અગમ્ય કામ કોઈ વિરલાઓ જ કરી શકે છે.

ન્યૂટનના કેમ્બ્રિજમાં આવ્યા પછી 166 વર્ષે બીજા બ્રિટિશ યુવાને કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટીની ક્રિસ્ટ(Christ) કૉલેજમાં અભ્યાસ શરૂ કર્યો. આ કૉલેજ ન્યૂટનની ટ્રિનિટીની રૂમથી થોડીક દૂર આવેલી છે. કેમ્બ્રિજની સ્ટ્રીટ જ્યાં ન્યૂટન ઘણાં વર્ષો પહેલાં ચાલ્યા હતા ત્યાં આ યુવાન ચાર્લ્સ ડાર્વિન(Charles Darwin) પણ ચાલ્યા હતા. ન્યૂટનની જેમ ડાર્વિન પણ એમનાં સંશોધનો પ્રસિદ્ધ કરવા આનાકાની કરતા હતા. આખરે 1857માં તેમણે ન્યૂટનની ઉત્તમકૃતિ પ્રિન્સિપિયાના જેવી જ ઉત્તમ કૃતિ 'ઓરિજિન ઑફ સ્પીશીઝ (Origin of Species)' લખી. જેમાં તેમણે દેખીતી રીતે ન સમજાવી શકાય તેવા આ પૃથ્વી પરના ક્રિયાશીલ જીવોની સમજ આપી છે. જેમ ન્યૂટને ભૌતિક દુનિયાને (Physical World) સહજ(સ્વાભાવિક) બનાવી તેમ ડાર્વિને જૈવિક દુનિયા(Biological World)ને સહજ બનાવી. આ બંને માણસોનો વિજ્ઞાન ઉપર ખૂબ જ મોટો પ્રભાવ છે અને તેમનું કામ માણસોની વાસ્તવિકતાની સૂઝને ગહન રીતે અને ક્રાન્તિના સ્વરૂપમાં અસર કરી ગયું છે. આજે પણ ડાર્વિન વેસ્ટમિન્સ્ટર એબ્બી (Westminster

Abbey)માં ન્યૂટનના સ્મારકથી થોડાક મીટર દૂર સૂતા છે - આ બંને કેમ્બ્રિજના વિજ્ઞાનના મહાન માણસો વિજ્ઞાનની ટોચે પહોંચ્યા છે.

વીસમી સદીના અગ્રગણ્ય વિદ્વાન અને ન્યૂટનના કામના રખેવાળ ડી. એચ. વ્હાઈટસાઈડે (D. H. Whiteside) કહેલું,

"પોતાના સમયમાં અને પોતાના પછીની સદીઓમાં પોતાના પ્રતિબિંબની (વિચારોની) છાપ મૂકતા જવાની બુદ્ધિશાળી પ્રતિભા અને ચડિયાતી પાત્રતા ખૂબ જ ઓછા લોકો ધરાવે છે. દેશના સિક્કા છાપવાનું ધ્યાન રાખવાનું, બનાવટી સિક્કાઓ બનાવનારાઓને પકડવાનું, પ્રતિષ્ઠિત માલમિલકતોમાં વધારો કરવાનું, રાજનીતિકુશળ માણસ હોવાનું, અરે સાથી વૈજ્ઞાનિકોને સૂચવવાનું, જ્યારે તમે પ્રિન્સિપિયા લખ્યું હોય ત્યારે આ બધું મૂર્ખામી અને અર્થવગરની મહત્ત્વાકાંક્ષા જેવું દેખાય છે."

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકો અને લેખના આધારે લખાયું છે.

(1) Dunham William. Journey Through the Genius : The Great Theoerms of Mathematics. John Wiley & sons, Inc. 1990.

(2) Bell E. T. Men of Mathematics. Simon and Schuster, Inc. 1965.

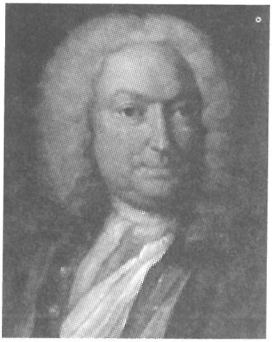
(3) Gleick James. Isaac Newton. Vintage Books, A Divison of Random House, Inc. 2004.

(4) વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ, "કેલિફોર્નિયા રાજ્યની શિક્ષણ વ્યવસ્થા" *સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય વૃત્ત*, (જાન્યુઆરી-ફેબ્રુઆરી, 2020) : 19

◆

જેકોબ-I બર્નૂલિ
(Jacob-I Bernoulli)

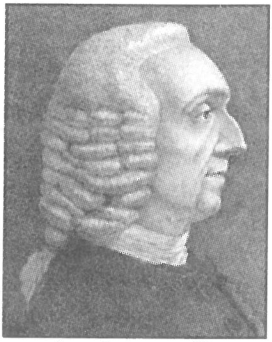
નિકોલૉસ-I બર્નૂલિ
(Nicolaus-I Bernoulli)



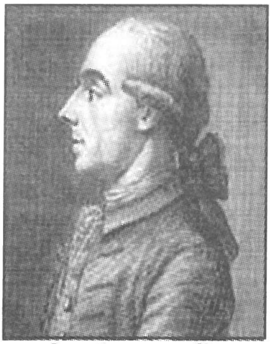
જોહાન્નીસ-I બર્નૂલિ
(Johannes-I Bernoulli)

નિકોલૉસ-III બર્નૂલિ
(Nicolaus-III Bernoulli)

ડેનિઅલ-I બર્નૂલિ
(Daniel-I Bernoulli)



જોહાન્નીસ-II બર્નૂલિ
(Johannes-II Bernoulli)



જોહાન્નીસ-III બર્નૂલિ
(Johannes-III Bernoulli)

ડેનિઅલ-II બર્નૂલિ
(Daniel-II Bernoulli)

જેકોબ-II બર્નૂલિ
(Jacob-II Bernoulli)

બર્નૂલિ કુટુંબ (Bernoullie Family)

5. બર્નૂલિ કુટુંબ (Bernoulli Family)

"A quantity which is increased or decreased by an infinitely small quantity is neither increased nor decreased."

– Johann Bernoulli

5.1 પ્રસ્તાવના

ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓના ફાળાથી ગણિત સમૃદ્ધ બન્યું છે. પિતા અને પુત્રનો ફાળો પણ ઘણો છે, જેમ કે ફેરૂકેસ બોલ્યાઈ(Farcas Bolyai) અને જેનોસ બોલ્યાઈ, જ્યોર્જ ડેવિડ બિરખોફ(George David Birkhoff) અને ગેરેટ બિરખૉફ(Garrett), ઇમિલ આર્ટિન(Emil Artin) અને માઇકલ આર્ટિન, ઇલી કાર્ટન(Elie Cartan) અને હેન્રી કાર્ટનનો ફાળો. તે જ પિતા અને પુત્રીનો ફાળો પણ ઘણો છે, જેમ કે ગ્રીસના થીઓન(Theon) અને હીપેટિઆ(Hypetia), આર્યભટ્ટ અને લીલાવતી અને મેક્સ નોથર(Max Noether) અને ઇમી(Emmy) નોથર વગેરે. આ જ રીતે કુટુંબોએ પણ અગત્યનો ફાળો આપ્યો છે; જેમ કે ઇટાલી... રિકાટી(Ricatti) કુટુંબે ઓછામાં ઓછા ત્રણ ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને સ્વિટ્ઝરલૅન્ડના બર્નૂલિ કુટુંબે આઠ ગણિતશાસ્ત્રીઓ આપ્યા છે અને આમાંયે ત્રણ ગણિતશાસ્ત્રીઓ જેકોબ I(Jacob I), જોહાન્નીસ I(Johannes I) અને ડેનિઅલ I (Daniel I) આગળ પડતા છે.

કલનગણિતની ક્રાન્તિ માટે ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝ વગર પણ ઘણા કામ કરનારા હતા. ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝ કલનશાસ્ત્રના શિલ્પીઓ હતા, પણ હાલમાં આપણે જે કલનગણિત જાણીએ છીએ તેનું ચણતર કરનારા બર્નૂલિ ભાઈઓ જેકોબ I અને જોહાન્નીસ I હતા.

5.2 બર્નૂલિઓ

મૂળ તો એન્ટવર્પ(Antwerp), બેલ્જિયમના બર્નૂલિ કુટુંબના સૌથી પહેલા જાણીતા સભ્ય લીઓન(Leon) એન્ટવર્પમાં ડૉક્ટર હતા. તેમનું નિધન 95 વર્ષના હતા ત્યારે થયું. તે સમયે એન્ટવર્પ સ્પેનિશ નેધરલેન્ડ્સ(Netherlands)નો ભાગ હતો. 1567માં સ્પેઇનના રાજા ફિલિપે એન્ટવર્પમાં સ્પેનિસ રાજ્યનો વિરોધ કરનારા ઉપર ચડાઈ કરી. તેમનો આશય રોમન કેથોલિક ધર્મનો પ્રચાર કરવાનો પણ હતો. બર્નૂલિઓ પ્રોટેસ્ટન્ટ હોઈને

એન્ટવર્પથી નાસી છુટ્યા. લીઓનનો પુત્ર જેકોબ નાસીને ફ્રેન્કફર્ટ 1570માં આવ્યા. જેકોબનો પુત્ર જેકોબ, જે મરી-મસાલાનો વેપારી હતો તે 1620માં બેસીલ, સ્વિટ્ઝરલૅન્ડ(Basil, Switzerland) આવ્યા. 1622માં સ્વિટ્ઝરલૅન્ડે તેમને નાગરિક બનાવ્યા. તેમના પુત્ર નિકોલૉસ ઔષધ વેચનારા અને શહેરના મૅજિસ્ટ્રેટ હતા, નિકોલૉસનાં પત્ની માર્ગરીથા સ્કૉનૉર(Margratha Schonaur) બૅંકરનાં પુત્રી હતાં.

જે રીતે ભારતમાં રાજકીય ક્ષેત્રે નહેરુ કુટુંબ છે, અમેરિકામાં બૂશ (Bush) કુટુંબ છે, તે જ રીતે બર્નૂલિ કુટુંબ ગણિતના ક્ષેત્રે ખૂબ જ જાણીતું છે. સત્તરમી સદીના છેલ્લા ભાગથી અઢારમી સદીના અંત સુધી સુવિખ્યાત વિદ્વાનો આ કુટુંબે આપ્યા છે. આપણા માટે નામો પરિચિત ન હોઈને યુરોપની ભાષાઓમાં આ નામો જુદી-જુદી રીતે વપરાતાં હોઈને ટેબલ 1માં આ લેખમાં વપરાતાં નામો આપ્યાં છે.

ટેબલ 1

ગુજરાતી	અંગ્રેજી	ફ્રેન્ચ	જર્મન	લેટિન
જેકોબ	James	Jacquas	Jakob	Jakobus
જોહાન્નીસ	John	Jean	Johann	Johannes
ડેનિઅલ	Daniel	Daniel	Daniel	Daniel
નિકોલૉસ	Nicholas	Nikolas	Nikolaus	Nikolaus

બર્નૂલિઓની પ્રતિષ્ઠા જેકોબ I અને જોહાન્નીસ I, બે ભાઈઓથી થઈ. તેઓ પ્રોટેસ્ટન્ટ હોઈને નિકોલૉસ સી.ની ઇચ્છા જેકોબ I ને પ્રોટેસ્ટન્ટ પાદરી(Pastor) બનાવવાની હોઈને જેકોબ I એ 1673માં યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાંથી તત્ત્વજ્ઞાનની માસ્ટર ઑફ આર્ટ્સ(Master of Arts)ની ડિગ્રી મેળવી અને ધર્મશાસ્ત્રનું (Theology) લાયસન્સ પણ 1676માં મેળવ્યું. પણ જેકોબ I ને ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રમાં રસ હોઈને જેકોબ I ને તેમના પિતાનો પાદરી બનાવવાનો નિર્ણય નિરર્થક હતો. આથી 1676ના અંત ભાગમાં ગણિતના ટ્યુટર બન્યા અને પછીનાં બે વર્ષ ફ્રાન્સમાં તે સમયે નવું ગણાતું કાર્ટીસિઅન વિજ્ઞાન(Cartesian Science) ભણ્યા. ફરીથી 1681-82માં નવું વિજ્ઞાન સમજવા માટે ફ્રાન્સમાં રહ્યા અને ઘણા નામાંકિત વિજ્ઞાનીઓને મળ્યા. 1683થી જેકોબ I યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં શીખવતા અને ગણિત, ખગોળશાસ્ત્ર અને યંત્રશાસ્ત્રમાં સંશોધન કરતા.

બર્નૂલિ કુટુંબના ગણિતશાસ્ત્રીઓ (1600-1850)

નિકોલૉસ સીનીઅર
(1623-1708)

જેકોબ I
1654-1705
[Calculus; Ars]

નિકોલૉસ I
1662-1716
[Painter - Alderman]

જોહાન્નીસ I
1667-1748
[Calculus,
best but zealous]

નિકોલૉસ III
1695-1726

ડેનિઅલ I
1700-1782
[Beams, Utility, Hydro]

જોહાન્નીસ II
1710-1790

જોહાન્નીસ III
1744-1807

ડેનિઅલ II
1751-1834

જેકોબ II
1759-1789

આકૃતિ 1

આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે બર્નૂલિ કુટુંબની ત્રણ પેઢીઓમાં આઠ ગણિતશાસ્ત્રીઓ પેદા થયા અને બધા આગળ પડતા(Outstanding) ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ઘણા બધા સરસ માનવીઓ હતા. છેલ્લું નામ બર્નૂલિ હોય તેવા 120 જણની તપાસ કરતાં ઘણા બધા કાયદા(Law), વિજ્ઞાન(Science), સાહિત્ય(Literature), રાજ્યનો કારભાર(Administrative) અને લલિત કલા(Arts)માં સુવિખ્યાત(eminent) થયેલા છે. કોઈ અપજશવાળો (Failure) માણસ નથી. આ બર્નૂલિ કુટુંબમાં બીજી અને ત્રીજી પેઢીમાં ગણિતશાસ્ત્રી બનવાનો કોઈ ખ્યાલ ન હોવા છતાં ગણિતશાસ્ત્રી બન્યા છે.

જોહાન્નીસ I ને તેમના પિતાએ તેમના ધંધામાં લઈ જવા પ્રયત્ન કરેલો, પણ ન ફાવતાં તેમના પિતાએ યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં ભણવાની રજા આપેલી. 1683માં જોહાન્નીસ I અભ્યાસ માટે બેસીલ આવ્યા અને તે બંને ભાઈઓ જેકોબ I અને જોહાન્નીસ I સાથે રહેતા. બંને ભાઈઓએ લાઇબ્નિઝના 1684 અને 1686ના સંશોધન લેખોનો

અભ્યાસ સાથે જ કર્યો. એ સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે લાઇબ્નિઝનું કામ અસ્પષ્ટ હતું. બર્નૂલિઓ જ તેનો અભ્યાસ કરનારા પહેલા હતા અને આનો સુયોગ્ય અભ્યાસ કરનારા હતા. તેમને બંનેને આ સંશોધન લેખો ઉલ્લાસિત કરનારા લાગ્યા અને સાથે-સાથે પડકારનારા પણ લાગ્યા. 1698 સુધીમાં ઘણા પ્રયત્નોએ બન્ને જણા લાઇબ્નિઝના કલનગણિત ઉપર પ્રભુત્વ મેળવી શક્યા.

જેકોબ I 'integral calculus' શબ્દ વાપરનારા સૌથી પહેલા હતા, જ્યારે લાઇબ્નિઝ 'calculus summation' વાપરતા હતા.

જેકોબ I શ્રેઢીઓના(Series)* અભિસાર(Convergence)નો વિચાર કરનારા પહેલા હતા અને શ્રેઢી $\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\dots\frac{1}{n^2}+\dots\right)$ અભિસરે છે તે સાબિત કર્યું.

વિકલ સમીકરણ(Differential Equation) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, જ્યાં $P(x)$ અને $Q(x)$ x નાં વિધેયો છે, ના ઉકેલો મેળવવાની રીત જેકોબ I એ શોધેલી.

જેકોબ I એ ધ્રુવીય યામ (Polar Coordinates) શોધ્યા અને ધ્રુવીય યામમાં દર્શાવતા વક્રોના ગુણધર્મો શોધેલા.

જેકોબ I એ e ની અંદાજિત કિંમત ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લીધેલી રકમનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ ગણતાં ગણતાં મેળવેલી. 100 % વ્યાજે(વાર્ષિક) 1 રૂપિયો વર્ષના અંતે 2 રૂપિયા થાય. વ્યાજ છ મહિને ગણીએ, તો છ મહિના પછી વ્યાજ + મુદ્દલ = 0.50 + 1 = 1.50 થાય. આનું છ મહિના પછી વ્યાજ 0.75 થાય. આમાં મુદ્દલ 1.50 ઉમેરતાં વર્ષના અંતે 2.25 જે વર્ષના અંતે ગણતાં તે કરતાં વધારે થાય. આ જ રીતે દર ચાર મહિને ગણીએ તો વર્ષના અંતે વ્યાજ અને મુદ્દલ 2.44 થાય જે અગાઉ કરતાં વધારે છે. આ જ રીતે દર મહિને, દર અઠવાડિયે અને દરરોજ વ્યાજ ગણીએ તો અનુક્રમે વ્યાજ અને મુદ્દલ વર્ષની આખરે 2.61, 2.69 અને 2.71 રૂ. થાય. જો વ્યાજનો દર સતત ગણીએ તો વર્ષના આખરે વ્યાજ અને મુદ્દલ 2.7182 રૂ. થાય. જે e ની અંદાજિત કિંમત છે.

ગણિતની શાખા તરીકે સંભાવનાનો વિષય કાર્ડનાએ સોળમી સદીમાં શરૂ કર્યો અને ફર્મા અને પાસ્કલે(Fermat and Pascal) તેને વિકસાવ્યો. જેકોબ I નું 'Ars Conjectandi (The Art of Conjecture)' તેમના નિધન પછી 1713માં પ્રસિદ્ધ થયું. આ પુસ્તક આ વિષયની સીમાને નવી સપાટીએ લઈ ગયું. જેકોબ I ની આ શ્રેષ્ઠ કૃતિ (Master Piece) છે.

---

* 14મી સદીમાં ભારતીય ગણિતજ્ઞ માધવએ ત્રિકોણમિતીય શ્રેઢીઓ આપેલ હતી, જે બર્નૂલિએ કરેલા કામના 300 વર્ષ પહેલા મેળવેલ હતી. જેની માહિતી પરિશિષ્ટ 2માં આપેલ છે.

5.3 જોહાન્નીસ I

દરમિયાન જોહાન્નીસ I એ પોતાની ગણિતશાસ્ત્રી તરીકેની નામના ઊભી કરી. ખુલ્લી રીતે જોહાન્નીસ I એ કલનગણિતનું યુરોપમાં પ્રચાર કરવાનું માથે લીધું. ન્યૂટનની સામે લાઇબ્નિઝનો બચાવ કરવા હંમેશાં તૈયાર જ રહેતા. તેમને 'લાઇબ્નિઝના બુલડૉગ (Bulldog, ચીવટવાળો અને બહાદૂર)' તરીકે ઓળખવામાં આવતા. લાઇબ્નિઝના કલનગણિતની સફળતાનું ખરું કારણ બર્નૂલિભાઈઓ. 1684ના અને બીજા સંશોધન લેખોનો બરાબર અભ્યાસ કરીને બંને ભાઈઓએ લાઇબ્નિઝ જોડે કામ કર્યું. 1700ની આસપાસમાં ત્રણે જણાએ સાથે મળીને આપણે જેને પાયાનાં વિકલન અને સંકલનનાં પરિણામો કહીએ છીએ તે મેળવેલાં અને પરિણામો એક્ટા ઇરૂડિટોરમમાં(Acta Eruditorum) પ્રસિદ્ધ થયેલાં.

દાક્તરીનો અભ્યાસ કરીને 1690માં જોહાન્નીસ I પેરિસ આવેલા. તેમણે વિકલનથી કોઈ પણ વક્રની વક્રતા (Curvature) કઈ રીતે મેળવી શકાય તેનાથી પેરિસના અભ્યાસુવર્ગને પ્રભાવિત કર્યા. આમાં યે મારક્વિસ ડી લૉપિટાલ(Marquis de l'Hopital) ખૂબ જ પ્રભાવિત થયા. મારક્વિસ પ્રખ્યાત કુટુંબમાંથી આવેલા. તેમના કુટુંબમાંથી બે માર્સલ્સ અને ઘણા બધા લેફ્ટેનન્ટ જનરલ થયેલા. તેમના પિતાજી એન્ને એલેક્ઝાન્ડર રાજાના લશ્કરમાં લેફ્ટેનન્ટ જનરલ હતા. આથી એ સ્વાભાવિક છે કે માર્ક્વિસ પણ લશ્કરમાં જોડાય. તે લશ્કરમાં જોડાયેલા અને હયદળમાં કેપ્ટન પણ બન્યા. કમનસીબે તેમની આંખો ખૂબ જ નબળી હતી. દશ ફૂટથી વધારે દૂર સ્પષ્ટતાથી જોઈ શકતા ન હતા. આથી લશ્કરમાંથી રાજીનામું આપીને ગણિતમાં ધ્યાન આપતા થયા.

માર્ચ 17, 1694માં લૉપિટાલે જોહાન્નિસ I ને લખ્યું કે જો તેઓ જે પ્રશ્નો લૉપિટાલ બતાવે તેના ઉપર કામ કરે અને આ પ્રશ્નોના ઉકેલો જો કોઈનેય જણાવે નહિ તો તેઓ જોહાન્નીસને વાર્ષિક 300 લિવ્રી આપશે. લિવ્રી (Livre) 781થી 1794 સુધી વપરાતો ફ્રેન્ચ ડૉલર હતો. લિવ્રીનો ખ્યાલ આવે તે માટે તે વખતે ફ્રાન્સમાં આખા દિવસની મજૂરીનો દર અડધો લિવ્રી હતો. જૂન 7, 1694માં લૉપિટાલે જોહાન્નીસ I ને $x = a$ હોય, ત્યારે y ની કિંમત શોધવા કહ્યું, જ્યાં,

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - a^4} - (\sqrt{a^2x})a}{a - \sqrt[4]{ax^3}} \text{ છે.}$$

July, 22, 1694ના રોજ જોહાન્નીસ I એ જેને આપણે લૉપિટાલનો નિયમ કહીએ છીએ તે વાપરીને જવાબ જણાવ્યો. લૉપિટાલે આ નિયમ તેમના લખેલા કલનગણિતના પુસ્તકમાં જણાવ્યો છે.

આકૃતિ 2 : કલન ગણિતનું પ્રથમ પુસ્તક

જોહાન્નીસ I એ એક વર્ષ સુધી લૉપિટાલને તેમની (કન્ટ્રી શેટો ઑફ મારક્વિસ) ગામડાની હવેલીમાં ભણાવ્યા. આ ભાષણોની નોંધ બંને જણ રાખતા. આખરે એક વર્ષ બાદ જોહાન્નીસ I એ પેરિસ છોડ્યું અને લૉપિટાલને પત્રોથી શીખવવાનું ચાલું રાખ્યું. 1696માં લૉપિટાલે જોહાન્નીસ Iનું બધું કામ ભેગું કરીને કલનગણિતનું પહેલું પુસ્તક, "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes." પ્રસિદ્ધ કર્યું. જાણે કે આ પુસ્તકમાં કલનગણિતના પાયાના વિચારોની ચર્ચા કરી નથી, પણ આ પુસ્તકની 1715, 1720 અને 1781ની આવૃત્તિઓ જોતાં કલનગણિતને લોકપ્રિય બનાવવામાં આ પુસ્તકે અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો હતો. જ્યારે જોહાન્નીસ I એ ધ્યાનપૂર્વક આ પુસ્તક જોયું તો બધું તેમના ભાષણોના આધારીત હતું, પણ તેમનો ખ્યાલ તેમના સહી કરેલા કોન્ટ્રાક્ટ ઉપર ગયો. આથી શાંતિપૂર્વક ગમ ખાઈ ગયા. જાણે કે લૉપિટાલના નિધન પછી જોહાન્નીસ I એ તેમના કામની યોગ્ય કદર માટે પ્રયત્ન કર્યો, પણ લૉપિટલના નિયમો જે જોહાન્નીસ I એ શોધેલા, તે બર્નૂલિ નિયમો ન જ બન્યા !!

તે સમયે જોહાન્નીસ I કેવું કલનગણિત શીખવતા તેનો ખ્યાલ આવે તે માટે લૉપિટાલના પુસ્તકના સંકલનના પહેલા ભાષણના થોડાક ભાગોનું ભાષાંતર નીચે પ્રમાણે આપ્યું છે અને આ કલનગણિતનું પહેલું પુસ્તક હોઈને તેના પુઠાંની નકલ આકૃતિ 2માં આપી છે.

5.4 જોહાન્નીસ I બર્નૂલિ સંકલન

આપણે આપેલા પરિમાણ(quantity)નું વિકલ કઈ રીતે મેળવવું તે જોયું. હવે આપણે આનું વ્યસ્ત એટલે કે વિકલનું સંકલ મેળવવું એટલે કે વિકલ શેમાંથી મળે છે તે

બતાવીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે,

dx, x નું વિકલ છે.

$x\ dx$, ($\frac{1}{2}x^2$ + અથવા – અચળ) પરિમાણનું વિકલ છે.

$x^2\ dx$, ($\frac{1}{3}x^3$ + અથવા – અચળ) પરિમાણનું વિકલ છે.

$x^3\ dx$, ($\frac{1}{4}x^4$ + અથવા – અચળ) પરિમાણનું વિકલ છે.

a, p અચળ સંખ્યાઓ છે. અહીં આથી આગળ અચળ દર્શાવ્યો નથી.

$a\ dx$, (ax) નું વિકલ છે.

$ax\ dx$, $(\frac{1}{2}ax^2)$ નું વિકલ છે.

$a\,xx\,dx$, $\left(\frac{1}{3}ax^3\right)$નું વિકલ છે.

આના ઉપરથી વ્યાપક નિયમ : $a\,x^p\,dx$, $\left(a\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)$નું વિકલ છે.

આમ, જો આપણે વિકલમાંથી સંકલ મેળવવું હોય, તો આપેલી રાશી(quantity) એ વિકલ અને નિરપેક્ષ મૂલ્યના ઘાત(Absolute quantity) સાથેનો ગુણક છે કે નહિ તેની તપાસ કરીએ. જો તેમ હોય, તો ઉપર જણાવેલા નિયમ મુજબ સંકલન મેળવી શકાય તેની નિશાની છે.

જો આપણે $dy\sqrt{a+y}$ નું સંકલન મેળવવું હોય તો હું dy અને $\sqrt{a+y} = (a+y)^{\frac{1}{2}}$ ને તેના ગુણક તરીકે જોઉં છું. આથી ઉપર જણાવેલા વ્યાપક નિયમ મુજબ $\frac{(a+y)^{\frac{1}{2}}}{3/2} = \frac{2}{3}(a+y)^{\frac{3}{2}}$ નું વિકલ $(a+y)^{\frac{1}{2}}dy$ છે. આથી $\sqrt{a+y}\ dy$ નું સંકલન $\frac{2}{3}(a+y)^{\frac{3}{2}}$ + અથવા – અચળ છે.

એ જ રીતે $x\sqrt[3]{a^2+x^2}\ dx$ નું સંકલન મેળવીએ જે

$$\frac{1}{2}\frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(a^2 + x^2) = \sqrt[3]{a^2+x^2} \text{ છે.}$$

$\frac{dy}{\sqrt{a+y}}$ નું સંકલન $2\sqrt{a+y}$ છે.

$dx \cdot \frac{1}{x}$નું સંકલન $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$ છે.

[નોંધ : બર્નૂલિએ આ ભૂલ સુધારીને $\int \frac{dx}{x} = lnx$ મેળવેલું.]

કોઈ વખત આપેલી રાશીનો સંકલ આ નિયમથી પહેલી નજરે ન પણ મળે. પણ થોડાક ફેરફાર કરવાથી સરળતાથી મેળવી શકાય છે, જે નીચેના દાખલાઓમાં છે.

1. જો $dx\sqrt{a^2xx + x^4}$ ને $x \ dx\sqrt{a^2 + x^2}$ લખીએ, તો તેનો સંકલ

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}(a^2+x^2)^{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(a^2+xx)(a^2+xx)^{\frac{1}{2}}$ મળે.

અને $dx\sqrt{a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3}$ ના બદલે $dx(a+x)^{\frac{3}{2}}$ લખીએ, તો

તેનો સંકલ $\frac{1}{1+\frac{3}{2}}(a+x)^{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}}$ મળે.

2. આ બીજી રીતે પણ બને છે : સંકલન શક્ય બને તે પહેલાં એક કે વધારે ચલોને વર્ગમૂળની નિશાનીની નીચે લેવાં પડે, જે નીચેના અભિવ્યક્તિ(expression)માં $(3ax^3dx + 4x^4dx)\sqrt{ax + xx}$ છે.

આપણા સંકલનના નિયમ પ્રમાણે આનો સંકલ ન મળે, પણ આપણે એક x ને વર્ગમૂળ નીચે લઈ જઈએ, ત્યારે (નીચેનું) અભિવ્યક્ત, $(3ax^2dx + 4x^3dx)\sqrt{ax^3 + x^4}$ બને છે, અને આ વિકલનું સંકલ નિયમ પ્રમાણે મેળવી શકાય. તે $\frac{2}{3}(ax^3 + x^4)\sqrt{ax^3 + x^4}$ છે.

3. જો કોઈ અપૂર્ણાંક હોય, જેના છેદમાં વર્ગ, ઘન કે કોઈ ઘાત હોય, ત્યારે આપણે છેદનું વર્ગમૂળ નિરપેક્ષ રાશી છે તે ધારીએ છીએ. આથી $\frac{x\,dx}{a^4 + 2a^2xx + x^4}$ માં $a^2 + xx$ નિરપેક્ષ રાશિ પસંદ કરીએ ત્યારે આપણને સંકલ

$\frac{1}{2}\frac{(a^2+xx)^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{2(a^2+xx)}$ મળે. જો આપણે $a^4 + 2a^2xx + x^4$ ને નિરપેક્ષ રાશી પસંદ કર્યો ન હોત, તો આપણે અપૂર્ણાંકનું સંકલ મેળવી શક્યા ન હોત.

4. બે રાશીઓને જુદી જુદી ગણતાં સંકલ ન મળે, તો કોઈ વખત તેમના સંયોજનનું (combination) સંકલ મળે તેમ બને. જેમકે,

$\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+xx}} + \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax+xx}}$ લઈએ. બંને રાશીઓમાંથી કોઈ રાશીનું સંકલ મળતું નથી. જ્યારે તેમનો સરવાળો $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax+xx}}$ સંકલ

$\frac{1}{2}\frac{(2ax+xx)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = (2ax+xx)^{\frac{1}{2}}$ આપે છે.

5. કોઈ વખત અપૂર્ણાંકને સંકલ ન હોય તેવું દેખાય, પણ એવું બને કે અંશ અને છેદને એકસરખી રાશીથી ગુણતાં સંકલ સહેલાઈથી મેળવી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{3a+2x}}$ લઈએ. અંશ અને છેદને x વડે ગુણતાં $\frac{ax\,dx + x^2dx}{\sqrt{3ax^2+2x^3}}$ મળે અને તેનો સંકલ $\frac{1}{6}\frac{(3ax^2+2x^3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}(3ax^2+2x^3)^{\frac{1}{2}}$ છે.

6. ત્યારે ફરીથી, અંશ અને છેદને એક સરખી રકમથી ભાગતાં આપણને કોઈ વખત સંકલ મળે. દાખલા તરીકે $\frac{ax\,x\,dx}{\sqrt{a^2xx+x^4}}$ લઈએ. સંકલ મળે તેમ નથી; અંશ અને છેદ બંનેને x વડે ભાગતાં આપણને $\frac{ax\,x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ મળે; અને તેનો સંકલ નિયમ પ્રમાણે $\frac{1}{2}\frac{a(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = a\sqrt{a^2+x^2}$ છે.

1695માં ગ્રોનિંગ્નીન, હોલેન્ડથી (Groningen, Holland) ગણિતના પ્રોફેસરની ઑફર આવી. જોહાન્નીસ Iને તેમના મોટાભાઈ જેકોબ I સાથેનો ઝઘડો વધતો જતો હતો. આથી જોહાન્નીસ I એ માની લીધેલું કે જ્યાં સુધી જેકોબ I છે ત્યાં સુધી યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલ, સ્વીટ્ઝરલૅન્ડમાં તેમની ગણિતના પ્રોફેસર બનવાની શક્યતા ઓછી છે. આથી જોહાન્નીસ I એ યુનિવર્સિટી ઑફ ગ્રોનિન્ગીનની ઑફર સ્વીકારી. નેધરલૅન્ડના 12 પ્રોવિન્સો છે. જેમાંના બે પ્રોવિન્સો ઝુઈડ હૉલેન્ડ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. કોઈ કોઈ વખત આખા દેશ નેધરલૅન્ડ માટે હૉલેન્ડ પણ વપરાય છે.

સપ્ટેમ્બર 1695માં જોહાન્નીસ I, તેમનાં પત્ની અને સાત મહિનાનો નિકોલૉસ III હૉલેન્ડ જવા નીકળ્યા. બે દીકરાઓ ડેનિઅલ I(Daniel I, બધા બર્નૂલિઓમાં સૌથી વધુ પ્રખ્યાત) અને જોહાન્નીસ II હૉલેન્ડમાં જન્મ્યા. 1705માં જેકોબ I નું નિધન થતાં યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલે જોહાન્નીસ I ને ગણિતના અધ્યાપક બનાવ્યા. જોહાન્નીસ I જીવ્યા ત્યાં સુધી યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં રહ્યા. ઑઇલર(Eular) જોહાન્નીસ Iના વિદ્યાર્થી હતા.

બે સરખી ઊંચાઈએથી લટકાવેલી સાંકળ(ફક્ત તેના વજનથી નીચે લટકાય છે)ના આકારને રજ્જુવક્ર(Catenary) કહેવામાં આવે છે. ગેલિલીયોએ પરવલય (Parabola) કહેલો, પણ કલનગણિતની શોધના કારણે આનું સાચું સમીકરણ મેળવવાનો પ્રશ્ન ઊભો થયો. આ વક્રનું સમીકરણ મેળવવાનો પ્રશ્ન 1690માં જેકોબ I એ સંશોધન પેપરમાં રજૂ કર્યો. જેકોબ I એ એક વર્ષ બરાબર પ્રયત્ન કર્યો પણ કંઈ પરિણામ ન આવ્યું. જોહાન્નીસ I એ એક જ રાતની મહેનતથી $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ મેળવેલું!!

જોહાન્નીસ I એ Acta Eruditorum માં (June 1696) પ્રશ્ન પૂછ્યો : દીવાલમાં બે ખીલીઓ ગમે ત્યાં મારેલી છે, અને ઉપરની ખીલીને નીચેની ખીલીને તારથી (આ તાર સરળતાથી વળી શકે છે) જોડી છે અને આ તારનો આકાર સરળ (smooth) વક્ર છે. આ તાર ઉપર મણકો સરળતાથી મુસાફરી કરી શકે છે. મણકાને ઉપરની ખીલીથી નીચેની ખીલીઓ ઓછામાં ઓછા સમયમાં જવા માટે તારનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ ?

સીધી રેખા કે આકરા ઢાળવાળા વક્રને બદલે ઓછા ઢાળવાળો વક્ર જે અંગ્રેજીમાં brachistochrome ના નામથી ઓળખાય છે તે જોઈએ. આ વક્રથી આ બંને બિંદુઓને જોડવામાં આવે તો ઓછામાં ઓછો સમય મણકો ઉપરના બિંદુથી નીચેના બિંદુએ જવામાં લેશે.

સાયકલના આગળના પૈડા ઉપર કોઈ પણ બિંદુ લઈએ. સાયકલને ચલાવીએ ત્યારે આ બિંદુ પણ ચાલશે. આ બિંદુનો રસ્તો તે બ્રાચિસ્ટોક્રોમ(Brachistochrome) વક્ર. આના ઉપરથી બંને ભાઈઓએ 'Calculus of variations' વિકસાવ્યું.

આપણા પ્રશ્નનો ઉત્તર બંને ભાઈઓએ આપેલો, પણ જોહાન્નીસ I ના ઉત્તરની રીતમાં ભૂલ હતી, જ્યારે જેકોબ I ની રીત સાચી હતી. જોહાન્નીસ I, જેકોબ I ની રીતને પોતાની શોધ ગણાવતા.

5.4 નિકોલૉસ II

નિકોલૉસ I, વ્યક્તિચિત્ર ચિત્રકાર(Portrait Painter) અને ઉપનગરપતિ (Alderman) હતા. તેમના પુત્ર નિકોલૉસ IIનો જન્મ 21 ઑક્ટોબર 1687માં બેસીલ, સ્વિટ્ઝરલૅન્ડમાં થયો. યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાંથી 1704 માં ગ્રેજ્યુએટ થયા. તેમણે કાયદાનો અભ્યાસ કરેલો અને બાજુમાં બંને કાકાઓના વર્ગોમાં જતા. 1709માં Ph.D.ની ડિગ્રી માટે સંભાવનાના સિદ્ધાંતનો કાયદાઓમાં ઉપયોગ કરીને "Dissertatio Inauguralis Mathematico - Juridica de Usu Artis Conjectandi in Jure" થીસીસ લખી. 1716માં યુનિવર્સિટી ઑફ પાડુઆ(Padua) માં ગણિતના પ્રોફેસર તરીકે ગયા. ભૂમિતિ અને

વિકલ સમીકરણ(Differential Equations)માં કામ કર્યું. યુનિવર્સિટી ન ગમતાં 1719માં બેસીલ પાછા આવ્યા. 1722 માં યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં તર્કશાસ્ત્રના અધ્યાપક બન્યા અને 1731માં જ્યૂરિસ્પ્રુડન્સ(Jurisprudence કાયદાનું શાસ્ત્ર કે ફિલસૂફી)ના વડા બન્યા.

5.5 નિકોલૉસ III

જોહાન્નીસ I ના સૌથી મોટા પુત્ર નિકોલૉસ III નો જન્મ 6 ફેબ્રુઆરી 1695માં બેસીલ, સ્વિટ્ઝરલૅન્ડમાં થયો. 1708માં યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં ગણિત અને કાયદાનો અભ્યાસ કર્યો. 1711માં તત્ત્વજ્ઞાનની માસ્ટરની ડિગ્રી મેળવી અને 1715માં કાયદામાં ડૉક્ટર થયા. 1716-1717 વેનિશમાં ટ્યુશનો આપ્યાં. 1719માં યુનિવર્સિટી ઑફ પાડુઆના ગણિત વિભાગના વડા બન્યા. 1723માં બર્નર ઑબીરીન સ્કૂલમાં (Berner Oberen Schule) કાયદાના અધ્યાપક બન્યા. નિકોલૉસ III એ વક્રો, વિકલ સમીકરણો અને સંભાવના ઉપર કામ કર્યું. 1720માં લંબચ્છેદી વક્રના વ્યસ્ત(Reciprocal Orthogonal Trajectories)નો પ્રશ્ન કરેલો.

1725માં નિકોલૉસ III અને તેમના નાના ભાઈ ડેનિઅલ I ધી સેઇન્ટ પિટર્સબર્ગ અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ(The Saint Petersburg Academy of Sciences)માં જોડાયા. કમનસીબે રશિયા આવ્યા પછી આઠ મહિના પછી તાવ આવ્યો અને માંદા પડ્યા. અને નાની ઉંમરે 31 જુલાઈ 1726ના રોજ તેમનું નિધન થયું. તેમની જગ્યાએ બર્નૂલિ ભાઈઓની સલાહથી લીઓન્હાર્ડ ઑઇલર(Leonhard Euler)ની નિમણૂક કરવામાં આવી.

5.6 ડેનિએલ I (Daniel I)

8 ફેબ્રુઆરી 1700માં જોહાન્નીસ I ના ત્યાં ગ્રોનિન્ગીન, નેધરલૅન્ડ્સમાં ડેનિએલ I નો જન્મ થયો. બર્નૂલિ કુટુંબ આર્થિક રીતે સમૃદ્ધ હતું. મોટા ભાગનાને કહેવામાં આવતું કે ગણિતના ક્ષેત્રમાં તમને આર્થિક રીતે ખાસ ફાયદો થવાનો નથી, આથી ડૉક્ટરીનું કે તમારો પોતાનો ધંધો કરવાનું પસંદ કરજો. અને આ પ્રમાણે કરાવવા પ્રયત્નો પણ કરેલા, છતાંય કોણ જાણે કેમ ગણિતનું આકર્ષણ જીતી જતું. જોહાન્નીસ I એ ડેનિઅલ I ને ઘરના ધંધાઓમાં લઈ જવા પ્રયત્ન કર્યો પણ સફળતા ન મળી. ડેનિએલ I એ તેર વર્ષની વયે યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં અભ્યાસ શરૂ કર્યો. તર્કશાસ્ત્ર અને તત્ત્વજ્ઞાનમાં 1715માં B.A.ની ડિગ્રી મેળવી અને 1716માં M.A. થયા. તેમના પિતાએ તેમને મેડિસિનનો અભ્યાસ કરવા જણાવ્યું, ડેનિએલ I એ એક શરતે સ્વીકાર્યું. તેમના પિતાએ ડેનિએલ I ને ગણિત ભણાવવું. ડેનિએલ I એ મેડિસિનનો અભ્યાસ બેસીલ, હીડેલબર્ગ(Heidelberg), જર્મની અને સ્ટ્રાસબોર્ગ(Strasbourg), ફ્રાન્સમાં કર્યો અને એનેટોમી અને બોટનીમાં 1721માં Ph.D. થયા. ડેનિએલ I ને પણ તેમના પિતાની જેમ વિદ્યામૂલક(Academic) કારકિર્દી શરૂ કરવી હતી. યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં બે વખતે જગ્યાઓ ખાલી પડી.

ડેનિએલ I બધી રીતે લાયક હતા પણ આખરનો નિર્ણય લોટરીથી લેવાયો અને બંને વખતે ડેનિએલ I ખોઈ બેઠા.

બંને ભાઈઓ નિકોલોસ III અને ડેનિએલ I 1723માં વેનીસ જાય છે. ડેનિએલ I મેડિસિનનો અભ્યાસ કરવાના હતા અને ડૉક્ટર તરીકે કામ કરવાનું હતું. ગણિતના સારા નસીબે ડેનિએલ ખૂબ જ માંદા પડી જાય છે. આથી ડૉક્ટર તરીકેનું કામ ન કરી શક્યા અને મેડિસિનનો અભ્યાસ પણ કરી ન શક્યા. આરામ કરતાં કરતાં ગણિતમાં ધ્યાન ગયું. અને તેમના ગણિતના સંશોધનના કામનું પુસ્તક 'Exercitations Mathematicae (Mathematical Exercises)' તરીકે 1724માં પ્રસિદ્ધ થયું. આ પુસ્તકના ચાર ભાગ છે. પહેલા ભાગમાં સંભાવના છે. તેમના કાકા જેકોબ I ના પુસ્તકની સમીક્ષા કરીને કાર્ડના રમતની સંભાવનાની ચર્ચા કરી છે. બીજો ભાગ પ્રવાહીની ગતિ વિષેનો છે અને ત્રીજો અને ચોથો ભાગ વિકલ સમીકરણો અને ભૂમિતિનો છે. નોંધવા જેવી કોઈ વાત હોય તો તે છે કે ડેનિઅલ I એ પુસ્તકની શરૂઆતમાં જ તેમના માટે "ડેનિએલ બર્નૂલિ, જોહાન્નીસ I ના પુત્ર" લખ્યું અને જીવ્યા ત્યાં સુધી આ રીતે લખતા. વેનિસમાં તે સમયે અગત્યના ગણિતશાસ્ત્રીઓ ગોલ્ડબાક(Goldbach), બર્કલી(Berkeley), સ્ટર્લિન્ગ(Stirling) વગેરે હતા અને દરેકનું ધ્યાન તે પુસ્તક તરફ ગયું.

દરિયાઈ મુસાફરીમાં બોટ કે વહાણ કઈ જગ્યાએ છે તે જાણવા માટે ચોક્કસ અક્ષાંસ અને રેખાંશ જાણવા જરૂરી છે. આ જાણવા માટે ચોક્કસ સમય જાણવો ખૂબ જરૂરી છે. ચોક્કસ સમય દરિયામાં માપવા માટેનાં સાધનોની હરીફાઈ અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ, પેરિસે યોજેલી. ડેનિએલ I એ કલાક-શીશી(hour-glass) કઈ રીતે બનાવવી કે જે દરિયામાં કોઈ પણ સંજોગોમાં ચોક્કસ સમય બતાવે તેની ડિઝાઇન તૈયાર કરીને એ પેરિસ અકેડેમીને મોકલી આપી.

5.7 અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ, રશિયા (Academy of Sciences, Russia)

'પીટર ધી ગ્રેટ' રશિયાના રાજાએ જ્યારે પેરિસમાં ફ્રેન્ચ અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ જોઈ ત્યારથી જ તેમણે રશિયાની નવી રાજધાની અને તેમાં રશિયન અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસની કલ્પના કરેલી. આથી, તેમણે નવી રાજધાની 'સેઇન્ટ પિટર્સબર્ગ (Saint Petersburg)' નીવા નદીના કિનારે 27 મે, 1703ના રોજ બાંધવાનું શરૂ કરેલું. રશિયાની અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ માટે લાઇબ્નિઝ પીટર ધી ગ્રેટને 1711 અને 1716 વચ્ચે ત્રણ વખત મળેલા. 1724માં રશિયન અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસની સ્થાપના થઈ. રશિયન વિદ્વાનો તે સમયે પૂરતા પ્રમાણમાં મળતા ન હોઈને પરદેશથી જામેલા પ્રોફેસરો લાવવાનું નક્કી થયું. આ પ્રોફેસરો અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ, રશિયાની આબરૂ વધારશે તેવી પણ ગણતરી હતી. ધી ગ્રેટ પીટરે તે સમયના યુરોપના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી જોહાન્નીસ I ને લાવવા પ્રયત્ન કરેલો,

પણ જોહાન્નીસ I ને બેસીલ બહાર જવામાં કોઈ રસ ન હતો. જોહાન્નીસ I એ તેમના બીજા નંબરના પુત્ર ડેનિએલ I ની ભલામણ કરી.

ડેનિએલ I નું પુસ્તક અને પેરિસની હરીફાઈમાં પ્રથમ નંબરનું ઇનામ જોઈને રશિઅન અકેડેમીએ ડેનિએલ બર્નૂલિને રશિઅન અકેડેમીમાં જોડાવાનું આમંત્રણ આપ્યું. ડેનિઅલ I ના પિતા જોહાન્નીસ I એ તેમના મિત્રોને લખ્યું કે, ''ડેનિએલ I ને વાર્ષિક 600 રૂબલ્સ, રહેવાની યોગ્ય સગવડ, બળતણ માટે જેટલાં જોઈએ તેટલાં લાકડાં અને મીણબત્તીની ઑફર આવી છે.''

આ સમયે ડેનિએલ I પચીસ વર્ષના હતા અને ઘેરથી દૂર જવા તૈયાર ન થયા, શક્ય છે કે ઠંડીથી ડરી ગયા હોય. જ્યારે તેમના મોટાભાઈ નિકોલસ III જે બર્ન, સ્વીટ્ઝરલૅન્ડમાં કાયદાના અધ્યાપક હતા. તેમણે ડેનિએલ I ની સાથે સેન્ટ પિટ્ર્સબર્ગ જવાની તૈયારી બતાવી. આથી ડેનિઅલ I એ પ્રો. ગોલ્ડબાક જે વેનિસમાં મળેલા, તેમને લખ્યું અને ગોલ્ડબાકે નિકોલસ III ને પણ અકેડેમીમાં જોડાવવાનું આમંત્રણ પાઠવ્યું. તે સમયે આ બંને ભાઈઓ માટે સ્વીટ્ઝરલૅન્ડમાં કોઈ યોગ્ય જગ્યા જ ન હોઈને સેન્ટ પિટર્સબર્ગ જવાનો નિર્ણય જરાયે ખોટો ન ગણાય. લીઓનહાર્ડ ઑઇલર જોહાન્નીસ I ના વિદ્યાર્થી હોઈને નિકોલસ III અને ડેનિએલ I ના મિત્ર પણ બની ગયેલા. બંને ભાઈઓ જ્યારે સેન્ટ પિટર્સબર્ગ આવવા નીકળ્યા તે સમયે ઓઇલરને વચન આપેલું કે ઑઇલર માટે અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસમાં કોઈ જગ્યા શોધી કાઢશે.

સેન્ટ પિટર્સબર્ગ આવતાંની સાથે જ ઑઇલર માટે કોઈ જગ્યાની તપાસ કરવા માંડ્યા. તે સમયે પણ તેમના ઓળખીતા પ્રો. ગોલ્ડબાક અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસના મંત્રી હતા અને તેમણે મંત્રીને જણાવ્યું કે ઑઇલર ખૂબ જ હોશિયાર હોઈને અકેડેમીમાં લાવવાનો પ્રયત્ન કરવો જોઈએ. બંને ભાઈઓ તેમને આપેલા એપાર્ટમેન્ટમાં ગોઠવાઈ જઈને આનંદથી યંત્રશાસ્ત્ર અને ગણિતના પ્રશ્નો ઉપર કામ કરતા હતા. પહેલો શિયાળો પસાર થઈ ગયો અને અચાનક જ નિકોલસ III ના પેટમાં દુઃખવા માંડ્યું. વર્ષ પૂરું થાય તે પહેલાં અન્નનળીની નીચેના ભાગમાં ચેપી રોગના કારણે નિકોલસ III નું નિધન થયું. ડેનિએલ I માટે ખૂબ જ માઠા સમાચાર હતા. તે ખૂબ જ નિરાશ થઈ ગયેલા. તે પોતે તો આવવા તૈયાર ન હતા પણ નિકોલસ III ના કારણે આવેલા. નસીબજોગે ડેનીઅલ I ના મિત્ર ઑઇલર આવવાના હોઈને તેમની આશાયે દિવસો કાઢતા રહ્યા.

પેશાબને લગતા રોગના કારણે 1725માં 51 વર્ષના પીટર ધી ગ્રેટનું અવસાન થયું. પીટરનાં વિધવા પત્ની કેથરીન I એ બધો વહીવટ સંભાળી લીધો. બે વર્ષ પછી એટલે કે 1727માં 40 વર્ષની વયે તે પણ અવસાન પામ્યાં. કેથરીન અવસાન પામ્યાં તે સમયે 12 વર્ષના પીટર II નું રાજ્ય હતું. પીટર II ના બધા સંબંધીઓની સત્તા માટેની

ખેંચતાણ વધી ગઈ. આ કારણે માથા વગરના દેશમાં રામભરોસે ચાલતી અકેડેમીમાં ડેનિએલ I એ ઑઇલરને આવકાર્યા.

ઑઇલર અને ડેનિએલ I બંને જણ ડેનિએલ I ના સુખદાયી અને સરસ રાચ-રચીલાવાળા એપાર્ટમેન્ટમાં છ વર્ષ સાથે રહ્યા. એકબીજાની સોબત ગમતી અને બંને જણે મુગ્ધ થઈ જવાય તેવા ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રનું નિર્માણ કર્યું. બંને વૈજ્ઞાનિકોએ સાથે મળીને કામ કર્યું, એકબીજાની સિદ્ધિઓને માન આપતા અને અઘરા પ્રશ્નોના ઉકેલો માટે બંને જણ ભારે જહેમત ઉઠાવતા. બંને જણાએ ભેગા મળીને પ્રવાહીના વહેણનો અભ્યાસ કર્યો. ખાસ તો લોહીની ગતિ અને દબાણ વચ્ચેનો સંબંધ શોધવા માટે ડેનિએલ I એ રશિયન અકેડેમીમાં ઘણા બધા પ્રયોગો કર્યા અને તેમાંથી $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{constant}$ જે બર્નૂલિ સમીકરણ તરીકે ઓળખાય છે તે મેળવેલું. અહીંયાં ρ પ્રવાહીની ઘનતા, V પ્રવાહીનો વેગ અને p દબાણ છે. આ નિયમનો અર્થ એ થાય છે કે જેમ પ્રવાહીની ગતિ વધે તેમ દબાણ ઓછું થાય. આ નિયમના કારણે વિમાનની પાંખો એ રીતે બનાવેલી હોય છે કે ઉપરનો ભાગ બર્હિગોળ(Convex) હોય છે જ્યારે નીચેનો ભાગ સપાટ હોય છે. ઉપરના ભાગની હવાને એટલા જ(નીચેની હવા જેટલા) સમયમાં વધારે અંતર જવાનું હોઈને નીચેની હવાની ગતિ કરતાં ઉપરની હવાની ગતિ વધારે હોય છે. પાંખની ઉપરની હવાનું દબાણ પાંખની નીચેની હવા કરતાં ઓછું હોવાથી પાંખને ઉપરની બાજુ ધક્કો મારે છે. આ રીતે વિમાન અધ્ધર જાય છે. ડેનિએલ I એ પ્રવાહી વિજ્ઞાનની શરૂઆત કરી અને તેમણે તેમનું પુસ્તક Hydrodynamica લખવાનું શરૂ કર્યું અને સેન્ટ પિટર્સબર્ગમાં લગભગ પૂરું કર્યું. ઘણા પ્રયત્નો પછી 1733માં 33 વર્ષના હતા ત્યારે યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલે વનસ્પતિશાસ્ત્રના (Botany) અધ્યાપક તરીકેની નિમણૂકનો પત્ર આપ્યો. તે સેન્ટ પિટર્સબર્ગની ઠંડીથી થાકેલા હોઈને મોડાવહેલા તેમના ક્ષેત્રમાં જઈ શકશે તે આશાએ તે નોકરી સ્વીકારી.

બેસીલ ઝુરીચ, જીનીવા પછીનું ત્રીજા નંબરનું સ્વીટ્ઝરલૅન્ડનું શહેર છે. સ્વિસ, ફ્રાન્સ અને જર્મનીની સરહદો મળે છે. બેસીલનાં પરાંઓ ફ્રાન્સ અને જર્મનીમાં છે!! જૂન 9, 1501 થી બેસીલ સ્વીસ કૉનફેડરેશનમાં જોડાયું. યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલની સ્થાપના 1460 માં થઈ. તે સમયે યુનિવર્સિટી પ્રમાણમાં નાની હતી તે સમયે તે યુનિવર્સિટીમાં કુલ 12 પ્રોફેસરો અને સૌથી ઓછા વિદ્યાર્થીઓ હતા. હાલમાં તદ્દન જુદી વાત છે.

યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં જવાનું નક્કી થતાં જ તેમણે તેમના નાનાભાઈ જોહાન્નીસ II ને સેન્ટ પિટર્સબર્ગ આવવાનું આમંત્રણ આપ્યું. જોહાન્નીસ II તેમના માતાપિતાનો વિરોધ હોવા છતાંયે આવ્યા. ડેનિએલ I અને ઑઇલરે સાથે કામ કર્યું અને જોહાન્નીસ II અકેડેમીનું

વાતાવરણ ખૂબ જ ગમ્યું. બંને ભાઈઓએ 1733ના ઉનાળામાં બેસીલ જવા માટે સેન્ટ પિટર્સબર્ગ છોડ્યું. આ છોડતાં પહેલાં ડેનિઅલ I એ ગ્રહોના પોતાની ધરીઓની આસપાસ ગોળગોળ ફરવાની અસરોના લગતો નિબંધ તૈયાર કરીને પેરિસ અકેડેમીને નિબંધની હરીફાઈ માટે મોકલી આપ્યો. બંને ભાઈઓ આ લાંબા માર્ગમાં વચ્ચે રોકાતા રોકાતા બેસીલ આવ્યા.

ઘેર આવ્યા પછી પેરિસથી તેમને અને તેમના પિતાને સંબોધીને પેરિસ અકેડેમીએ મોકલેલો પત્ર મળ્યો. પત્ર ખોલ્યો અને તેમાં તે અને તેમના પિતા બંને જણ પેરિસનું પહેલું ઇનામ જીતેલા. તેમના પિતા ઘેર આવે તેની અધીરાઈથી રાહ જોતા હતા. તેમના પિતાજી ઘેર આવ્યા તેવા જ ગર્વથી તે પત્ર તેમણે તેમના પિતાજીને આપ્યો. જોહાન્નીસ I એ પત્ર વાંચ્યો અને ખૂબ જ ગુસ્સે થઈ ગયા. તે વખતે જોહાન્નીસ I 66 વર્ષના હતા અને બોલ્યા, "આ તે મને કેમ કર્યું ?" ડેનિએલ I બોલ્યા, "પણ આપણે બંને જીત્યા. તમને નથી લાગતું કે તે અદ્ભુત સમાચાર છે ?"

જોહાન્નીસ I બોલ્યા, "ના. મારા બરાબર તને ગણવો તે તારા માટે ખોટું છે. તું મારું બાળક છે. મારી મદદ વગર તારાથી કશું જ થઈ શકેલું નથી. બહાર નીકળી જા."

ડેનિએલ I બોલ્યા, "શું ?"

જોહાન્નીસ I બોલ્યા, "મેં કહ્યું કે ઘર બહાર નીકળ. હવેથી આ ઘર તારું નથી. હું ઇચ્છું છું કે તું રશિયામાં જ રહ્યો હોત."

ડેનિઅલ I ને ખૂબ જ ભારે આઘાત લાગ્યો અને આ ઘા રૂઝયો જ નહિ.

1743માં 43 વર્ષની ઉંમરે ડેનિએલ I વનસ્પતિશાસ્ત્રમાંથી શરીરવિજ્ઞાનશાસ્ત્ર (Physiology) વિભાગમાં અને આખરે 1750 માં ભૌતિકશાસ્ત્ર વિભાગમાં આવ્યા. જીવ્યા ત્યાં સુધી ભૌતિકશાસ્ત્ર વિભાગમાં ભણાવ્યું. તે તેમના કાકા જેકોબ I ની જેમ બહુ જ સરસ શિક્ષક હતા. તેમનાં ભાષણોમાં સરસ મજાના ભાષણને અનુરૂપ પ્રયોગો પણ કરી બતાવતા. આના કારણે વિદ્યાર્થીઓ ખૂબ જ ધ્યાનપૂર્વક તેમનાં ભાષણો સાંભળતા. તેમનાં સંશોધનો અને તેને સમજાવતા અવનવા પ્રયોગો વિદ્યાર્થીઓ માટે બહુ જ મોટું આકર્ષણ રહેતું.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

(1) Bell, E.T. Men of Mathematics, Simon and Schustaer, New York, 1965

(2) Tent, M.B.W. Leonhard Euler and the Bernoullis, (Taylor & Francis Group, LLC), A. K. Peters, Ltd., 2009.

◆

લીઓનહાર્ડ ઓઇલર (Leonhard Euler)

6. કલનગણિતનાં પુસ્તકો અને લીઓનહાર્ડ ઑઇલર (Leonhard Euler)

"A function of variable quantity is an analytic expression composed in any way what so ever of the variable quantity and numbers or constant quantities."
– Leonhard Euler

6.1 પ્રસ્તાવના

ગણિતના લાંબા ઇતિહાસમાં ઑઇલરનો જોટો જડવો ખૂબ જ મુશ્કેલ છે. તેમનું બધું કામ સમાવવા માટે 92 જેટલાં મોટા કદનાં પુસ્તકોની જરૂર પડી. ઓગણીસમી સદીના મોટા ગણિતશાસ્ત્રીઓ ઑઇલરના કામમાંથી શીખ્યા. લાપ્લાસે લખ્યું, "ઑઇલરને વાંચો. આપણા બધામાં એ શિક્ષક છે." ગૉસના શબ્દોમાં, "ગણિતનાં ઘણાં બધાં ક્ષેત્રોમાં ઑઇલરના કામનો અભ્યાસ એ જ સારામાં સારી શાળા છે અને કોઈ પણ આના બદલે ન ચાલે." આર્ગોએ કહ્યું, "જે રીતે માનવો શ્વાસ લે છે. ગરુડ પવનમાં ઊડે છે તે જ રીતે કોઈ પણ પ્રયત્ન કર્યા વગર ઑઇલર ગણી શકતા." આવા અસાધારણ લીઓનહાર્ડ ઑઇલરનો જન્મ 15 એપ્રિલ, 1707માં બેસીલ(Basil), સ્વિટ્ઝરલૅન્ડમાં થયેલો.

લીઓનહાર્ડ ઑઇલરના પિતાજી પૉલ ઑઇલર યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં ધર્મશાસ્ત્ર(Theology) ભણેલા અને તે વખતના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રીઓના કુટુંબ બર્નૂલિના જેકોબ I બર્નૂલિના વિદ્યાર્થી હતા. જેકોબ I ના નાના ભાઈ જોહાન્નીસ I બર્નૂલિ અને પૉલ ઑઇલર સાથે રહેતા. પૉલ પ્રોટેસ્ટન્ટ મિનિસ્ટર બન્યા અને પ્રોટેસ્ટન્ટ મિનિસ્ટરની પુત્રી માર્ગરેટ બ્રુકર(Margaret Brucker)ને પરણ્યા. લીઓનાહાર્ડને બે નાની બહેનો, એન મરિયા(Ann Maria) અને મરિયા મેગડેલિના(Maria Magdalina) અને નાનો ભાઈ જોહાન હેઇનરિચ(Johann Hainrich) હતા. પૉલે સારા નસીબે લીઓનહાર્ડને પ્રાથમિક શાળાનું ગણિત ભણાવવાની ભૂલ કરી.

યુવાન લીઓનહાર્ડને શું થવું છે તેની નાનપણથી જ ખબર હતી. છતાંયે તેમના પિતાની ઇચ્છાને માન આપીને 1720માં 13 વર્ષની વયે યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં ધર્મશાસ્ત્ર અને હિબ્રૂ ભણ્યા. જોહાન્નિસ I બર્નૂલિ અઠવાડિયે એક વખત લીઓનહાર્ડને ભણાવવાનો વખત કાઢતા. જોહાન્નિસ Iને ખ્યાલ આવી ગયો કે તે બુદ્ધિશાળી લીઓનહાર્ડને ભણાવી

રહ્યા છે. 17 વર્ષની વયે 1724માં માસ્ટરની ડિગ્રી મેળવી. ત્યારે તેમના પિતાએ ગણિત મૂકીને ધર્મશાસ્ત્ર ઉપર ધ્યાન રાખવા કહ્યું. જ્યારે જોહાન્નિસ I એ પૉલને જણાવ્યું કે લીઓનહાર્ડ મોટો ગણિતશાસ્ત્રી થવા સર્જાયેલો છે નહિ કે મિનિસ્ટર થવા. ત્યાર પછી જ પૉલે લીઓનહાર્ડને ખાસ કહ્યું નહિ. 1726માં અવાજના પ્રસરણને લગતી થીસીસ તૈયાર કરી પણ યુનિવર્સિટી ઑફ બેસીલમાં નોકરી મેળવવામાં સફળ ન થયા. પણ 1727માં ફ્રેન્ચ અકેડમીના જહાજ ઉપર કઈ જગ્યાએ જહાજનો કુવાસ્તંભ રાખવો તેના તેજસ્વી પૃથક્કરણ માટે 19 વર્ષની વયે બીજા નંબરનું ઈનામ મેળવ્યું.

6.2 રશિયન અકેડેમિ

યુરોપમાં અઢારમી સદીમાં સંશોધન કેન્દ્રો ફક્ત યુનિવર્સિટીઓ જ ન હતી. સંશોધનના કામો માટે તે સમયે દીર્ઘદષ્ટિવાળા રાજાઓ રૉયલ અકેડમિને (Royal Academy) મોટો ટેકો કરતા. આજના જેવી આ અકેડમીઓ ન હતી. તે સમયની અકેડમીઓ સંશોધનનાં કામ માટે પગારો ચૂકવતી. સંશોધકો અને તેમના કુટુંબીઓ પ્રતિષ્ઠિત રીતે જીવી શકે તે જાતના પગારો અને સગવડો અપાતી. ઑઇલરના ઘરમાં એક સમયે અઢારથી વધારે માણસો હતા અને તે સમયે તે બધા પ્રતિષ્ઠિત રીતે જીવી શકે તેટલો પગાર અપાતો.

સત્તરમી સદીના છેલ્લા ભાગમાં રશિયાના રાજા 'પીટર ધી ગ્રેટ'ને રશિયન અકેડમિ શરૂ કરવાનો વિચાર આવ્યો. પીટરનું 1725માં નિધન થયું ત્યાં સુધી શરૂ કરવાનું ખાસ કામ થયું નહિ. તેમનાં પત્ની કેથરિન I એ (Cathariae I) તેમના પતિના વિચારોને અમલમાં મૂક્યા. જાણીતા વિદ્વાનોને આમંત્રણ આપવાના બદલે તેમનાં બાળકો તેમના જેવાં હશે તેમ માનીને તેમને અકેડમીમાં જોડાવવા માટે આમંત્રણો પાઠવવામાં આવ્યાં. સ્વિટ્ઝરલૅન્ડના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી જોહાન્નિસ I બર્નૂલિને આમંત્રણ પાઠવવાને બદલે તેમના પુત્રને આમંત્રણ પાઠવ્યું. આ તેમના સૌથી મોટા પુત્ર નિકોલૉસ III કે વચલા પુત્ર ડેનિઅલ I માટે હતું તે નક્કી ન થઈ શક્યું. આખરે આ બન્ને પુત્રો સેઇન્ટ પિટર્સબર્ગ(Saint Petersburg)ની રશિયન અકેડમિમાં જોડાયા. નિકોલૉસ III જે રોમમાં લૉના પ્રોફેસર હતા તે વાર્ષિક 1000 રૂબલના પગારે ગણિતના પ્રોફેસર તરીકે જોડાયા, જ્યારે ડેનિઅલ I ફિઝિઑલોજીના પ્રોફેસર તરીકે વાર્ષિક 800 રૂબલના પગારે જોડાયા. 1726માં બન્ને પુત્રોના પિતાના વિદ્યાર્થી લીઓનહાર્ડે વિદાય આપી તે સમયે આ બંને ભાઈઓએ લીઓનહાર્ડ માટે પિટર્સબર્ગમાં યોગ્ય જગ્યા શોધી કાઢશે તેવું વચન આપ્યું.

ડેનિઅલ I એ તેનું વચન રાખ્યું. તેમણે જણાવ્યું કે પિટર્સબર્ગ અકેડમીના વૈદકના લગતા વિભાગ(Medical Section)માં જગ્યાની શક્યતા છે. ઑઇલરે તુરત જ શરીર-વિજ્ઞાન(Physiology) અને વૈદક ઉપરનાં ભાષણોમાં હાજરી આપવાનું શરૂ કર્યું. એ દિવસોમાં વૈદક(Medicine) ગણિતથી દૂર ગણાતું ન હતું. કાનનું વિજ્ઞાન એ અવાજનો અભ્યાસ અને અવાજનો અભ્યાસ એ તરંગોનો અભ્યાસ. બર્નૂલિઓ ઝડપી હતા. ઑઇલરને અકેડમીના મેડિકલ સેક્સનમાં એસોસિએટ તરીકેની નિમણૂકનો પત્ર મળ્યો. ઑઇલરને મેડિકલ સેક્સનમાં કામ કરવાની કોઈ તકલીફ ન લાગી. બર્નૂલિને જોઈએ તે ઝડપે ઑઇલર નીકળી ન શક્યા પણ 1727માં વસંત ઋતુ દરમિયાન 130 રૂબલનો મુસાફરીના ખર્ચ પેટેનો ડ્રાફ્ટ ઑઇલરને મળ્યો અને પિટર્સબર્ગ જવા નીકળ્યા. જે દિવસ પિટર્સબર્ગ પહોંચ્યા તે જ દિવસે અકેડમીના સ્થાપક રાણી કેથરીન Iનું નિધન થયું.

ડેનિઅલ I બર્નૂલિની જેમ ઑઇલરે દ્રવ્યગતિ વિજ્ઞાનના (Hydro dynamics) પ્રશ્ન તરીકે લોહી-ભ્રમણના પ્રશ્નનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રશ્નોએ દ્રવ્યગતિ વિજ્ઞાનમાં ઑઇલરના નામે પ્રસિદ્ધ સમીકરણો નિર્માણ કરવામાં ખૂબ અગત્યનો ફાળો આપ્યો. પિટર્સબર્ગના શરૂઆતનાં વર્ષોમાં ઑઇલર એવું ભાગ્યે જ વિચારી શકતા કે તેમની જિંદગી આ અકેડમી જોડે આટલી બધી મજબૂત રીતે જોડાયેલી રહેશે. ફસ્સે લખ્યું છે, "આપણી અકેડમીના પચાસ વર્ષના ગાળા દરમિયાન ઑઇલર આપણી અકેડમીનું ગર્વ અને ખ્યાતિ હતા. તેમની નજર સમક્ષ શરૂઆત થઈ, ઘણી વખત મૃત્યુ પામી અને સજીવન પણ થઈ." ઑઇલર અકેડમીને જ્યારે જ્યારે પડતી જોતા ત્યારે હચમચી જતા. પીટર II અકેડમીમાં બહારથી (રશિયાના નહિ) આવેલા વૈજ્ઞાનિકોને શંકાસ્પદ રીતે જોતા અને ફંડ પણ પૂરતા પ્રમાણમાં ન આપતા. આથી વૈજ્ઞાનિકોને ખૂબ જ મુશ્કેલી પડતી. પીટર I ના 1730ના નિધન પછી મુશ્કેલભર્યો સમય હતો જ્યારે ઘણા બધા અકેડમી-સિઅન્સ(Academicians) પ્રસ્થાન કરી ગયા અને જીવ ઉપર આવી ગયેલા ઑઇલરે નૌકાસેન્ય(Navy)માં જોડાવવાની તૈયારી કરી, પણ આની જરૂર ન પડી. ઊલટું, ભૌતિકશાસ્ત્ર વિભાગમાં જગ્યા પડી અને તેઓ ભૌતિકશાસ્ત્ર વિભાગના વડા અને ભૌતિકશાસ્ત્રના પ્રોફેસર તરીકે વાર્ષિક 400 રૂબલના પગારથી જોડાયા. બે જ વર્ષમાં ડેનિઅલ I બર્નૂલિ રશિયા છોડીને સ્વિટ્ઝરલૅન્ડ પાછા ગયા. આથી ગણિતવિભાગના વડા અને ગણિતના અધ્યાપક તરીકે વાર્ષિક 600 રૂબલના પગારે જોડાયા. આ પગાર બર્નૂલીથી અડધો હતો.

ઑઇલરને એવું લાગ્યું કે હવે બાકીની આખી જિંદગી પિટર્સબર્ગમાં વિતાવવી પડશે, ઑઇલરે સંજોગોનો ઉપયોગ કરીને લગ્ન કરીને સ્થિર થવાનો વિચાર કર્યો. પીટર ધી ગ્રેટ હૉલેન્ડથી સ્વીસ અકેડમિક પેઇન્ટર જીસેલને (Gsell) પિટર્સબર્ગ લાવેલા. જીસેલની પુત્રી કેથેરિના(Catharina) સાથે 7 જાન્યુઆરી 1734ના રોજ લીઓનહાર્ડનાં લગ્ન થયાં. રાજકીય વાતાવરણ બગડે જતું હતું અને આમાંથી છૂટવા પ્રયત્નો કરવાનો વિચાર કરતા હતા, પણ ઝડપથી એક પછી એક બાળકો આવે જતાં હતાં. સાથે-સાથે ઑઇલરને બાળકો ગમતાં હતાં અને ઘણી વખતે નાનું બાળક તેમના ખોળામાં બેઠું હોય અને મોટાં બાળકો તેમની આસપાસ રમતાં હોય અને ઑયલર અઘરામાં અઘરી ગણિતની વિચારવિભાવના (Concept) ખૂબ જ સરળતાથી લખતા હોય તે માન્યામાં ન આવે તેવું છે, પણ તે હકીકત છે. તેમનાં 13 બાળકોમાંથી ત્રણ પુત્રો અને બે પુત્રીઓ હયાત હતાં. ઑઇલરના નવા નવા ગણિતના વિચારોના લગતી ઘણી દંતકથાઓ છે. એક દંતકથામાં એવું કહ્યું છે કે જમવાના પહેલા ટહુકા અને બીજા ટહુકા વચ્ચેના અડધા કલાકમાં ગણિતનું સંશોધન પેપર મોકલવા તૈયાર કરી શકતા.

6.3 કલનગણિત અને કલનગણિતનાં પુસ્તકો

ઑઇલરની સાચી ખ્યાતિ તો તેમનાં લખેલાં પુસ્તકોના કારણે છે. પ્રાથમિક ધોરણથી સંશોધન સુધીનાં પુસ્તકો લખવામાં તેમને શરમ ન હતી. તેમનાં ત્રણ પુસ્તકો Introduction in analysin infitarum(1748)માં લખેલું અને 1755માં પ્રસિદ્ધ થયેલું "Institutions Calculi Differentialis" જે વિકલન કલનગણિત છે. આ પ્રથમ પુસ્તક છે જે સંપૂર્ણ અને બરાબર હોય. મોટા ભાગનાં કલનગણિતનાં પુસ્તકો આના આધારે લખાયેલાં છે. એ જ રીતે સંકલન કલનગણિતનું ઑઇલરનું લખેલું અને 1768માં પ્રસિદ્ધ થયેલું, "Institutionum Calculi Integralis" પુસ્તક છે. આ ત્રણે પુસ્તકો એટલાં સરસ હતાં કે લગભગ 75 વર્ષ બધા કલનગણિત આ પુસ્તકોમાંથી ભણ્યા. ભૂમિતિ માટે યૂક્લિડનાં લખેલાં પુસ્તકો ગણાય, તેમ કલનગણિત માટે ઑઇલરનાં લખેલાં પુસ્તકો ગણાય.

આવો બીજો અગત્યનો ગ્રંથ યંત્રશાસ્ત્ર(Mechanics)નો. કલનગણિત વાપરીને 29 વર્ષની વયે 1736માં લખેલો અને જેણે સાચા અર્થમાં આધુનિક યુગની શરૂઆત કરી. ભૂમિતિ માટે દકાર્તની વૈશ્લેષિક ભૂમિતિ(Analytical Geometry)એ જે કર્યું, તે યંત્રશાસ્ત્ર માટે ઑઇલરના યંત્રશાસ્ત્રના પુસ્તકે કર્યું.

આ ઉપરાંત તેમણે વિકલન સમીકરણો(Differential Equations), અનંત શ્રેઢીઓ(Infinite Series), elliptic Integrals વગેરે ઉપર પુસ્તકો લખેલાં. આથી ઑઇલર "પૃથક્કરણનો અવતાર(Analytic Incarnate)" ગણાય છે.

હવે આપણે તેમના 1755ના વિકલનના પુસ્તકમાં અત્યલ્પ પરિમાણ(infinite small quantity)નું વર્ણન જોઈએ :

કોઈ પણ પરિમાણને જ્યાં સુધી તે લોપ ન થાય ત્યાં સુધી ઘટાડી શકાય છે અને તે પછી તે જરાયે નહિ(Nothing) થઈ જાય છે. પણ અત્યલ્પ પરિમાણ એ અદશ્ય થતું પરિમાણ છે અને આથી આના બરોબર ખરેખર 0 છે... ઑઇલર માટે વિકલન dx શૂન્ય હતું : જરાયે વધારે નહિ, જરાયે ઓછું નહિ – ટૂંકમાં જરાયે નહિ. આથી રાશિઓ x અને $x + dx$ સરખી છે અને આથી જરૂર પડે અદલબદલ થઈ શકે. એમણે બારીકાઈથી જોયું કે, ‘‘સીમિત(Finite)ની સરખામણીમાં અત્યલ્પ અદશ્ય થાય છે અને આથી અત્યલ્પને ભૂલી જઈ શકાય છે.’’ વધારામાં $(dx)^2$ અને અથવા $(dx)^3$ અત્યલ્પ dx કરતાં નાના હોઈને અને એ જ પ્રમાણે મરજી મુજબ ભાર હલકો કરી શકાય.

ઘણી વખત ઑઇલર વિકલનોના ગુણોત્તર શોધતા હોય છે અને ખરેખર તો કલનશાસ્ત્રનું કામ ÷ ની કિમત નક્કી કરવાનું છે અને ઑઇલરના કહેવા પ્રમાણે, ‘‘વિકલન ગણિત માટે મહત્ત્વની વાત બે અત્યલ્પ રાશિઓના ગુણોત્તર શોધવાની વાત છે.’’

દા.ત., આપણે ઑઇલરની વિધેય $y = \sin x$ નું વિકલન શોધવાની રીત જોઈએ.

ઑઇલરે માધવની શ્રેઢીઓમાં

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

z ની જગ્યાએ વિકલન (differential) dx મૂકતાં,

$$\sin dx = dx - \frac{(dx)^3}{3!} + \frac{(dx)^5}{5!} - \frac{(dx)^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos dx = 1 - \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^4}{4!} - \frac{(dx)^6}{6!} + \ldots$$

મેળવ્યાં. dx નાં ઘાતો જેવા કે, $(dx)^2$, $(dx)^3$... વગેરે અત્યલ્પ હોઈને, ન ગણતાં આ શ્રેઢીઓ,

$\sin dx = dx$ અને $\cos dx = 1$ મળશે.

$y = sin\,x$ સમીકરણમાં ઑઇલરે xની જગ્યાએ $x + dx$ અને yની જગ્યાએ $y + dy$ મૂકતાં.

$$y + dy = sin\,(x + dx)$$
$$= sin\,x\ cos\,dx + cos\,x\ sin\,dx$$
$$= sin\,x + cos\,x\,dx$$
$$\therefore \quad dy = cos\,x\,dx$$
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\,x) = cos\,x$$

ઑઇલરનું નિધન 1783માં થયું અને કલનશાસ્ત્રનો પ્રથમ સંશોધન લેખ લાઇબ્નિઝે 1684માં પ્રસિદ્ધ કરેલો. એક સદીમાં ઘણું બધું થયું અને ઘણું બધું કરવાનું રહ્યું. ઑઇલર અને તેમના અગાઉના ગણિતશાસ્ત્રીઓ ખાસ સંકલનો કે ખાસ શ્રેઢીઓ જોતા. સતત અને વિકલનીય વિધેયોના સામાન્ય ગુણધર્મો એ નવા સમાજની જોવાની રીત.

6.4 બર્લિન અકેડમિ ઑફ સાયન્સિસ

બર્લિન એ સમયે પૃશિયાની રાજધાનીનું શહેર હતું. 1740માં રાણી એન્ના(Anna)ના મૃત્યુ પછી રશિયન સરકાર ઉદાર બની, પણ ઑઇલર રશિયન સરકારથી થાકી ગયા હોઈને ફ્રેડ્રિક ધી ગ્રેટ(Fredrick the Great)નું બર્લિન અકેડમીમાં જોડાવાનું આમંત્રણ સ્વીકાર્યું. જૂન 19, 1741 માં સેઇન્ટ પીટર્સબર્ગ બર્લિન અકેડમીમાં જોડાવવા છોડ્યું. ઑઇલર બર્લિન આવ્યા. ફ્રેડ્રિક ધી ગ્રેટ શહેરમાં ન હતા. તેમણે નવા આવેલા ગણિતશાસ્ત્રીને સ્નેહભર્યો પત્ર લખ્યો અને ઑઇલરને કોર્ટમાં બૉલ(Court Ball)માં આમંત્ર્યા. રાજમાતાએ ઑઇલરને પૂછ્યું, "તમે શા માટે મારી જોડે બિલકુલ વાત કરવા માગતા નથી ?" ઑઇલરે જવાબ આપ્યો, "મેડમ, મને માફ કરજો પણ હું આનાથી ટેવાયો નથી. હું જે દેશમાંથી આવું છું ત્યાં જે રાજકુટુંબ જોડે બોલે તેને ફાંસી આપવામાં આવે છે." ઑઇલર ધીરે ધીરે બર્લિનની જિંદગીથી ટેવાતા ગયા. પિટર્સબર્ગ કરતાં જરાયે ઓછું કામ ન હતું. 1744માં બર્લિન અકેડમીને વ્યવસ્થિત ગોઠવી અને ઑઇલર ગણિત વિભાગના ડિરેક્ટર બન્યા. ઑઇલરના રાજા જોડેના સંબંધો એકદમ સારા ન હતા. ભાગ્યે જ રાજાએ ઑઇલરના કામને વખાણ્યું હોય.

બર્લિનમાં લગભગ પચીસ વર્ષ રહ્યા તે દરમિયાન બે અગત્યનાં પુસ્તકો "The Introduction in analysin infinitocum" અને "The Institutiones calculi

differentials" પ્રસિદ્ધ કરેલાં. આ ઉપરાંત 380 લેખો લખ્યા. ઑઇલરને રાજકન્યાને પ્રાથમિક વિજ્ઞાન શીખવવાનું કહ્યું. બસો પત્રોમાં જુદા જુદા વિષયો જેવા કે પ્રકાશ, અવાજ, ગુરુત્વાકર્ષણ, લોહચુંબક, ખગોળશાસ્ત્ર વગેરે સમજાવ્યા છે. આ 'જર્મન રાજકન્યાને પત્રો (Letters to German Princess)' ખૂબ જ લોકપ્રિય પુસ્તક છે. ઘણી બધી યુરોપની ભાષાઓમાં આનું ભાષાંતર થયું છે.

ઑઇલરે રશિયા છોડ્યું, છતાંયે તે સેઇન્ટ પિટર્સબર્ગ જર્નલનું સંપાદન કરતા અને તેમના સંશોધનના લેખો તે જર્નલમાં પ્રસિદ્ધ કરતા. તદ્ઉપરાંત રશિયન સરકાર તરફથી નિયમિત પગાર મળતો.

બર્લિનનું બધું બરાબર ન હતું, ફ્રેડરિક ધી ગ્રેટને હાજર-વિદ્વાનો માટે સમજાવી ન શકાય તેવો અનાદરનો ભાવ હતો. પ્રભાવિત વ્યક્તિત્વના કારણે રાજામાં હાજર-વિદ્વાનો માટે ઉગ્ર તિરસ્કાર હતો. ફ્રેડરિક ધી ગ્રેટ તેમની જાતને વિદ્વાન, વિનોદી મહાપંડિત માનતા. તેમને તત્ત્વજ્ઞાન, કાવ્યો અને ફ્રેન્ચ ખૂબ જ ગમતું. અરે ફ્રેન્ચ એટલું બધું ગમતું કે બર્લિન અકેડેમિનો વહીવટ ફ્રેન્ચમાં થતો જર્મનમાં નહિ. રાજાને ઑઇલર ગમાર કે ગામડિયો – હા, તેજસ્વી ગમાર પણ ગમારો બધા જ સરખા, લાગતો. ઑઇલર ખૂબ જ મહેનતું કુટુંબી માણસ હતા અને ધાર્મિક પ્રોટેસ્ટન્ટ હતા. જ્યાં સુધી દેખી શકતા ત્યાં સુધી દરરોજ સાંજના આખું કુટુંબ ભેગું કરતા અને બાઇબલનું પ્રકરણ વાંચતા અને તેમાંથી ઉપદેશ આપતા. ધર્મશાસ્ત્ર તેમનો મનગમતો વિષય હતો અને કેલ્વિનિસમના (Calvinism) સિદ્ધાંતોને ખાસ વળગી રહેતા.

ફ્રેડરિક ઑઇલરને, ''મારો મધ્યાક્ષ(My cyclops)'' કહીને ઑઇલરની ક્રૂર મશ્કરી કરતા. ફ્રેડ્રિકને તેમની કોર્ટમાં બધાનો આદરસત્કાર કરી શકે તે માટે સાદા અને સીધા ઑઇલરના બદલે સુફિયાણા તત્ત્વજ્ઞાનીની જરૂર જણાઈ. ઑઇલરના માટે અસહ્ય પરિસ્થિતિ ઊભી થઈ. ઑઇલરને તેમના પુત્રો માટે પૃશિયામાં કોઈ ભવિષ્ય ન દેખાતાં, 1766માં 59 વર્ષની ઉંમરે કેથરિન ધી ગ્રેટના હાર્દિક આમંત્રણથી સેન્ટ પિટર્સબર્ગ પાછા જવાનો નિર્ણય લીધો. સાથે સાથે તેમણે જે માગેલું તે બધું જ રશીયન સરકારે આપ્યું. તેમણે વાર્ષિક પગાર 3000 રૂબલ માગ્યા, જે પ્રમાણમાં વધારે હતો. તેમનાં પત્ની માટે પેન્શન અને તેમના પુત્રોને માટે ઊંચી પદવીની નોકરીઓની માગણી પણ સ્વીકારી.

6.5 ફરીથી રશિયામાં

ઑઇલર પિટર્સબર્ગ જુલાઈ 17, 1766 ના રોજ આવ્યા. પચીસ વર્ષ બહાર બર્લિનમાં રહ્યા. રાણી કેથરિને(Catherine) રાજવંશીને જે રીતે આવકારે તે રીતે ઑઇલરને આવકાર્યા.

તેમના અને તેમના અઢાર સગાઓ માટે ફર્નિચર સાથેનું મોટું મકાન રહેવા માટે આપ્યું અને રાણીએ પોતાનો રસોઈયો પણ આપ્યો.

લડાઈના કારણે ઑઇલર ઘણાં બધાં પરિણામો પ્રસિદ્ધ ન કરી શકેલા, તે બધાં જ પિટર્સબર્ગ લાવ્યા. આ કરતાં યે ઘણા બધા નવા વિચારો પણ લાવેલા. જિંદગીએ ઑઇલરને ઉતાવળ કરવા કહ્યું. 1771 માં તેમની બીજી આંખમાં દેખાતું બંધ થયું. લગભગ આંધળા અને થોડાક દુઃખ સાથે પણ ગણિતનું કામ ચાલુ રાખ્યું. ઘણાને જેવા કે તેમના પુત્ર અને એકેડમિશીયનો ક્રાફ્ટ(Kraft), ફસ્સ(Fuss) અને લેક્સેલને(Lexell) દોરવણી આપતા પણ મોટા ભાગે લખાવતા અને પાંચ વર્ષ દરમિયાન 400 લેખો અને 10 મોટાં પુસ્તકો લખાવ્યાં. અંધાપાની સાથે-સાથે બહેરાશ પણ ઉમેરાતી ગઈ. આ આંધળા અને ઉંમરલાયક માણસ ધીમે-ધીમે મુશ્કેલીઓમાં પણ આનંદ સાથે આગળ વધ્યા તે ધ્યાનમાં રાખવા જેવો પાઠ છે. આ સદીઓ સુધી યાદ રહેશે. ઑઇલરની હિંમત, દઢ નિશ્ચયીપણું અને હારમાં પણ ખુશીપણું દરેકને માટે પ્રેરણાદાયી છે.

1770 માં તેમનાં પત્નીનું નિધન થયું અને એક વર્ષ પછી તેમનાં પત્નીનાં બહેન સાથે લગ્ન કર્યાં. જિંદગી દરમિયાન ઑઇલરની યાદશક્તિ અસાધારણ હતી. તેમને પહેલી 100 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને તેમની છ સુધીની ઘાતો યાદ હતી. તેમને 347^6 અથવા 237^4 ની કિંમતો યાદ કરતાં વાર ન લાગતી.

સપ્ટેમ્બર 18, 1783 ના રોજ તે સમયે તાજા શોધાયેલા 'યુરેનસ' ગ્રહની ભ્રમણકક્ષાની ગણતરી કરવાની રૂપરેખાની ચર્ચા કરી. આ પછી બપોરના તેમના પૌત્ર સાથે રમતાં-રમતાં અને ચા પીતાં હૃદયરોગનો આકસ્મિક હુમલો થયો અને હાથમાંથી ચલમ(Pipe) પડી અને બોલ્યા, ''હું મૃત્યુ પામું છું.'' આ સાથે જ ગણિતનું મોટું એન્જિન બંધ પડી ગયું.

6.6 ઉપસંહાર

સંકેતલિપિમાં શિસ્ત ઑઇલર લાવ્યા. ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ માટે A, B, C અને આ ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ માટે a, b, c વાપરીએ છીએ તે ઑયલરે શરૂ કરેલું. વિધેયને મુખ્ય કેન્દ્ર લઈને ત્રિકોણમિતિ, લઘુગણક(Logarithm) અને ઘાતાંકિય (Exponential) વિકસાવ્યું. હાલમાં આપણે જે રીતે વિધેયો સમજીએ છીએ તે ઑઇલરના પ્રતાપે છે. વિધેય માટે f અને sin, cos, e વગેરે સંજ્ઞાઓ ઑઇલરે શરૂ કરેલી. કલનગણિતની ઘણી નવી શાખાઓ શરૂ કરનારા પણ ઑઇલર હતા.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

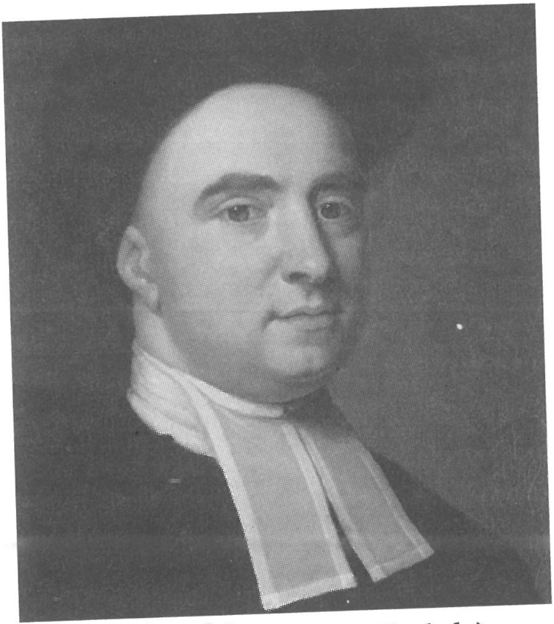
(1) Bell, E. T. Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1965.

(2) Dunham, William. Euler The Master of US all. The Mathematical Association of America, 1999.

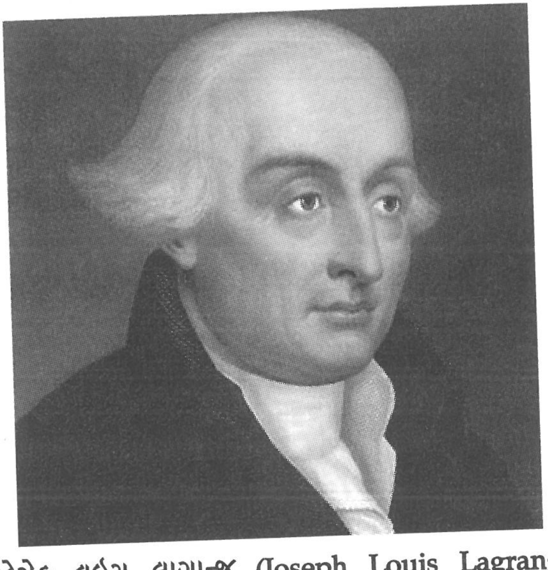
(3) Gindkin, Simon. Tales of Mathematicians and Physicists. Springer, 2007

(4) Dunham, William, Journey through the Genius : The Great Theorems of Mathematics. John Wiley & sons, Inc. 1990.

◆



જ્યોર્જ બર્કલી (George Berkely)



જોસેફ લૂઈસ લાગ્રાન્જ (Joseph Louis Lagrange)

7. કલનગણિતનો પાયો : જ્યૉર્જ બર્કલી (George Berkely) અને લાગ્રાન્જ(Lagrange)

"And what are these fluxions? The velocities of evenescent increments. And what are these same evenescents increments? They are neither finite quantities nor quantities infinitely small nor yet nothing. May we call them the ghosts of departed quantities."

– ***George Berkely***

7.1 પ્રસ્તાવના

અઢારમી સદીની શરૂઆતના ગણિતશાસ્ત્રીઓ જે કલનગણિતની રીતોની પાછળ પડેલા તેમણે કલનગણિતના પાયાની જરાયે ચિંતા ન કરી. આ નવી રીતો બરાબર કામ કરે છે કે નહિ તેની જરાયે ચિંતા ન હતી; કારણ કે અત્યાર સુધી તો ધારવા કરતાં સારી રીતે કામ કર્યું. હવે કરે જશે તેવી વધારે પડતી શ્રદ્ધા હતી. આથી કલનગણિતના પાયાની ચિંતા કરવાનું કોઈ કારણ ન હતું. બહારના માણસની ટીકાના કારણે ગણિતશાસ્ત્રીઓને કલનગણિતના પાયાની ચિંતા કરવી પડી અને તે બહારના માણસ જ્યૉર્જ બર્કલી હતા.

અઢારમી સદીમાં કલનગણિતના પાયાના બે ભાગ હતા. વિકલ ગુણોત્તર (Differential quotient) અને સંકલન(Integration). આથી કલનગણિતના પાયાની વાત જ વિકલનથી શરૂ થાય છે. આપણે $y = x^2$ નું વિકલન જોઈએ. જો x ની નવી કિંમત $x + h$ હોય, જ્યાં h નાનો છે, તો $y = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ બને છે. એટલે કે, જો x માં h નો ફેરફાર થાય, તો y માં $2xh + h^2$ નો ફેરફાર થાય. આથી, ફેરફારનો ગુણોત્તર $= \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$ છે. આથી x^2 નો વિકલ ગુણોત્તર $= 2x + h$ છે, $2x$ નહિ. h નું શું થયું ? આ જ પાયાનો વાંધો બિશપ બર્કલીનો હતો. જો $h = 0$ હોય, તો વિકલ ગુણોત્તર $2x$ થાય જે સાચો જવાબ છે. જો $h = 0$ હોય, તો ફેરફારનો ગુણોત્તર $= \dfrac{2xh + h^2}{h}$ કઈ રીતે મેળવી શકાય ? બિશપ બર્કલીએ આ વાંધો લઈને, ગણિતશાસ્ત્રીઓને સાચા અર્થમાં કામે લગાડ્યા.

7.2 જ્યૉર્જ બર્કલી(George Berkeley)

જ્યૉર્જ બર્કલીનો જન્મ થોમસટાઉન, કાઉન્ટી કિલ્કીની, આયરલૅન્ડ (Thomastown, County Kilkenny, Ireland)માં ઉમદા બર્કલી કુટુંબમાં 13 માર્ચ, 1685માં થયેલો. કિલ્કીની કૉલેજ અને ટ્રિનિટી કૉલેજ, ડબ્લિનમાંથી 1704 માં B.A.ની ડિગ્રી અને 1707 માં M.A.ની ડિગ્રી મેળવી. તેઓ ટ્રિનિટી કૉલેજમાં ગ્રીકના ટ્યૂટર અને લેક્ચરર તરીકે રહ્યા. 1707 માં ટ્રિનિટી કૉલેજમાં જૂનિયર ફેલો તરીકે નિમાયા. 1709 માં An Essay towards a New Theory of Vision અને 1710 માં A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge લખવા માટે જાણીતા બન્યા. 1709માં Deacon(પાદરી જેવું જ) અને 1710 માં પાદરી (Priest) બન્યા.

1713માં ટ્રિનિટી કૉલેજમાંથી રજા લઈને આઠ વર્ષ યુરોપમાં જુદી જુદી જગ્યાએ ફર્યા. 1720 માં લંડન પાછા આવ્યા અને તેમણે De Motu નામનું પુસ્તક લખ્યું જેમાં તેમણે ન્યૂટનનો અવકાશ(Space), સમય(Time) અને ગતિ(Motion) નિરપેક્ષ (Absolute) છે તેનો અસ્વીકાર કર્યો છે. ડબ્લીનમાં ભણાવવાનું શરૂ કર્યું અને ભણાવવાનું અને વહીવટી કામ ત્રણ વર્ષ કર્યું. 1724 માં Derrg ના ડીન બન્યા અને ટ્રિનિટી કૉલેજ જોડેના સંબંધનો અંત આવ્યો.

બર્મ્યુડા(Bermuda)માં તેમનો ખ્યાલ રોમન કેથોલિક ધર્મના પાદરીઓ તૈયાર માટે સેમિનરી(Seminary) સ્થાપવાનો હતો અને તેને માટે બ્રિટિશ પાર્લમેન્ટે £ 20,000 આપવા કહેલું. જ્યૉર્જ 1728 માં ઍન ફૉસ્ટર(Ann Foster) જોડે લગ્ન કરીને અમેરિકા આવ્યા. તેઓએ ન્યૂપૉર્ટ, ર્‌હોડ આઇલૅન્ડ(Newport, Rhode Island) નજીક ફાર્મ(લગભગ 90 એકર) ખરીદ્યું અને તેમાં તેમણે ઘર બાંધ્યું, જેનું નામ વ્હાઇટ હૉલ(White Hall) રાખ્યું. આ ઘર હજુયે ઊભું છે. જ્યારે તેમને સમાચાર મળ્યા કે બ્રિટિશ પાર્લમેન્ટ જણાવ્યા પ્રમાણે આર્થિક ટેકો કરશે નહિ ત્યારે તેમણે લંડન પાછા જવાનો નિર્ણય કર્યો. જતા પહેલાં તેમની લાઇબ્રેરીનાં પુસ્તકો હાર્વર્ડ (Harvard) અને યેલ(Yale)ના પુસ્તકાલયોને વહેંચી આપ્યાં અને ફાર્મ યેલ યુનિવર્સિટીને આપ્યું.

લંડન આવ્યા પછી તેમણે, "The Analyst : A discourse(વાર્તાલાપ) addressed to an infidel(નાસ્તિક) Mathematician." નામની પુસ્તિકા લખી. આ પુસ્તિકામાં તેમણે આધુનિક વિશ્લેષણ(Modern Analysis)ના ઉદ્દેશ, સિદ્ધાંતો અને સંદર્ભો ધાર્મિક કોયડાઓ અને વિશ્વાસના મુદ્દાઓ વધારે સ્પષ્ટ રીતે વિચારેલા છે અથવા દેખીતી રીતે તારવેલા છે કે નહિ તે તપાસ્યું છે. આ પુસ્તિકા કલનગણિતના પુસ્તક માટે ખૂબ જ અગત્યની નીવડી. ફ્લોરીન કાજોરિના(Florin Cajorina)ના કહેવા પ્રમાણે, "The Most Spectacular(ભવ્ય) event of the century in the history of British Mathematics." આ અમારી દૃષ્ટિએ ખરેખર સાચું હોઈને તે પુસ્તિકાના અગત્યના ભાગોનું ભાષાંતર કે વર્ણન આપ્યું છે.

નોંધ : સાન ફ્રાન્સિસ્કોની સામે આવેલા ઑકલૅન્ડ(Oakland)માં ૧૦ અધ્યાપકો અને ૪૦ વિદ્યાર્થીઓથી યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફૉર્નિયાની શરૂઆત થયેલી. ઑકલૅન્ડની ઉત્તરમાં કૉલેજ ઑફ કેલિફૉર્નિયા માટે જમીન ખરીદાઈ અને આ કૉલેજના ટ્રસ્ટી ફ્રેડરિક એચ. બિલ્લિન્ગ (Frederick H. Billings)સે આ નવા કેમ્પસનું નામ એન્ગલો - આયરિશ (Anglo - Irish) તત્ત્વજ્ઞાની જ્યૉર્જ બર્કલીના નામ ઉપરથી બર્કલી નામ સૂચવ્યું. આજે આપણે તેને પ્રખ્યાત યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફૉર્નિયા, બર્કલીથી ઓળખીએ છીએ. આ એ જ જ્યૉર્જ બર્કલી જેણે એકલા હાથે ગણિતશાસ્ત્રીઓને સીધા રાખેલા.

આપણે જેને વિકલિત કહીએ છીએ તેને ન્યૂટન ફ્લક્સિઓન(Fluxion) કહે છે. ચલ x ને વહેતો x(Flowing x) તરીકે ઓળખે છે. ફ્લક્સિઓન ક્ષિતિના રહસ્યો ઉકેલવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી હોઈને ફ્લક્સિઓન મેળવવાની રીત.

III ફ્લક્સિઓન મેળવવાની રીત પારદર્શક કે અપારદર્શક, સુસંગત (Consistent) કે પ્રતિકૂળ(repugnant), પ્રદર્શક(demonstrative) કે સંદિગ્ધ(Precarious) છે કે નહિ તે અત્યંત નિષ્પક્ષતાથી તપાસ કરીને એ તપાસ તમારા નિર્ણય ઉપર છોડીશ.

XIV આ મુદ્દાને વધારે સ્પષ્ટ કરવા હું કારણો જણાવીશ અને પૂરા પ્રકાશમાં તમારી સમક્ષ લાવીશ.

હું ધારું છું કે જથ્થો(Quantity) x વહે છે અને વહેવાથી વધે છે અને તે વધારાને હું $\overline{\mathrm{O}}$ કહું છું. આથી વહેવાથી તે $x+\overline{\mathrm{O}}$ બને છે, અને તે સમયમાં $\overline{x}^n$, $(\overline{x}+\overline{\mathrm{O}})^n$ બને છે એટલે કે અનંત શ્રેઢીની રીત થી

$$x^n + nx^{n-1}0 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}0^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}0^3 + \dots$$

અને બંને વિસ્તૃત(augmented) જથ્થાઓમાંથી જો આપણે મૂળ જથ્થાઓ કાઢી લઈએ, તો આપણી પાસે રહેલા બે વધારાઓ, એટલે કે

$$0 \text{ અને } nx^{n-1}0 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}0^2 + \dots$$

જે વધારાઓને તેમના સમભાંજક 0 વડે બંનેને ભાગતાં, ભાગાકારનું ફળ

$$1 \text{ અને } nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}0 + \dots$$

જે વધારાના ગુણોત્તરનું પુરસ્કર્તા(exponent) છે. અત્યાર સુધી મેં ધારેલું કે $\overline{x}$ વહે છે, એટલે કે $\overline{x}$ માં સાચો વધારો થાય છે, પેલો $\overline{0}$ કંઈક છે, અને આ ધારણા સાથે આગળ વધ્યો છું, જેના વગર હું એક જ પગલામાં આટલું બધું મેળવી શક્યો ન હોત. એ ધારવાથી મને $\overline{x}$ નો વધારો મળ્યો, તેને $\overline{x}$ ના વધારા સાથે સરખાવી શકું અને બન્ને વધારાઓનાં પ્રમાણ શોધી શકું છું. હવે, વિનંતી સાથે નવી ધારણા પહેલી

ધારણા કરતાં ઊલટી કરું છું એટલે કે હું ધારું છું કે $\overline{x}$ માં કોઈ વધારો થયો નથી અથવા તો $\overline{0}$ કશું જ નથી; જે બીજી ધારણા મારી પહેલી ધારણાનો નાશ કરે છે. આથી તેની સાથે અસંગત છે અને ધારેલી દરેક ચીજ સાથે અસંગત છે. આમ છતાંયે હું nx^{n-1} જે અભિવ્યક્તિ(expression) મારી પહેલી ધારણાથી મેળવાઈ છે જે બીજી ધારણા પહેલાં જરૂરી છે અને જે પહેલી ધારણા વગર મેળવી ન શકાય. આ બધું વધારેમાં વધારે અસંગત રીતે દલીલો કરવાનું દેખાય છે અને આના જેવું ઈશ્વર (Divinity) પણ ચલાવી લેશે નહિ.

બે અસંગત ધારણાઓથી કોઈ પણ સીધેસીધુ સમાપન(Conclusion) મેળવી ન શકાય તેનાથી વધારે સ્પષ્ટ કશું જ નથી. ગમે તે શક્ય હોય તે તમે ધારી શકો; પણ આ પછી તમે એવું ન ધારો કે જે તમે પહેલાં ધારેલું તેનો નાશ કરે અથવા જો તમે બીજી ધારણા કરો, તો તમારે નવેસરથી કરવું પડે. આથી જો તમે ધારો કે વધારાઓનો નાશ થાય છે, એટલે કે વધારાઓ નથી, તમે ફરીથી નવેસરથી શરૂ કરો અને આ જાતની ધારણાથી શું થાય છે તે તમે જુઓ.

1734માં બર્કલીને ક્લોયની, ડબ્લિનના (Cloyne, Dublin) બિશપ (Bishop) બનાવ્યા અને 1752માં નિવૃત્ત થયા. નિવૃત્ત થયા ત્યાં સુધી ક્લૉયનીમાં રહ્યા. બહુ જ સારા બિશપ ગણાતા. આયરીશ અર્થશાસ્ત્રને લગતું તેમનું પુસ્તક Querist પણ એટલું જ જાણીતું હતું. ધર્મ અને તત્ત્વજ્ઞાનને લગતું પુસ્તક Siris ની તો છ મહિનામાં છ આવૃત્તિઓ પ્રસિદ્ધ થયેલી.

બિશપ બર્કલીની ટીકા વચ્ચે પણ કલનગણિતમાં પરિણામો યંત્રશાસ્ત્ર (Mechanics) અને દૃષ્ટિશાસ્ત્ર(Optics)ના અવલોકનો જોડે સંમત થતાં, પણ જો કલનગણિતનો પાયો જ સડેલો હોય તો શું ?

અઢારમી સદીના ગણિતશાસ્ત્રીઓ તત્ત્વજ્ઞાની બર્કલીને જવાબ આપી ન શક્યા. તે સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ લાગ્રાન્જ(Lagrange), મૅકલૉરિન(Maclaurine), દલામ્બર્ટ (d'Alembert) અને ઑઇલર(Euler)ને બર્કલીના કામની ખબર હતી અને દરેકે કલનગણિતના પાયા માટે કંઈક ને કંઈક લખ્યું, તે બિશપ બર્કલીના કારણે બન્યું.

7.3 જોસેફ-લૂઈસ લાગ્રાન્જ

બોનાપાર્ટ નેપોલિયને જોસેફ-લૂઈસ લાગ્રાન્જને સેનેટર બનાવ્યા. રાજ્યના ઉમરાવ બનાવ્યા અને દેશના લશ્કરના વિદેશી સૈનિકોના વિભાગના મોટા અધિકારી બનાવ્યા. તદ્ઉપરાંત નેપોલિયન લાગ્રાન્જને ગણિત વિજ્ઞાનના દબદબાભર્યો પિરામિડ ગણતા હતા. નેપોલિયને લાગ્રાન્જમાં એવું તો શું જોયું હશે ?

લાગ્રાન્જમાં ફ્રેન્ચ અને ઇટાલીઅન લોહી વહેતું હતું, વધારે ફ્રેન્ચ. લાગ્રાન્જના દાદા ફ્રેન્ચ લશ્કરના અશ્વદળમાં કેપ્ટન હતા અને તેમણે સાર્ડિનિયા(Sardinia)ના રાજાની નોકરી સ્વીકારી. સાર્ડિનિયાની રાજધાની ટુરિન(Turin) હતી. આ ઇટાલીનો ટાપુ જ છે. ટુરિનમાં તેઓ સ્થિર થયા અને નામાંકિત કોન્તિ(Conti) કુટુંબમાં લગ્ન થયાં, લાગ્રાન્જના પિતાજી જે એક સમયે સાર્ડિનિયા રાજ્યના લડાઈ માટેના ખજાનચી હતા. તેમનાં લગ્ન કેમ્બિઆનો(Cambiano)ના પ્રખ્યાત અને તવંગર ડૉક્ટરની એકની એક પુત્રી મેરિ-ધેરેસી ગ્રોસ(Marie-Therese Gros) જોડે થયાં પણ તેમની કમાણી ખોટાં રોકાણોના કારણે ખોઈ બેઠા. જોસેફ-લૂઇસને વકીલાતનું ભણવાનું તેમના પિતાએ સૂચવ્યું અને તે સ્વીકારીને યુનિવર્સિટી ઑફ ટુરિનમાં વકીલાતનું ભણવાનું શરૂ કર્યું. તેમને પ્રાચીન ગ્રીસ કે રોમન સાહિત્ય ગમતું. પ્રાચીન ગ્રીસના કારણે યુક્લિડ અને આર્કિમિડિઝનાં ભૂમિતિનાં કામોનો બરાબર અભ્યાસ કર્યો પણ કંઈ રસ ન પડ્યો. હેલી(Halley)નો જાણીતો નિબંધ જે કલનગણિતની રીતો ભૂમિતિની રીતોથી ઘણી ચઢિયાતી છે તે તેમના હાથમાં આવ્યો. આને જોસેફ-લૂઇસને બદલી કાઢ્યા. ગણિતમાં રસ પડવા માંડ્યો. ટૂંકા સમયમાં તે સમયે જે આધુનિક વિશ્લેષણ (modern analysis) કહેવાય છે તે બરાબર તૈયાર કરી દીધું. આ ઉપરાંત ભૌતિકશાસ્ત્ર પ્રો. બીક્કારિઆ બહુ જ સરસ શીખવતા હતા. આથી તેમણે વકીલાતના બદલે ગણિતના ક્ષેત્રમાં કારકિર્દી બનાવવાનો નિર્ણય લીધો. જોસેફ-લૂઇસે એમની જાતને ગણિતમાં ડૂબાડી દીધી. તેઓ પોતાની જાતે જ બધુ શીખ્યા અને તેમને કોઈ જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રીની મદદ મળી નથી.

23 જુલાઈ, 1754 એટલે કે લાગ્રાન્જ અઢાર વર્ષના હતા ત્યારે પહેલવહેલું ગણિતનું કામ ઇટાલી ભાષામાં ગિયુલિઓ ફેગ્નેનો(Giulio Fagnano)ને લખેલા પત્રના સ્વરૂપમાં પ્રસિદ્ધ થયું. દ્વિપદી પ્રમેય અને ગુણિત વિધેયોના પરંપરિત વિકલનની સમાનતા દર્શાવે છે.

તેમણે ટૉટોક્રોન(Tautochrone) વક્ર ઉપર કામ કર્યું. સામ્ય ગુરુત્વાકર્ષણ ક્ષેત્રમાં ઘર્ષણ વગર આ વક્ર ઉપર પદાર્થો સરકે છે. આ વક્રનું નીચેમાં નીચું બિંદુ છે. આ વક્ર ઉપર ગમે ત્યાંથી પદાર્થ સરકવાનું ચાલુ કરે અને નીચામાં નીચા બિંદુએ પહોંચશે. આ લીધેલો સમય નોંધો. આ વક્ર ઉપર બીજા કોઈ બિંદુએથી બીજો પદાર્થ સરકાવો. નીચેનામાં નીચે પહોંચવાનો સમય નોંધો જે આગળના સમય જેટલો જ હશે.

એ સમયે નવા વિષય 'Calculus of Variations'ની શરૂઆત થયેલી. એમાં ટૉટોક્રોનના ગુણધર્મો ઘણા ઉપયોગી છે. લાગ્રાન્જે ઑઇલરને ટૉટોક્રોનનાં મેળવેલાં પરિણામો 12 ઑગસ્ટ, 1755ના મોકલી આપ્યાં. 6 સપ્ટેમ્બર 1755ના રોજ ઑઇલરનો

પ્રોત્સાહન આપતો જવાબ આવ્યો. 19 વર્ષના લાગ્રાન્જને 28, સપ્ટેમ્બર 1755થી ટુરિનમાં Royal Artillery School માં ગણિતના Asst. Professor તરીકે નિમણૂક થઈ.

1756 માં લાગ્રાન્જે Calculus of Variations નો ઉપયોગ કરીને યંત્રશાસ્ત્રનાં પરિણામો મેળવ્યાં જે તેમણે ઑઇલરને મોકલી આપ્યાં. ઑઇલરે આવાં જ પરિણામો મેળવેલાં હોઈને લાગ્રાન્જથી ખૂબ જ પ્રભાવિત થયા. ઑઇલર તે સમયે બર્લિનમાં જ ડિરેક્ટર હતા. તેમણે બર્લિન અકેડેમીના પ્રમુખ મૉપર્ટુઇસ (Maupertuis)ની સાથે આગળ પડતા ગણિતશાસ્ત્રી લાગ્રાન્જની પૃશિયા અકૅડમીમાં લાવવા ભલામણ કરી હતી. લાગ્રાન્જને ફક્ત ગણિતમાં જ રસ હોઈને, આવી પ્રેસ્ટિજવાળી જગ્યા અને તેની સાથેના બીજા લાભો તે બધુ જોઈ શકતા હોવા છતાંયે ઠંડા કલેજે ના પાડી.

ઑઇલરે લાગ્રાન્જનું નામ બર્લિન એકેડમીના સભ્ય તરીકે સૂચવ્યું. સપ્ટેમ્બર 2, 1756ના રોજ લાગ્રાન્જ બર્લિન અકેડમીના સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા. આ સમયે લાગ્રાન્જની ઉંમર ફક્ત 20 વર્ષની હતી. આના એક વર્ષ પછી Royal Academy of Sciences of Turin સ્થપાઈ અને તેનું ખાસ કામ વૈજ્ઞાનિક સામયિક 'Melanges de Turin'માં પ્રસિદ્ધ કરવાનું હતું. આમાં ફ્રેન્ચ અથવા લેટિન ભાષામાં લખાયેલા લેખો સ્વીકારવામાં આવતા. લાગ્રાન્જે પણ આમાં અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો છે. તેમનાં અગત્યનાં કામોના લેખો આ સામયિકોમાંથી મળે. તેમાં Calculus of Variations નાં સુંદર પરિણામો, Calculus of probabilities નું કામ, કંપતી દોરીનાં પરિણામો જે બધાની રીતથી જુદી જ રીતથી મેળવેલાં.

7.4 કલનગણિતનાં પાયારૂપ પુસ્તકો

પાયાનો પ્રશ્ન સુક્ષ્મો સાથે કુશલ વ્યવહાર કયા સંજોગોમાં થઈ શકે તે ઑઇલર જેવાના મતમાં અગત્યનું ન હતું, કારણ કે તેના જવાબ સિવાય પણ તે ઘણી બધી શોધો કરી શકેલા. અઢારમી સદીમાં જ્યારે કલનશાસ્ત્રના પાયાની વાત આવતી તેને ગૌણ ગણતા. પાયાના પ્રશ્નની ચર્ચા પુસ્તકો, પ્રચલિત લેખોમાં હાલની જેમ ન થતી. લાગ્રાન્જને કલનગણિતના પાયાના સિદ્ધાંતમાં રસ પડવા માંડ્યો અને આના લગતી પ્રવૃત્તિના કારણે બીજા ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓ પણ આમાં ભાગ લેવા માંડ્યા. અઢારમી સદીમાં વૈજ્ઞાનિક શિક્ષણ સંસ્થાઓ (અકાદમીઓ) પણ અગત્યના આગળ પડતા પ્રશ્નોના ઉકેલો માટે ઇનામો આપતી. 1784માં લાગ્રાન્જ અને તેમના સહાધ્યાઓઓએ કલનગણિતના પાયાના પ્રશ્નને બર્લિન અકૅડેમીના ઇનામ માટે મૂક્યો, પણ લાગ્રાન્જને સંતોષે તેવો જવાબ ન મળ્યો, પણ આમાંથી કલનગણિતના પાયાના પ્રશ્ન ઉપર નીચેનાં બે પુસ્તકો પ્રસિદ્ધ થયાં.

(1) Exposition Elémentaire des Principes des Calculus Supérieurs - Simmon L' Huilier, Berlin, 1787.

(2) Réflexions sur le Mékaphysique du calcul infinitesimal - Lazare Carnot, Paris, 1797.

આ રીતે લાગ્રાન્જે આ પ્રશ્નમાં રસ ઊભો કર્યો.

આ સિવાય પણ ઘણા બધાને અઢારમી સદીના અંતમાં ભણાવવાની જરૂરિયાત હતી. **તમે જ્યારે શીખવતા હોવ, ત્યારે શીખવવાનું તમને પાયાના પ્રશ્ન ઉપર ધ્યાન રાખવા દબાણ કરે છે.** પહેલાં રાજાના દરબારમાં ગણિતશાસ્ત્રીઓ રાજના શણગાર માટે રાખવામાં આવતા. રાજાઓ ઓછા થતા ગયા અને ગણિતશાસ્ત્રીઓ વધતા ગયા. ગણિત ઉપયોગી જણાવવા લાગ્યું. સૌથી પહેલાં લશ્કરી શાળાઓમાં વિજ્ઞાન અને ઇજનેરીના વિદ્યાર્થીઓને ગણિત શીખવવા માટે ગણિતશાસ્ત્રીઓની જરૂર પડવા માંડી. ફ્રાન્સની બળવાખોર સરકારે વૈજ્ઞાનિકોની કેળવણી માટે ઇકોલ પૉલિટેક્નિકની (Ecola Polytechnique) પૅરિસમાં સ્થાપના કરેલી. લાગ્રાન્જને દબાણ કરીને અહીંયાં ગણિત શીખવવા રાખ્યા. લાગ્રાન્જે કલનગણિતના પાયાનાં બે પુસ્તકો જ્યારે તેઓ ઇકોલ પૉલિટેક્નિકમાં શીખવતા ત્યારે લખેલાં.

7.5 અનંત સુક્ષ્મો અથવા શૂન્યાભિચલો(Infinitesimals)

પ્રસ્તાવનાના ગુણોત્તર $2x + h$ માં h અનંત સૂક્ષ્મ છે. આથી સાન્ત રકમ (Finite Quantity) $2x$ ની સરખામણીમાં આપણે h ની ઉપેક્ષા કરી શકીએ. એટલે કે $2x$ અને $2x + h$ સરખા છે. આ જાતનું વિચારવાનું લાઇબ્નિઝ, લૉપિટલ અને બર્નૂલિઓનું હતું. આ જાતના વિચારવાની સામે બે મોટા વિરોધો હોઈને, આ રીતે વિચારવાનું મૂકી દેવું પડેલું.

આર્કિમિડિઝ પૂર્વધારણા : આ પૂર્વ ધારણા વૃત્તખંડ(Segment) માટેની છે. બે વૃત્તખંડોની સરખામણી માટે છે. ધારો કે બે વૃત્તખંડો A અને B છે અને તેમની કિંમતો એ રીતની છે કે જેથી $A < B$ છે. આપણે કાયમને માટે પૂર્ણાંક m શોધી શકીએ કે જેથી $mA > B$ છે.

ન્યૂટને ધ્યાન દોર્યું કે આ અનંત સૂક્ષ્મો આર્કિમિડિઝ પૂર્વ ધારણા સંતોષતાં ન હોઈને તેમની કાયદેસરની ગણિતીય પ્રતિષ્ઠા નથી.

જો $h \neq 0$ હોય, તો તેમને કાઢી નાખવા તે ન્યૂટન અને બર્કલીની રીતે ભૂલ ગણાય. જ્યારે લાગ્રાન્જ અનંત સૂક્ષ્મોને કોઈ પણ રીતે સંગીન ગણવા તૈયાર ન હતા. લાગ્રાન્જે તેમના 1797 ના પુસ્તક Theorie des functions analytiques માં તદ્દન

નવા જ પ્રકારનો રસ્તો સૂચવ્યો. તેમના જણાવ્યા પ્રમાણે આ રીત, "Freed from all considerations of infinitely small quantities, Vanishing quantities limits and fluxco" છે.

અનંત શ્રેઢીને પરિણામ તરીકે નહિ પણ વિકલન ગણિતના મૂળ તરીકે જોવાનો પાયાનો વિચાર આ રીતમાં છે. જે વિધેય $f(x)$ નું વિકલન આપણે જાણવું છે, તેને લાગ્રાન્જે i ની અનંત શ્રેઢીમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવ્યું :

$$f(x + i) = f(x) + i\,p(x) + i^2\,q(x) + i^3\,r(x) + \ldots$$

જ્યાં, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$,... વગેરે $f(x)$ માંથી મેળવેલાં વિધેયો છે અને તેમાં i નથી.

ધારો કે, આપણે $f(x) = \frac{1}{x^2}$ નો $f'(x)$ મેળવવો છે.

$$f(x + i) = \frac{1}{(x+i)^2} = \frac{1}{x^2} + i\,p(x) + i^2\,q(x) + i^3\,r(x) + \ldots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x+i)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+i)^2}{x^2\,(x+i)^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2xi - i^2}{x^2\,(x+i)^2}$$

$$= i\left(\frac{-2x}{x^2\,(x+i)^2}\right) + i^2\left(\frac{-1}{x^2\,(x+i)^2}\right)$$

$$= i\,p(x) + i^2\,q(x) \ldots$$

$$\therefore \quad p(x) + i\,q(x) + \ldots = \frac{-2x}{x^2\,(x+i)^2} + i\left(\frac{-1}{x^2\,(x+i)^2}\right) + \ldots$$

આ સમીકરણમાં $i = 0$ મૂકતાં, $p(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} = f'(x)$ મળે.

લાગ્રાન્જની વિકલન મેળવવાની આ રીતમાં શૂન્યાભિચલની જરૂર નથી, તેમજ રાશિઓ(quantities)ને અદૃશ્ય થવાની જરૂર નથી. જ્યારે સમીકરણમાં લાગ્રાન્જ $i = 0$ મૂકે ત્યારે i બરાબર શૂન્ય જ છે. ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝની રીતોમાં વક્રો અને આકૃતિઓ છે, જ્યારે લાગ્રાન્જની રીતમાં કોઈ આકૃતિ નથી તેમજ આપણને વિકલનને સ્પર્શકના ઢાળ સાથે કોઈ સંબંધ હોય તેની પણ ખબર પડતી નથી. આપણા ઉદાહરણમાં તફાવત $\frac{1}{(x+i)^2} - \frac{1}{x^2}$ નું સાદુંરૂપ અવયવ i મેળવવામાં મદદરૂપ છે.

આવું બધા જ વિધેયો માટે શક્ય છે ? આ રીતે મેળવેલી શ્રેઢી અસલ વિધેય જ કાયમ માટે દર્શાવશે ? ઊલટું કોશી(Cauchy)એ 1822 માં એવું વિધેય બતાવ્યું કે જેની લાગ્રાન્જની શ્રેઢી બીજું જ વિધેય દર્શાવતું હોય. આ બધા કારણે લાગ્રાન્જની શ્રેઢીમાંથી વિધેયનું વિકલન મેળવવાની રીત પ્રચલિત ન બની, પડતી મુકાઈ.

હવે શું કરવું ? ઘણા દાયકાઓ સુધી ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓએ પ્રયત્ન કર્યા. આમાં જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી (ભૌતિકશાસ્ત્રી) જીન-લે-રૉન્ડ દલામ્બર્ટ(Jean - le - Rond d'Alembert (1717-1783))ના કહેવા પ્રમાણે, "વસ્તુ થોડીક કે કશું નહિ છે. જો તે થોડીક છે, તો તે અદશ્ય થઈ નથી. જો તે નથી, તો તે અદશ્ય થઈ છે. બેના વચ્ચે કંઈક ધારવું તે કિમારા(Chimer'a, ખોટું કલ્પિત) છે." આના બદલે દલામ્બર્ટે કલનશાસ્ત્ર લક્ષનો વિચાર(Concept) રાખે તે સુચવ્યું. વિકલન માટે, તેમણે $\frac{dy}{dx}$ ને બે સીમિત(Finite) રકમોના ગુણોત્તર $\frac{Z}{U}$ ના લક્ષ તરીકે ઓળખાવ્યું. $\frac{z}{U}$ ને આપણે $\frac{y(x+\Delta x)-y(z)}{\Delta x}$ તરીકે ઓળખીએ છીએ. આથી $\frac{dy}{dx}$ એ $\frac{Z}{U}$ નું લક્ષ છે. અહીંયાં Z અને U વાસ્તવિક અને ઘટતી સંખ્યાઓ છે.

દલામ્બર્ટ કંઈકની પાછળ હતા. તેમને શૂન્યાભિચલ(Infinitesimal) કે ઘટતી જતી રાશિમાં રસ ન હતો અને લક્ષને આગળ લાવવાની પ્રતિષ્ઠા તેમને મળે છે જે કલનગણિતના નબળા પાયાને દુરસ્ત કરવાનો રસ્તો સૂચવે છે. પણ એવું ન કહી શકાય કે તેમણે કલનગણિતને બચાવ્યું. તેમને સાચા રસ્તાનો ખ્યાલ આવ્યો હશે, પણ તે એ રસ્તે દૂર ન ગયા. લક્ષની વ્યાખ્યા અને આ વ્યાખ્યામાંથી કલનગણિતના મુખ્ય પ્રમેયો મેળવવાનું તેમણે ન કર્યું. અંતમાં, દલામ્બર્ટે આ તકલીફોમાંથી રસ્તો જ ચીંધ્યો, લક્ષના કામ માટે એકાદ બે પેઢીની રાહ જોવી પડી.

7.6 બર્લિન

1766માં પ્રુસિયાના રાજા ફ્રેડરિકે પોતે લાગ્રાન્જને તેમની કોર્ટમાં મોટા ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે આવીને રહેવા માટે વિનંતી કરતો પત્ર લખ્યો. ઑઇલર બર્લિન છોડીને સેન્ટ પિટર્સબર્ગ પાછા ગયેલા હોઈને લાગ્રાન્જને પ્રુસિઆ આવવા સમજાવવું સહેલું હતું. લાગ્રાન્જ પ્રુસિયા આવ્યા અને વીસ વર્ષ રહ્યા અને તેમને રાજા જોડે સારું ફાવતું હતું. ઘણા બધા સંશોધનના લેખો લખ્યા અને બર્લિન અને ટુરિન ટ્રાન્સેક્શનમાં પ્રસિદ્ધ થયા. ખરું અગત્યનું પુસ્તક 'Mecanique analytique' અહીંયાં તૈયાર કર્યું અને

પ્રસિદ્ધ પણ થયું. 1767માં તેમનાં લગ્ન પણ તેમની સંબંધી વિક્ટોરિઆ કોન્ટિ જોડે (Victoria Conti) થયાં.

રાજા ફ્રેડરિકના લાગ્રાન્જ પ્રીતિપાત્ર(Favourite) હતા. દરરોજ રાત્રે બીજા દિવસે શું-શું કરવાનું છે તેની બરાબર નોંધ કરી લેતા. સંશોધનનાં પેપરો પણ બરાબર વિચારીને તૈયાર કર્યા પછી જ લખતા. એક જ વખતમાં કોઈ પણ જાતની ભૂલ વગર સંશોધન-પેપર લખીને મોકલતા.

બર્લિનમાં લાગ્રાન્જની તબિયત સારી ન હતી અને તેમનાં પત્ની વિક્ટોરિઆની તો લાગ્રાન્જ કરતાં પણ ખરાબ હતી. વર્ષોની બીમારી પછી 1783માં વિક્ટોરિઆનું અવસાન થયું. તે પછી લાગ્રાન્જ નિરૂઉત્સાહી થઈ ગયા અને ઓછામાં પૂરું 1786 માં ફ્રેડરિક II નું અવસાન થયું, આથી બર્લિનનું વાતાવરણ લાગ્રાન્જ માટે ગૂંગળામણભર્યું બની ગયું.

7.7 પૅરિસ

ફ્રેડરિક II ના અવસાન પછી સ્પેઇન અને નેપલ્સે લાગ્રાન્જને તેમના ત્યાં આવવા અને રહેવા માટેની વિનંતીઓ કરી, પણ તેમણે લૂઈસ 16 ની પૅરિસની ઑફર ઘણી સારી હોઈને સ્વીકારી. આ આમંત્રણમાં રાજમહેલ લુવ્રેમાં (Louvre) વૈભવી રૂમ અને આર્થિક તેમજ બીજી બધી મદદ સાથેની ઑફર હતી. સાથે-સાથે ફ્રેન્ચ અકેડમી ઑફ સાયન્સિસનું સભ્યપદ પણ ખરું. પૅરિસમાં 1792માં લાગ્રાન્જની જિંદગી દુઃખી અને નિરાશાજનક હતી. તેમના ખગોળશાસ્ત્રી મિત્ર પીએર્રૂે ચાર્લ્સ લી. મોનીઅર(Pierre Charles Monnier)ની ચોવીસ વર્ષની પુત્રી રીની-ફ્રાનકોઇસ-એડિલએઇડ લી મોનીઅરને તેમના તરફ ખૂબ જ લાગણી થઈ. અને તેણે લાગ્રાન્જની જોડે લગ્ન કરવા આગ્રહ કર્યો અને આનંદથી લાગ્રાન્જની ભક્તિભાવપૂર્ણ પત્ની બનીને રહ્યાં. પૅરિસની લૂઇસ 16ની ઑફરમાં ભણાવવાનું પણ ન હતું જેથી તે સંશોધન ઉપર જ બરાબર ધ્યાન રાખતા.

ન્યૂટન પછીનાં સો વર્ષ દરમિયાન જે કંઈ થયું તે કામ અને તેમનું અગત્યનું કામ બધું એકઠું કરીને 'Analytical Mechanics' નામનો ગ્રંથ ફ્રેન્ચમાં 'Mecantique analytique' લખ્યો અને તેની પ્રસ્તાવનામાં તેમણે લખ્યું, ''આ કામમાં કોઈ આકૃતિ મળશે નહિ. જે રીતો દર્શાવી છે તેના માટે કોઈ રચના કે ભૌમિતિક કે યાંત્રિક દલીલોની જરૂર નથી. ફક્ત બીજ ગણિતની નિયમિત અને સર્વ પ્રચલિત રીતોની. મે 1790 માં અકેડમી ડીસ સાયન્સિસની વજન અને લંબાઈના માપોનું ધોરણ સ્થાપવાની કમિટિના લાગ્રાન્જને સભ્ય બનાવ્યા. તેમણે મૅટ્રિક પદ્ધતિ ઉપર કામ કર્યું અને દશાંશ પદ્ધતિની ભલામણ કરી.''

7.8 ફ્રાન્સની ક્રાન્તિ (French Revolution)

ફ્રાન્સની ક્રાન્તિ દશ વર્ષ ચાલી. લગભગ 1789માં શરૂ થઈ અને તેનો અંત 1799 માં આવ્યો. આની શરૂઆત જુલાઈ 14, 1789માં થઈ. જ્યારે ક્રાન્તિકારીઓએ બેસ્ટિલાની (Bastilla) જેલ ઉપર શસ્ત્રો માટે હુમલો કર્યો.

રાજાની તિજોરી ખાલી થઈ ગઈ હતી. સતત બે દસકાઓ નબળો પાક, દુકાળ, પ્રાણીઓના રોગો અને બ્રેડની આસમાને પહોંચેલી કિંમત. આના કારણે ખેડૂતો અને ગામડાઓના ગરીબોમાં અશાંતિ પ્રસરેલી હતી. ફ્રાન્સની ક્રાન્તિનું મુખ્ય કારણ આર્થિક પ્રશ્નોનાં ઉકેલ લાવવાનો હતો. લશ્કરમાંથી નેપોલિયન બોનાપાર્ટ લશ્કરી નેતા હતા. ઇટાલીમાં ઓસ્ટ્રીયાને હરાવ્યા ત્યારથી દેશના હીરો બન્યા. આ સમય દરમિયાન ફ્રેન્ચ નાગરિકોએ જુનું રાજકીય કુદરતી દૃશ્ય તોડી કાઢ્યું અને નવા રાજકીય કુદરતી દૃશ્ય (Political Landscape)ની શરૂઆત કરી. સર્વ સત્તાધીશ રાજાની અને જાગીરદારી પદ્ધતિ સદીઓથી ચાલી આવતી પ્રથાને તોડી કાઢી. લૂઇસ 16ની આર્થિક નીતિ નિષ્ફળ જવાથી બધે અસંતોષ ફેલાયેલો અને શરૂઆત જ લૂઇસ 16થી થઈ. જાન્યુઆરી 21, 1793ના રોજ તેમનું ધડ ગિ'લોટીન(guillotine)થી જુદું કરી દેવામાં આવ્યું અને નવ મહિના પછી રાણીને પણ એ જ સજા ફરમાવી.

1793નું બંધારણ માન્ય થયા પછી રોબેસ્પિએરે(Robespiarra) અને પબ્લિક સેફ્ટી કમિટિએ ફ્રેન્ચ સૈનિકની ભરતી કરવાનું અને આર્થિક પરિસ્થિતિને સ્થિર કરવાનું શરૂ કર્યું, રોબેસ્પિએરેને ક્રાન્તિના વિરોધીઓના ડરે દમનથી રાજ ચલાવવાનું શરૂ કર્યું. 1793-94ના સમય દરમિયાન 15,000થી વધુ માણસોને રોબેસ્પિએરે ગિ'લોટીન ઉપર ચઢાવી દીધા. રોબેસ્ટિએરે આવાં એકદમ દમનવાળાં પગલાં ભરવાની જરૂર ન હતી. આખરે તેમની જુલાઈ 1795 માં ધરપકડ થઈ અને ગિ'લોટીન ઉપર ચઢાવી દેવાયા.

સપ્ટેમ્બર 1793 માં કાયદો પસાર થયો : દુશ્મનના દેશમાં જન્મેલા બધા પરદેશીઓની ધરપકડ કરવી અને તેમની બધી માલમિલકત જપ્ત કરવી. લેવોઇસિઅર (Lavoisier) લાગ્રાન્જના કેસ માટે વચ્ચે પડ્યા. આના કારણે લાગ્રાન્જને અપવાદરૂપ ગણ્યા. મે 8, 1794 માં ટ્રાયલ ચાલ્યો અને રેવોલુશનરી ટ્રિબુનલે (revolutionary tribunal) લેવોઇસિરને ઠપકો આપ્યો અને મોતની સજા કરી. લેવોઇસિઅરે લાગ્રાન્જ અને 27 બીજાને ધરપકડથી બચાવ્યા હતા. તે જ દિવસે બપોરના લેવોઇસિઅરને ગિ'લોટીન ઉપર ચઢાવી દીધા. લાગ્રાન્જે કહ્યું, ''ધડ જુદું પડતાં એક જ ક્ષણ થઈ અને આના જેવો તૈયાર કરવા સો વર્ષ પણ પૂરતાં નથી.''

11 માર્ચ, 1794માં ઇકોલ પૉલિટેકનિકની સ્થાપના થઈ અને ડિસેમ્બર 1794 માં શરૂ થયું. લાગ્રાન્જની એનાલીસિસના પ્રોફેસર તરીકે 1794 માં નિમણૂક કરવામાં આવી. તેમની નોકરીની શરતમાં શીખવવાનું ન હતું, પણ ક્રાન્તિએ બધું બદલ્યું. જાણે કે લાગ્રાન્જ બહુ સારા શિક્ષક ન હતા. શિક્ષકોની કેળવણી માટે 1795 માં ધી ઇકોલ નોર્મલ(The Ecola Normale)ની સ્થાપના કરવામાં આવી. લાગ્રાન્જ અહીંયા પણ ભણાવતા. તેમના વિદ્યાર્થીઓની નજરે તે બહુ સારા શિક્ષક ન હતા. લાગ્રાન્જે તેમના કલનગણિતનાં ભાષણો બે પુસ્તકોમાં પ્રસિદ્ધ કર્યાં.

1795 થી ત્રાસવાદથી કામ થતું બંધ થયું. ઑગસ્ટ 22, 1795 નેશનલ કન્વેનશન, જેમાં મોટા ભાગના ગિરોન્ડિસ(Girondis) જેઓ બચી ગયેલા હતા. તેમણે આ નવું બંધારણ પસાર કર્યું. પાંચ સભ્યોના હાથમાં રાજ ચલાવવાનું આવ્યું અને તેને Directory તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આની નિમણૂક પાર્લામેન્ટ કરે છે. રૉયલિસ્ટ અને જેકોબિન્સે વિરોધ કર્યો જે લશ્કરના જનરલ નેપોલીઅન બોનાપાર્ટે જલદીથી શાંત કરાવી દીધો. આ Directory એ ચાર વર્ષ રાજ ચલાવવા પ્રયત્ન કર્યો પણ ભાત ભાતના પ્રશ્નો આવતા. આખરે 1799 માં બોનાપાર્ટે Directory કાઢીને તેમની જાતને 'First Consul' તરીકે નીમીને વહીવટ તેમના હાથમાં લઈ લીધો. 1804 માં તેમની જાતને બોનાપાર્ટે રાજા તરીકે જાહેર કર્યાં.

1802 માં લાગ્રાન્જે પીડમોન્ટને ફ્રાન્સની જોડે જોડી દેવાની માગણી મૂકી અને બોનાપાર્ટે સ્વીકારી અને તેમની સેનેટર તરીકે નિમણૂક કરી. 1808માં Count of the Empire અને 3 એપ્રિલ, 1813 લાગ્રાન્જને ગ્રાન્ડ ક્રૉઇઝ ઑફ ધી ઑર્ડરે ઇમ્પીરિઅલ ડી લા રીયુનિયન (The Grand Croix of the Ordre Imperial de la Reunion) આપવામાં આવ્યો. અઠવાડિયા પછી તેમનું અવસાન થયું.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

(1) E. T. Bell, "Men of Mathematics" Simon and Schuster, New York, 1937

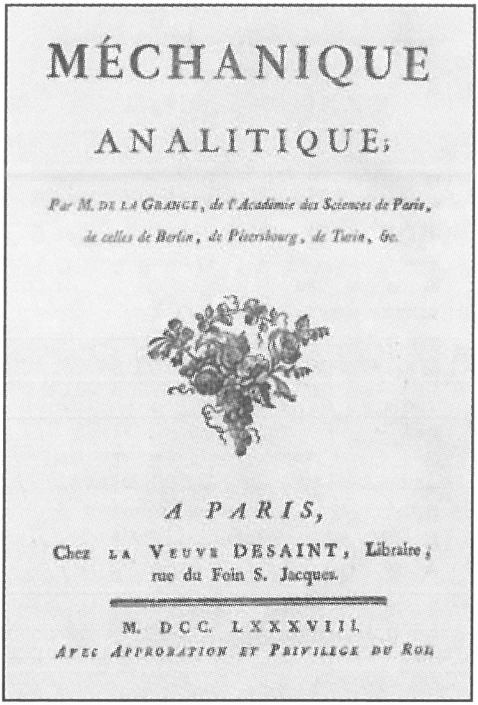
(2) Carl B. Boyer, "The History of the Calculus and its conceptual Department" Dover Publication, Inc., New York, 1949.

(3) Ronald Calinger, "Classics of Mathematics", Prantice Hall, 1995.

(4) William Dunham, "The Calculus Gallery" Princeton University Press, 2005

(5) વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ, ''કેલિફોર્નિયા રાજ્યની શિક્ષણ વ્યવસ્થા'' સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય વૃત્ત, (જાન્યુઆરી-ફેબ્રુઆરી, 2020) : 19

◆



MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

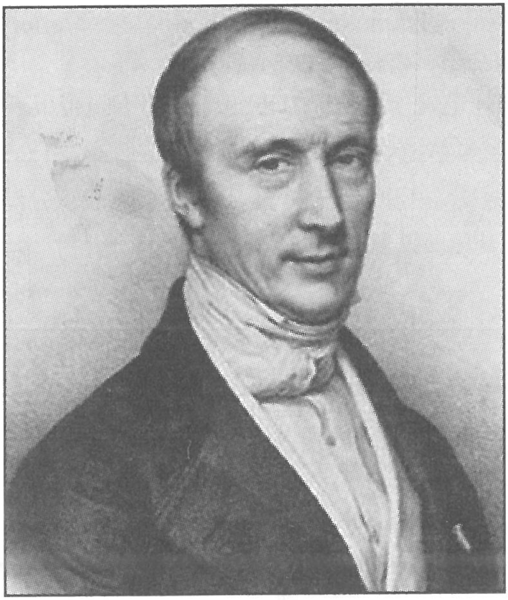
A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire; rue du Foin S. Jacques.

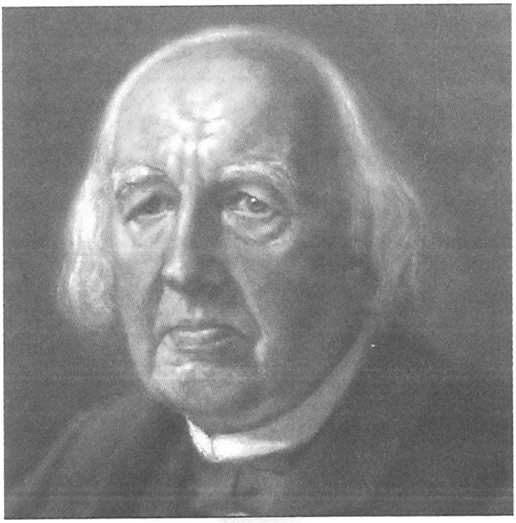
M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.

લાગ્રાન્જ દ્વારા લિખિત પુસ્તક



ઓગસ્ટીન-લૂઈસ કોશી (Augustin Louis Cauchy)



કાર્લ વાયરસ્ટ્રાસ (Karl Weierstrass)

8. લક્ષ(Limit) : ε (Epsilon) અને δ (Delta)

"It is self-evident that any and all paths must be open to researches during the actual course of his [or her] investigations."

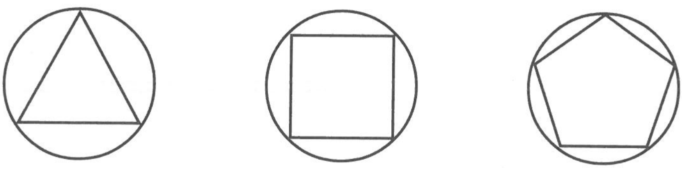
– ***Karl Weierstrass***

8.1 પ્રસ્તાવના

જ્યૉર્જ બર્કલીએ વિકલન કે ફ્લક્સિઓન મેળવવાની રીત સામે લાલ બત્તી ધરી તેના કારણે ગણિતશાસ્ત્રીઓ ગંભીરતાપૂર્વક પાયાના પ્રશ્નને જોવા લાગ્યા. દલામ્બર્ટે (D'Alambert) લક્ષનો રસ્તો સૂચવ્યો, કોઈનેય તે સમયે લક્ષનો ઉપયોગ કઈ રીતે કરવો તેનો ખ્યાલ ન હતો. ઑગસ્ટિન-લુઇસ કોશી (Augustin – Louis Cauchy) એવું માનતા કે કલનશાસ્ત્રનો પાયો લક્ષના વિચારો(Concept) ઉપર ઊભો કરી શકાય.

8.2 લક્ષ (Limit)

કોશીએ આ માટે સરસ દાખલાથી શરૂઆત કરી. વર્તુળની અંદર સરખી બાજુઓવાળો બહુકોણ જેનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ ઉપર છે તે લઈએ. આવા બહુકોણની બાજુઓ વધારતા જઈએ. આવા બહુકોણોનાં ક્ષેત્રફળો મેળવી શકીએ. જેમ-જેમ બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા વધારતા જઈએ, તેમ-તેમ ક્ષેત્રફળમાં થોડોક વધારો થતો જશે, અને આખરે જેમ-જેમ બહુકોણની બાજુઓ વધતી જશે તેમ-તેમ બહુકોણનાં ક્ષેત્રફળો ચોક્કસ સંખ્યાએ પહોંચશે. કોશીએ આ વર્તુળના ક્ષેત્રફળને આ બહુકોણના ક્ષેત્રફળોના લક્ષ બરાબર ગણાવ્યું. શક્ય હોય તેટલી વધારેમાં વધારે બાજુવાળો બહુકોણ લઈએ; તોપણ તેનું ક્ષેત્રફળ વર્તુળના ક્ષેત્રફળથી થોડુંક ઓછું રહેશે. ટૂંકમાં કોઈ પણ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ વર્તુળના ક્ષેત્રફળ બરોબર થશે નહિ. કોઈ પણ નાની સ્વીકાર્ય સંખ્યા (Tolerance Number) આપેલી હોય તો તેના યોગ્ય નિશ્ચિત સંખ્યાવાળો બહુકોણ શોધી શકીએ કે જેના ક્ષેત્રફળ અને



વર્તુળના ક્ષેત્રફળનો તફાવત આપેલી સ્વીકાર્ય સંખ્યાથી ઓછો હશે. આ નિશ્ચિત સંખ્યાથી વધારે બાજુવાળા બહુકોણના ક્ષેત્રફળ અને આપેલા વર્તુળના ક્ષેત્રફળનો તફાવત પણ આપેલી સંખ્યાથી ઓછો હશે.

શરૂઆતના લક્ષનો વિચાર :

જેમ h નાનો અને નાનો બનતો જાય તેમ $\frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$, $2x$ ની નજીક આવતો જાય છે. જ્યારે h નાનો અને નાનો બનતો જાય તેમ વિચારીએ ત્યારે ગુણોત્તરનું લક્ષ $2x$ છે. આપણે ગુણોત્તર અને $2x$ વચ્ચેનો તફાવત h ની યોગ્ય કિંમત લઈને જેટલો જોઈએ તેટલો રાખી શકીએ. આ જાતનો ખુલાસો ન્યૂટને આપેલો.

બર્કલીનો લક્ષની સામેનો મુખ્ય વાંધો એ હતો કે $2x + h$ કોઈ પણ કાળે $2x$ ન બને. એ જ રીતે છેદક રેખાનાં બે બિંદુઓ ગમે તેટલાં નજીક હોવા છતાં સ્પર્શક ન બને. લક્ષ શોધવાની રીત જ બર્કલીની નજરમાં ગેરકાયદેસર છે. $h = 0$ અથવા $h \neq 0$ છે.

કોશીની લક્ષની સુધારેલી આવૃત્તિ :

ઓગણીસમી સદીમાં કોશી "$2x + h$ માં h શૂન્ય તરફ જાય, ત્યારે $2x + h$ નું લક્ષ $2x$ છે." તે સુધારીને જણાવ્યું કે, "$2x + h$ અને $2x$ વચ્ચેના નિરપેક્ષ તફાવતને h ને જરૂરિયાત પ્રમાણે લઈને આપેલી કોઈ પણ રકમ કરતાં નાનો બનાવી શકાય." આમાં, $2x + h$ નું લક્ષ શું અને ક્યારે તેના લક્ષે પહોંચશે તેની કોઈ વાત નથી. ફક્ત અને ફક્ત $2x + h$ અને $2x$ વચ્ચેનો નિરપેક્ષ તફાવત જોઈએ તેટલો નાનો કરી શકાય તેનો અર્થ $2x + h$ તેના લક્ષ $2x$ ની જોઈએ તેટલી નજીકમાં હોવો જોઈએ.

કલનગણિતને પાકા પાયે મૂકવા માટે નવેસરથી પાયાથી જ કલનગણિતના નિયમો ઘડવા પડશે. એ સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને તેમાંયે દલામ્બર્ટ એવું માનતા કે કલનગણિતના પાયાની રીત લક્ષની રીતમાંથી જ મળશે. જાણે કે આ ચળવળના હોદ્દેદારોને પણ લક્ષનો ખાસ ખ્યાલ ન હતો. આમાંના કોઈ લક્ષની વ્યાખ્યા એવી ન આપી શક્યા કે જે તર્કશાસ્ત્રની સામે ટકી શકે. આખરે કોશી જ બધી રીતે સ્વીકારી શકાય તેવી લક્ષની વ્યાખ્યા આપી શક્યા.

જ્યારે ચલને ક્રમાનુસાર કિંમતો આપવામાં આવે ત્યારે આપેલું વિધેય અસ્પષ્ટ રીતે ચોક્કસ કિંમતે પહોંચે, જેથી છેવટે ચોક્કસ કિંમતથી જેટલા જોઈએ તેટલો નાનામાં

નાનો ફેરફાર રાખી શકાય તો તે ચોક્કસ કિંમત વિધેયનું લક્ષ કહેવાય છે. આ જ રીતે કોશીએ વિકલિતની શાબ્દિક વ્યાખ્યા આપી :

જ્યારે h શૂન્ય તરફ જાય, ત્યારે $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો તે $f(x)$ નો વિકલિત છે.

કોશી જ્યારે જરૂર પડે ત્યારે તે વ્યાખ્યાને પાયાની અસમતામાં વાપરતા :

δ, ε એ બે ખૂબ જ નાની સંખ્યાઓ છે. $h < \delta$ અને આપેલા આંતરાલમાં x ની કોઈ કિંમત માટે ગુણોત્તર $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ હંમેશાં $f'(x) - \varepsilon$ કરતાં વધારે $f'(x) + \varepsilon$ કરતાં ઓછો છે. $f'(x)$ એ $f(x)$ નું વિકલિત છે.

કોશી લક્ષના ખ્યાલને (Concept) બરાબર રીતે સમજનાર સૌ પ્રથમ હતા અને તે જ પ્રમાણે લક્ષને કલનગણિતમાં વાપરનાર પણ પ્રથમ હતા. તેમણે તેમના 1821ના પુસ્તક 'cours d'analyse' માં લક્ષ, સાતત્ય અને અભિસાર આપ્યાં છે જ્યારે 1823ના બીજા પુસ્તક 'Cours infinitesimal' માં વિકલન અને સંકલન આપ્યાં છે. કોશીએ કલનગણિતનાં બધાં પરિણામો લક્ષની મદદથી સાબિત કર્યાં. પૂર્વધારણાઓની મદદથી પ્રમેયો સાબિત કરવાની ભૂમિતિની જૂની રીતના જેવી જ રીત કોશીએ અપનાવીને જૂનું અને નવું ગણિત ભેગાં કર્યાં. કોશીના કામની ગુણવત્તા એટલી બધી ઊંચી હતી કે તેમના પછી આવનારાઓએ તેમના વિષયનું વિસ્તરણ કર્યું કે તેમના કામમાં થોડાક સુધારાવધારા કર્યા.

સાતત્ય

લક્ષ પછી કોશીનું ધ્યાન સતતતા તરફ ગયું.

$y = f(x)$ થી શરૂ કરીને, તેમણે h નાનામાં નાની રાશિ (Quantity) લઈને વિધેયની કિંમત જ્યારે x ને બદલે $x + h$ થાય ત્યારે y નું શું થાય તે વિચાર્યું. આ વિધેય y થી બદલાયેલી $y + \Delta y$ થઈ, કોશીએ એ કિંમત નીચે પ્રમાણે દર્શાવી.

$y + \Delta y = f(x + h)$ અથવા $\Delta y = f(x + h) - f(x)$

જો h ની અત્યલ્પ કિંમત માટે તફાવત $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ પણ અત્યલ્પ હોય, તો કોશી f ને x નું સતત વિધેય કહે છે. જો સ્વતંત્ર ચલ x માં અત્યલ્પ

વધારો થાય, તો સાપેક્ષ(Dependent) ચલ y પણ અત્યલ્પ વધે, તો વિધેય x માટે સતત છે. અત્યલ્પનો અર્થ રાશિનું લક્ષ શૂન્ય છે. આ રીતે આપણે હાલની વ્યાખ્યા જોઈએ તો,

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = 0 = \lim_{h \to 0} f(x + h) - f(x)$$

હોય, તો f, x બિંદુએ સતત છે.

જે આપણી હાલની વ્યાખ્યા : જો $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$ હોય, તો f, x બિંદુએ સતત છે તેની બરાબર છે.

કોશીએ દાખલા માટે $y = \sin x$ લીધું. આથી,

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x$$

$$= 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$\frac{h}{2}$ અત્યલ્પ હોઈને, $\sin \frac{h}{2}$ પણ અત્યલ્પ છે. આથી Δy પણ અત્યલ્પ છે. આના કારણે $\sin$ કોઈ પણ x કિંમત માટે સતત છે.

કોશીએ નિયમિત વિધેય(Derived Function)નો કાળજીપૂર્વક વિચાર કર્યો અને વિકલન ભાગાકારની (Differential Quotient) વ્યાખ્યા $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ આપી.

અહીંયાં h અત્યલ્પ છે. y ના વિકલન માટે y', f ના વિકલન માટે f' વાપરતા. સાદા વિધેયો જેવા કે $y = \mathrm{A} \ln x$, $\mathrm{A}x$, $\frac{\mathrm{A}}{x}$, x^{A}, A^x, $\log_{\mathrm{A}} x$, $\sin x$, $\cos x$, Arc $\sin x$ અને Arc $\cos x$ ના વિકલનો મેળવી શકાય.

કોશીએ $y = \mathrm{L}(x) = \log_{\mathrm{A}} x$, જ્યાં, $\mathrm{A} > 1$ અચળ લઈને ગણતાં,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{L}(x+h) - \mathrm{L}(x)}{h} = \frac{\log_{\mathrm{A}}(x+h) - \log_{\mathrm{A}} x}{h}$$

$$= \frac{\log_{\mathrm{A}} \frac{x+h}{x}}{h} = \log_{\mathrm{A}}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_{\mathrm{A}} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_{\mathrm{A}} e$$

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log_{\mathrm{A}} x) = \frac{1}{x} \log_{\mathrm{A}} e$ કોશીએ મેળવ્યું.

8.3 અભિસરણ(Convergence)

કોશીના કામનો ખ્યાલ આવે તે માટે તેમના પુસ્તક "Cours d'analyse de l'Ecole Royal Polytechnique (1821)" ના નાના ભાગનું નીચે ભાષાંતર આપ્યું છે.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ શ્રેણીની એક પછી એક કોઈ નિયમથી આવતી રકમો છે. શ્રેણીની રકમો જુદી-જુદી રકમો ગણાય છે. પહેલી n રકમોનો સરવાળો $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ છે, જ્યાં n પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. n ની કિંમત વધતાં જો સરવાળો S_n નું લક્ષ કોઈ ચોક્કસ S હોય, તો શ્રેઢી(Series) અભિસારી કહેવાય. અને ચર્ચામાં રહેલો S એ શ્રેઢીનો સરવાળો કહેવાય છે. n ની કિંમત વધતાં જો સરવાળા S_n નું લક્ષ કોઈ ચોક્કસ રકમ ન હોય, તો શ્રેઢી અપસારી(Divergent) છે અને તેનો સરવાળો નથી. બંને બાબતમાં n ના અનુરૂપ x_n એ પ્રચલિત રકમ કહેવાય છે. પ્રચલિત રકમ n ના વિધેય તરીકે આપવામાં આવે તો શ્રેણી નક્કી કરવા પૂરતું છે.

સરળમાં સરળ શ્રેણીઓમાંની એક સમગુણોત્તર શ્રેણી(Geometric Progression) $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ છે. જેની પ્રચલિત રકમ x^{n-1} છે.

પહેલી n રકમોનો સરવાળો

$$S_n = 1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \text{ છે.}$$

આમાં, જો $x < 1$ હોય, તો $\frac{x^n}{1-x} \to 0$.

આથી, $S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ છે.

જો $x > 1$ હોય, તો S_n ની કોઈ ચોક્કસ કિંમત મળશે નહિ. આથી શ્રેઢી અપસારી છે.

ઉપરના નિયમોના આધારે શ્રેઢી $U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} + \ldots$ ના અભિસરણ માટે આવશ્યક અને પર્યાપ્ત (Necessary & Sufficient).

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ જેમ n વધે તેમ S_n કોઈ નિયત કિંમત S ના લક્ષે પહોંચે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો n ની અમર્યાદિત મોટી કિંમતો માટે સરવાળાઓ $S_n, S_{n+1}, \ldots$ લક્ષ S થી અને એકબીજાથી શૂન્યાભિચલ રાશિ જેટલા ભિન્ન હોય.

8.4 ઑગસ્ટીન - લૂઇસ કોશી(Augustin - Louis Cauchy)

કોશી નામ ઉપર 16 સર્વસામાન્ય ખ્યાલો (Concepts) અને પ્રમેયો (Theorems) છે, જે કોઈ પણ ગણિતશાસ્ત્રી કરતાં વધારે છે. તેમની જિંદગીની શરૂઆત પૅરિસમાં ઑગસ્ટ 21, 1789ના રોજ થઈ અને અંત સીઑક્સ(Sceaux), ફ્રાન્સમાં મે, 23, 1857ના રોજ આવ્યો. કોશી કુટુમ્બના પાડોશીઓ લાપ્લાસ(Laplace) અને બર્થોલેટ (Berthollet) હતા. બર્થોલેટ જાણીતા રસાયણશાસ્ત્રી અને સેનેટના વાઇસ પ્રેસિડન્ટ હતા. કોશીના પિતા લાગ્રાન્જને પણ સારી રીતે ઓળખતા હતા એટલું જ નહિ, લાગ્રાન્જે ઑગસ્ટીન મોટો થાય નહિ ત્યાં સુધી ગણિતનાં પુસ્તકો જોવા દેવાની પણ મનાઈ કરેલી.

16 વર્ષના હતા ત્યારે તેઓ ઇકોલ પૉલિટેક્નિક(Ecole Polytechnique)માં દાખલ થયા અને બે વર્ષ પછી પુલ અને રસ્તાઓની જાણીતા ઇકોલ ડીસ પૉઇન્ટ્સ ઇટ ચૌસીસ(Ecole des Points et Chaussees)માં દાખલ થયા અને આમાંથી સિવિલ એન્જિનિયરિંગમાં ઊંચામાં ઊંચા માન સાથે સ્નાતક થયા. 1810 માં સ્નાતક થયા પછી જુનીઅર એન્જિનિયર તરીકે ચિરબર્ગ(Cherburg) જ્યાં નેપોલિઅન નૌકાદળના પુરવઠાનું થાણું બાંધતા તે જગ્યાએ નોકરી સ્વીકારી. અહીંયાં ત્રણ વર્ષ રહ્યા અને ભારે કામ વચ્ચે પણ ગણિતના સંશોધનમાં ત્રણ પેપરો ઉપર કામ કર્યું. બે પેપરો સ્વીકારાયાં, જ્યારે એક ન સ્વીકારાયું. 23 વર્ષના થયા ત્યારે એટલે કે સપ્ટેમ્બર 1812માં વધારે કામ કરવાથી માંદા થઈ ગયા અને પેરિસ પાછા આવ્યા. આ ઉપરાંત એન્જિનિયરિંગમાંથી રસ ઓછો થવા માંડ્યો અને ગણિતના ગહન સૌંદર્ય (Abstract Beauty) તરફ આકર્ષાતા ગયા. આ કારણે પૅરિસમાં હોય, તો ગણિતને લગતું કામ મળે. લાગ્રાન્જ અને લાપ્લાસની મદદથી ઇકોલ પૉલિટેકનિકમાં ઇન્સ્ટ્રક્ટર (Instructor) બન્યા.

1815માં નેપોલિયન વૉટરલૂ (Waterloo) આગળ હારી ગયા અને આના કારણે બૉરબોન(Bourbon) વંશના લૂઇસ XVIII ને ફ્રાન્સના બંધારણીય રાજા બનાવવામાં આવ્યા. લૂઇસ XVIII એ લગભગ દશ વર્ષ રાજ્ય કર્યું. માર્ચ 1816માં The Acadame des Sciences ફરીથી શરૂ કરાયું અને ગણિત વિભાગના બે જાણીતા અધ્યાપકો લઝાર કારનૉટ(Lazare Carnot) અને ગેસ્પાર્ડ મોન્ગ(Gaspard Monge)ને દૂર કર્યા અને એક જગ્યાએ રાજાએ કોશીને નીમ્યા. ઘણા બધા અધ્યાપકોને જરાયે ન ગમ્યું. આના કારણે કોશીના ઘણા બધા દુશ્મન બની ગયા.

કોશી કલનગણિતમાં ખૂબ જ ચોક્સાઈથી પ્રમેયો દર્શાવીને સાબિત કરનારાઓમાંના એક હતા. તેમણે એકલા હાથે સંકર વિશ્લેષણ(Complex Analysis) અને ક્રમચય સમૂહ (Permutation Group) શરૂ કરેલાં. તે ફલપ્રદ(Prolific) લેખક હતા અને તેમણે લગભગ 800 સંશોધનના લેખો લખ્યા છે અને પાંચ પુસ્તકો લખ્યાં છે. તે રોમન કેથોલિક હતા અને બૉરબોન વંશના હિમાયતી (Royalist) હતા.

કોશીના પિતાજી લૂઇસ ફ્રેન્કોઇસ(Louis Francois) પૅરિસ પોલીસ વિભાગમાં ઊંચી પદવી પર હતા, પણ ફ્રેન્ચ વિપ્લવના (French Revolution) કારણે તેમની નોકરી ગઈ અને જીવ બચાવવા ફ્રાન્સના ગામડામાં જતા રહ્યા. આ બધું કોશીના જન્મના મહિના પહેલાં જ બન્યું હતું. કોશી 28 વર્ષના હતા ત્યારે પણ તે તેમના માતાપિતાને ત્યાં રહેતા હતા. તેમના પિતાએ તેમના માટે યોગ્ય સ્ત્રી અલોઇસા ડી બૂર(Aloisa de Bure) કોશીથી પાંચ વર્ષ નાનાં શોધી કાઢીને તેમની સાથે લગ્ન કરાવી આપ્યાં. ડી બૂર કુટુંબ પુસ્તકો વેચનારા અને છાપનાર હતા અને તેમણે કોશીનાં પુસ્તકો પ્રસિદ્ધ કર્યાં, રોમન કેથોલિક પ્રણાલિકા પ્રમાણે અલોઇસા અને ઑગસ્ટીનાં લગ્ન એપ્રિલ 4, 1818ના રોજ સેઇન્ટ-સુલપિસી(Saint Sulpice) ચર્ચમાં થયાં અને તેમની પહેલી પુત્રી મરિના ફ્રાન્કોઇસ એલિસિયા(Marina Francoise Alicia) 1819માં જન્મી અને બીજી પુત્રી મેરી માથિલ્ડી(Marie Mathilde) 1823માં જન્મી. કોશીને બે ભાઈઓ હતા અને તેમાંના એક એલેક્સાન્ડ્રે લૉરીનિ કોશી(Alexandre Laureni Cauchy) 1847માં ડિવિઝન ઑફ ધી કૉર્ટ ઑફ અપીલના(Division of the court of Appeal) પ્રેસિડન્ટ બન્યા અને કૉર્ટ ઑફ કેસેશનના(Court of Cassation) જજ બનેલા. બીજા ભાઈ યુજીન ફ્રાન્કૉઇસ કોશી છાપાઓમાં લેખો લખનાર(Columnist) હતા જેમણે પણ ગણિત વિશે ઘણું લખ્યું છે.

1830 સુધી ફ્રાન્સમાં રૂઢિચુસ્ત(Conservative) વાતાવરણ હતું જે કોશી માટે યોગ્ય હતું. 1824માં લૂઇસ XVIII નું નિધન થયું અને તેમને બાળકો ન હોઈને તેમના ભાઈ ચાર્લ્સ X રાજા બન્યા. આ વર્ષો દરમિયાન કોશીએ ઘણું અગત્યનું કામ કર્યું. કૉલેજ ડી ફ્રાન્સ અને ફેકલ્ટીઝ ડેસ સાયન્સિસ ડી પૅરિસમાં ભણાવતા.

ફ્રાન્સના 1830ના વિપ્લવે ચાર્લ્સ Xને દેશનિકાલ કર્યા. નવા રાજા લૂઇસ ફિલિપે ફ્રાન્સના અધ્યાપકો પાસે વફાદારીના સોગંદ લેવડાવ્યા. કોશીએ ચાર્લ્સ Xની વફાદારીના સોગંદ લીધેલા હોઈને, સોગંદ ન લીધા. આના કારણે તેમને નોકરીમાંથી કાઢી મૂક્યા.

તેઓ તેમના કુટુંબને પૅરિસમાં મૂકીને સ્વિટ્ઝરલૅન્ડ ગયા. 1831માં ટુરિન યુનિવર્સિટીમાં (ઇટાલી) ગણિતીય ભૌતિકશાસ્ત્રના(Mathematical Physics) અધ્યાપક નિમાયા. બે વર્ષ પછી જૂના રાજા ચાર્લ્સ X એ તેમના તેર વર્ષના પૌત્ર હેન્રી(Henry)ને ભણાવવા પ્રાગ (Prague, Czech) બોલાવ્યા. 1834માં તેમનું કુટુમ્બ પણ પ્રાગ આવ્યું. હેન્રી પાછળ કોશીએ મહેનત કરી, પણ હેન્રીને ગણિતમાં રસ ન પડ્યો તે ન જ પડ્યો!! 1838 કોશી અને તેમનું કુટુમ્બ પૅરિસ પાછું આવ્યું. ચાર્લ્સ X એ કોશીને બેરોનેટ(Baronet) બનાવ્યા પણ નવા રાજાને વફાદાર રહેવાના સોગંદ ન લેવા માટે તેમને અધ્યાપકપણું પાછું ન મળ્યું. આખરે 1848ની ક્રાન્તિ પછી રાજાને વફાદાર રહેવાના સોગંદ લેવાના બંધ થયા. તે પછી કોશીને ઇકોલ પૉલિટેક્નિકની નોકરી પાછી મળી. 1852માં લૂઇસ નેપોલિયને સોગંદ લેવડાવવાના શરૂ કર્યા પણ કોશીને અપવાદ ગણ્યા. 68 વર્ષની વયે મે 23, 1857ના રોજ કોશીનું નિધન થયું. આર્ચબિશપને સંબોધીને કોશીએ બોલેલા છેલ્લા શબ્દો, "માનવી મૃત્યુ પામે છે પણ તેઓનું કામ રહે છે" ('Men die but...their works endure.')

8.5 ε અને δ

કોશીની લક્ષની વ્યાખ્યા ફરીથી જોઈએ :

જ્યારે ચલને ક્રમાનુસાર કિંમતો આપવામાં આવે ત્યારે આપેલું વિધેય અસ્પષ્ટ રીતે ચોક્કસ કિંમતે પહોંચે, જે તફાવત અંતમાં ઇચ્છા પ્રમાણે નાનામાં નાનો રાખી શકાય, તો તે ચોક્કસ કિંમત વિધેયનું લક્ષ છે.

પહોંચવું શબ્દ ગતિ દર્શાવે છે. શું ગતિમાં છે ? ગતિમાં હોય, તો સમય(Time) અને અવકાશ(Space)નો લક્ષ પહેલાં વિચાર કરવો પડે.

આ બધાનો વિચાર કરવાની જરૂર ન રહી. વાયર્સ્ટ્રાસે(Weierstrass) આ વ્યાખ્યાને બીજી અદ્ભુત રીતે રજૂ કરી. અહીંયાં f વિધેય છે અને L લક્ષ છે.

જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ માટે $\delta > 0$ મળે, જેથી જો $0 < |x - a| < \delta$, હોય તો $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ છે. જો આમ બને તો આપણે $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$ વડે દર્શાવીશું. આનો અર્થ જેમ x એ a ને અનુલક્ષે છે તેમ $f(x)$ એ L ને અનુલક્ષે છે.

વિદ્યાર્થી : ગાડીની (કારની) ગતિ 40 કિલોમીટર છે. આનો અર્થ શો ?

શિક્ષક : કોઈ $\varepsilon > 0$ આપેલો છે, તો તેને અનુરૂપ કોઈ સંખ્યા $\delta > 0$ નું અસ્તિત્વ છે, કે જેથી જો

$|t_2 - t_1| < \delta$, હોય તો $\left|\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} - 40\right| < \varepsilon$ છે. અહીંયાં S અંતર છે અને t સમય છે.

વિદ્યાર્થી : આ દુનિયામાં આવો જવાબ આપવાનું કોણ વિચારે ?

આવો સંગીન ચોકસાઈવાળો કલનગણિતનો પાયો સહેજે સાહજિક નથી. કલનગણિત અંતરો અને ગતિ, સ્પર્શકો અને ક્ષેત્રફળોને લગતું છે નહિ કે અસમાનતાને (inequality) લગતું. જ્યારે સત્તરમી સદીમાં લાઇબ્નિઝ અને ન્યૂટને કલનગણિત શોધ્યું ત્યારે તેમણે ε અને δ વાપર્યાં ન હતાં અને ε અને δની સાબિતી વિકસાવવામાં 150 વર્ષ થયાં હતાં. આનો અર્થ એ છે કે આ કામ ઘણું અઘરું હતું અને આના કારણે કલનગણિતનો પાયો ઘણો અઘરો લાગે છે.

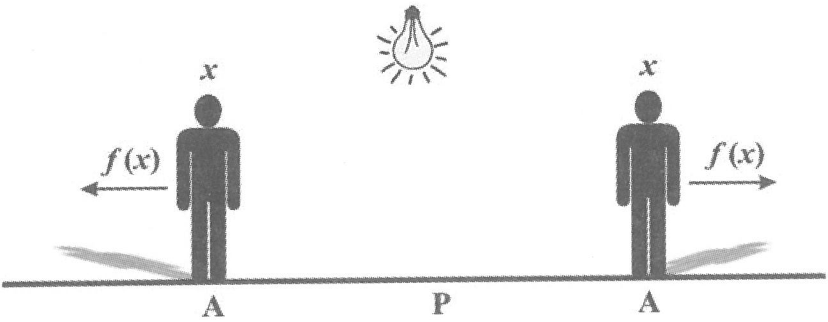
લક્ષની ε અને δ વાપરીને આપેલી વ્યાખ્યામાં કશું જ ગતિમાં નથી અને સમય (Time) અર્થ વગરનો અહીંયાં છે. આ વ્યાખ્યા ક્રિયાશીલ(dynamic) નથી, સ્થિર છે. આ વ્યાખ્યાથી લક્ષનાં બધાં જ પ્રમેયો ચોકસાઈની કોઈ પણ જાતની શંકા વગર સાબિત થઈ શકે.

આવી ટૂંકામાં ટૂંકી અને સમજવામાં જરાયે સરળ નહિ તેવી વ્યાખ્યા રજૂ કરનાર વાયરસ્ટ્રાસ બધાના આશ્ચર્ય વચ્ચે કૉલેજના અભ્યાસકાળ દરમિયાન સારા ગ્રેડ રાખી શકેલા નહિ અને એના કારણે આપણે જાણીએ છીએ તેવી કોઈ ડિગ્રી વગરના હતા અને છતાંયે ગણિતની બધી સમસ્યાઓ એક જ ઝપાટે ઉકેલી કાઢનાર હતા.

8.6 લક્ષની સરળ સમજૂતી

કલનગણિતશાસ્ત્રમાં લક્ષનો ખ્યાલ ખૂબ જ પ્રારંભિક અને અગત્યનો છે. પ્રથમ નજરે, લક્ષની ગાણિતીક શરતોવાળી જટિલ વ્યાખ્યા પરથી તેનો ખ્યાલ મેળવવો એ ખૂબ જ અઘરું છે. કારણ કે વિધેયની કિંમત અને વિધેયના લક્ષની કિંમત વચ્ચેનો નાજુક તફાવત સુસ્પષ્ટ થતો નથી.

લક્ષનો ખ્યાલ મેળવવા એક સામાન્ય અવલોકન જોઈએ. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ બંધ શેરીના મધ્યમાં સ્ટ્રીટ લાઇટ બિંદુ P પર આવેલ છે અને કોઈ વ્યક્તિ લાઇટના પ્રકાશના વ્યાપમાં રહે તે રીતે બિંદુ A પર સ્થિત છે. જે-તે સમયે તેના પડછાયાની લંબાઈ નોંધીએ. જેમ-જેમ વ્યક્તિ બિંદુ P તરફ આગળ વધે છે, તેમ-તેમ તેના પડછાયાની લંબાઈ ઘટતી જશે. આ જ રીતે જ્યારે વ્યક્તિ બિંદુ P પર પહોંચશે ત્યારે તેનો કોઈ પડછાયો રહેશે નહિ.



અવલોકન : જેમ-જેમ વ્યક્તિ બિંદુ P ને અનુલક્ષે છે, તેમ-તેમ તેનો પડછાયો 0ને અનુલક્ષે છે.

અહીં વ્યક્તિના ચલિત સ્થાનને x અને તેના પડછાયાની લંબાઈ $f(x)$ ને સુસંગત કહીએ તો લક્ષની ગાણિતીક વ્યાખ્યા પ્રમાણે જેમ $x \to \mathrm{P}$ તેમ $f(x) \to 0$ અથવા

તો $\lim_{x \to \mathrm{P}} f(x) = 0$થી દર્શાવી શકાય.

8.7 કાર્લ વાયરસ્ટ્રાસ(Karl Weierstrass)

કાર્લ વાયર્સ્ટ્રાસના પિતાજી વિલ્હેલ્મ(Wilhelm) કાર્લના જન્મસમયે ઑસ્ટનફેલ્ડના મેયરના સેક્રેટરી હતા. વિલ્હેલ્મ સારું ભણેલા હતા અને તેમને વિજ્ઞાન અને કલાનું વિશાળ જ્ઞાન હતું. કાર્લનાં માતા થીયોડોરા વન્ડરફોર્સ્ટ(Theodora Vonderforst) હતાં. કાર્લ ચાર ભાઈ-બહેનોમાં સૌથી મોટા હતા. ચારે જણ અપરણિત હતા.

કાર્લનો જન્મ ઑક્ટોબર 31, 1815માં ઑસ્ટનફેલ્ડ, (Ostenfelde) જર્મનીમાં થયેલો. કાર્લ જ્યારે આઠ વર્ષના થયા ત્યારે તેમના પિતા ટેક્સ ઇન્સ્પેક્ટર બન્યા. આ નોકરીમાં જુદી-જુદી જગ્યાએ ટૂંકા સમય માટે રહેવું પડતું હોઈને પ્રુસિયામાં કાર્લ ઘણી બધી સ્કૂલોમાં ફર્યા. 1827માં કાર્લનાં માતાનું નિધન થયું અને તેમના પિતાએ ફરીથી લગ્ન કર્યાં. 1829માં વિલ્હેલ્મ મુખ્ય ટેક્સ ઑફિસ પેડરબોર્ન(Paderborn)માં આસિસ્ટન્ટ બન્યા અને કાર્લ કેથોલિક જીમ્નેસિયમ્(Catholic Gynmasium)માં જોડાયા. જર્મનીમાં આપણી હાઇસ્કૂલને જીમ્નેસિયમ્ તરીકે ઓળખે છે. કાર્લને સ્કૂલમાં ખૂબ મજા પડતી અને ઓછામાં ઓછા સમયમાં ઘણું ભણતા. તેમનો રેકર્ડ તેજસ્વી રેકર્ડ હતો. એક વર્ષે તેમને સાત ઇનામો મળેલાં. જર્મનમાં પહેલો અને લેટિન, ગ્રીસ અને ગણિતમાં બીજો. ગણિત તેમને ખૂબ જ ગમતું.

સામાન્ય રીતે ગણિતશાસ્ત્રીઓને સંગીત ગમતું હોય છે. અહીંયાં નોંધવા જેવું છે કે કાર્લને કોઈ પણ જાતનું સંગીત ગમતું ન હતું. એમની બહેનોએ સંગીતના વર્ગમાં કાર્લને સંગીત ગમાડવા માટે લઈ ગયાં, પણ ભેંસ આગળ ભાગવત વાંચીએ તેવી પરિસ્થિતિ સંગીતની કાર્લ આગળ થઈ.

જ્યારે કાર્લ જીમ્નેશિયમ્‌માં હતા ત્યારે ગણિતમાં ઘણા આગળ હતા. તે નિયમિત ક્રેલ(Crelle)નું જર્નલ વાંચતા અને તેમના ભાઈઓને ગણિતનું ટ્યુશન આપતા. આમ છતાંયે તેમના પિતા વિલ્હેલ્મને કાર્લને ફાઇનાન્સનું ભણાવવું હતું. આથી જ્યારે કાર્લ જીમ્નેશિયમ્‌માંથી ગ્રેજ્યુએટ થયા ત્યારે તેમના પિતાએ કાર્લને લૉ, ફાઇનાન્સ અને અર્થશાસ્ત્રના કયા કયા વિષયો ભણવા તે નક્કી કરીને યુનિવર્સિટી ઑફ બૉનમાં અભ્યાસ અર્થે મોકલ્યા. કાર્લને મોટો સંઘર્ષ ઊભો થયો : તેમના પિતાની ઇચ્છાને માન આપીને તેમના કહ્યા પ્રમાણેના વિષયો ભણવા કે તેમને મનગમતું ગણિત ભણવું? આ સંઘર્ષ તેમનામાં એટલો બધો ઊંડો ઊતરી ગયો કે તેમના પિતાના જણાવેલા વિષયોના વર્ગોમાં ન ગયા કે સાથે-સાથે તેમને ગમતા ગણિતના વર્ગોમાં પણ ન ગયા. તેમને અભ્યાસની કંઈ પડી ન હતી. તેમની ખૂબ જ સારી શારીરિક શક્તિ અને ઝડપી પ્રતિક્રિયાના કારણે પટ્ટા ખેલવાના(Fencing) નિષ્ણાત બન્યા અને દારૂ પીધે રાખ્યો. 1838માં વાયર્સ્ટ્રાસે ખરાબ ગ્રેડ અને કોઈ ડિગ્રી વગર બૉન છોડ્યું.

કમાવા માટે, ભણાવવાના(Teaching) સર્ટિફિકેટ માટે મુનસ્ટર(Munster)ની 'થીઓલૉજિકલ ઍન્ડ ફિલોસોફિકલ અકેડમી(Theological and Philosophical Academy)'માં જોડાયા. અહીંયાં પ્રો. ક્રિસ્ટોફ ગુડરમેન(Christof Gudermann) તેમને ખૂબ જ ઊંડાણપૂર્વક અસર કરી ગયા. બંને જણ સાથે મળીને ઇલિપ્ટિક ફન્કશન્સ(Elliptic Functions)ની થિયરી અને આ વિધેયોનું ઘાત શ્રેણીમાં વિસ્તરણનો અભ્યાસ કર્યો. ભણાવવાનું સર્ટિફિકેટ મળ્યા પછી છવ્વીસ વર્ષની વયે જીમ્નેશિયમ્‌માં ભણાવવાનું શરૂ કર્યું, અને ચૌદ વર્ષ સુધી જીમ્નેશિયમમાં ભણાવ્યું. સૌથી પહેલાં મુનસ્ટર જીમ્નેશિયમ (1841-42), રૉયલ કૅથોલિક જીમ્નેશિયમ (1842-48) અને પૂર્વ પ્રશિયાના બાલ્ટિકના કિનારે બ્રોનબર્ગમાં (1848-50) ભણાવ્યું. આ સમય દરમિયાન તેમની નજીકમાં કોઈ ગણિતશાસ્ત્રી ન હતું. સાથે-સાથે ગણિતશાસ્ત્રી જોડે પત્રવ્યવહાર માટે ફંડ પણ ન હતું. પ્રાથમિક ગણિત ઉપરાંત વનસ્પતિશાસ્ત્રથી માંડીને વ્યાયામ સુધીના વિષયો ભણાવતા. તેમ છતાંયે ધીરજથી મેથેમેટીકલ એનાલીસિસ(Mathematical Analysis,

ગાણિતીક વિશ્લેષણ)માં કામ કર્યે ગયા. ક્રેલેના સામયિક(Crelle's Journal)માં બે વિદ્વતાભર્યા લેખોથી જીમ્નેશિયમ શિક્ષક આખાયે યુરોપમાં ગણિતના ક્ષેત્રે 1856માં જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી બન્યા.

ઇન્ડસ્ટ્રી ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઇન બર્લિનમાં 1856માં ગણિતના પ્રોફેસર બન્યા અને 1864 સુધી રહ્યા. યુનિવર્સિટી ઑફ બર્લિનમાં પણ સાથે-સાથે એસોસિએટ પ્રોફેસર બન્યા અને બર્લિન અકેડમીના સભ્ય પણ બન્યા. પ્રમાણમાં ઘણી મહેનત કરેલી હોઈને આખરે તેની અસર 1859માં દેખાઈ. આ પછી નાની-મોટી માંદગી આખી જિંદગી ચાલ્યા કરી. 1862 પછી વાયર્સ્ટ્રાસ ઊભા-ઊભા ભણાવી શકતા નહિ. આથી આગળ વધેલા તેમના વિદ્યાર્થીઓ તેમના બદલે જરૂરી વસ્તુઓ ચૉકબૉર્ડમાં લખતા. તેમનું ભણાવવાનું તેમની તબિયતના કારણે જરાયે બગડ્યું નથી. આથી ઊલટું તેમના ક્લાસમાં ભણાવવાની નોટોમાં નિયમિત સુધારાવધારા થતા હોઈને તેમના વર્ગોમાં વિદ્યાર્થીઓનો સતત વધારો થતો રહ્યો હતો.

યુનિવર્સિટી ઑફ બર્લિનના ડૉક્ટરલ પ્રોગ્રામમાં વિદ્યાર્થીનો રેકર્ડ રાખવાનું તેમણે શરૂ કર્યું. થીસિસ લેટિનમાં લખવી તે જરૂરી ન રાખ્યું. બર્લિનમાં તેમની સાથે કુમર(Kummer) અને ક્રોનેકર(Kronecker) પણ ખૂબ જ જાણીતા હોઈને ગણિતનું સરસ કેન્દ્ર ગણાતું અને તેમના વિદ્યાર્થીઓ પણ નામાંકિત ગણિતશાસ્ત્રીઓ આ ત્રણેની મહેનતના કારણે બનેલા.

વાયર્સ્ટ્રાસે વિધેય f બિંદુ a એ સતત હોવાની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી છે :

પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ માટે $\delta > 0$ મળે, જેથી જો $0 < |x - a| < \delta$ હોય, તો $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ થાય.

આથી, આપેલા ε અને બિંદુ a માટે આપણે જરૂરી $\delta > 0$ શોધી કાઢીએ.

વાયર્સ્ટ્રાસે વિધેય આપ્યું કે જે અનંત શ્રેઢીમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(4^n x) \text{ જ્યાં } 0 < x < 2\pi \text{ છે.}$$

આ વિધેય દરેક બિંદુએ સતત છે પણ આ વિધેયને કોઈ પણ બિંદુએ સ્પર્શક દોરી શકાતો નથી (કોઈ બિંદુએ વિકલિત નથી). આ સમાચાર સાંભળીને ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓ હચમચી ગયેલા.

વાયર્સ્ટ્રાસ 1892માં નિવૃત્ત થયા અને તેમનું 1897માં નિધન થયું.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકો અને લેખના આધારે લખેલું છે :

(1) Grabiner Judik V., "The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus", Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2005.

(2) E. T. Bell, "Men of Mathematics" Simon and Schuster, New York, 1937

(3) વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ, "કલનગણિતનો ઇતિહાસ-3" *સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય-વૃત્ત*, (જુલાઈ-ઑગસ્ટ, 2016) : 35

(4) William Dunham, "The Calculus Gallery", Princeton University Press, 2005.

◆

બર્નહાર્ડ રીમન (Bernhard Riemann)

9. રીમન સંકલ(Riemann Integral)

"If only I had the Theorems! Then I should find the proofs easily enough."

– Bernhard Riemann

9.1 પ્રસ્તાવના

કલનગણિતના વર્ગમાં સંકલનની શરૂઆત વક્ર અને x-અક્ષ વચ્ચેના ક્ષેત્રફળ માટે કરવામાં આવે છે, પણ જો સંકલનને વ્યવહારદક્ષ સરવાળાના સ્વરૂપમાં જોવામાં આવે તો સંકલનના ઘણા બધા ગુણધર્મો સમજવા સરળ થશે.

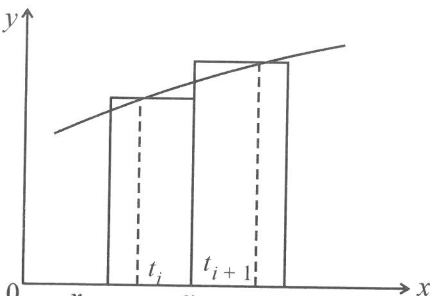
રીમન સંકલન એટલે શું ? તે પહેલાં સમજીએ. ધારો કે કોઈ વિધેય f અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત છે. સતતની જરૂરિયાત વધારે પડતી લાગે તો જરૂરિયાત ઓછી કરતા જઈશું. એટલે કે વિધેય f અંતરાલ$[a, b]$ માં શરૂઆતમાં એક જગ્યાએ અસતત છે, પછી n જગ્યાએ અસતત છે પછી અનંત જગ્યાએ અસતત છે. હાલમાં તો આપણે ધારીએ છીએ કે f, $[a, b]$ ઉપર સતત છે. આપણે અંતરાલ $[a, b]$ માં બિંદુઓ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ એ રીતે લઈએ છીએ કે જેથી $x_0 = a < x_1 < x_2 ... < x_n = b$ થાય. આને P વિભાજન કહેવામાં આવે છે. બે ક્રમિક બિંદુઓ વચ્ચેનું વધારેમાં વધારે અંતર હોય તેને વિભાજનનો અધિકૃત નમૂનો (Norm) કહીશું અને તેને $\|P\|$ થી દર્શાવીશું અને $\|P\| = \text{Max}\{x_{i+1} - x_i \mid i = 1, 2, ...n\}$ થાય. P ના સુધારેલા વિભાજનને P' કહીશું. જેમાં P નાં બધાં બિંદુઓ હોય અને બીજાં વધારાનાં બિંદુઓ હોય.

જો અંતરાલ $[a, b]$ નું વિભાજન $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ હોય અને f વિધેય $[a, b]$ ઉપર સતત હોય, તો n રીમન રકમોના સરવાળો

$$R(f, p) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ છે.}$$

અહીંયાં t_i એ અંતરાલમાં $[x_{i-1}, x_i]$ આવેલું કોઈ પણ બિંદુ છે.

જો $f > 0$ હોય, તો રીમન સરવાળો લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો છે. આ વ્યાખ્યામાં t_i ક્યાં લેવું તે જણાવ્યું નથી. આ રીમન સરવાળાના t_i બિંદુને અમુક રીતે જાણીતું બિંદુ બનાવી શકીએ.



આકૃતિ 1

અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ માં વિધેયની f કિંમત વધારેમાં વધારે(Supermum) હોય તે કિંમતને c_i વડે દર્શાવીશું અને આ રીતે અંતરાલોમાં લઈને આપણે વિભાજન P ના ઊર્ધ્વના સરવાળા(Uppersum) $U(f, p) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$ લઈશું.

તે જ પ્રમાણે અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ માં વિધેય fની કિમત ઓછામાં ઓછી (infimum) હોય તે કિમતને d_i વડે દર્શાવીશું અને આ રીતે દરેક અંતરાલોમાં f ની લઘુત્તમ લઈને આપણે વિભાજન P ના નિમ્ન સરવાળા(lower sum)

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i - x_{i-1})$$ લઈશું.

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

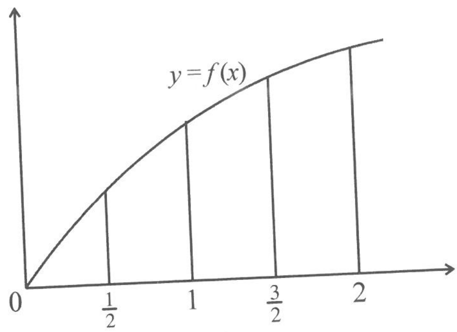
ઊર્ધ્વ સરવાળા માટે,

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$માં વધારેમાં વધારે

$$c_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

એ જ પ્રમાણે $c_2 = f(1)$,

$$c_3 = f\left(\frac{3}{2}\right), \; c_4 = f(2).$$



આકૃતિ 2

આથી, ઊર્ધ્વ સરવાળા,

$$U(f, P) = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{2} + c_4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right\}$$ થશે.

એ જ પ્રમાણે નિમ્ન સરવાળા માટે : $d_1 = f(0)$, $d_2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $d_3 = f(1)$,

$$d_4 = f\left(\frac{3}{2}\right).$$

આથી, નિમ્ન સરવાળા = $L(f, P) = \frac{1}{2}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$ થશે.

વિભાજન P નું સુધારેલું વિભાજન $P' = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$. આથી,

$$U(f, P') = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left\{f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} + U(f, P) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} + U(f, P)$$

$\therefore \quad U(f, P') \le U(f, P).$

આ જ રીતે,

$$L(f, P') = \frac{1}{4}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right) + L(f, P) - \frac{1}{2}f(0)$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{4}\right)-f(0)\right) + L(f, P)$$

$\therefore \quad L(f, P') \ge L(f, P).$

સુધારેલા વિભાજન P' માટે, $L(f, P') \ge L(f, P)$ અને $U(f, P') \le U(f, P)$.

આથી, જેમ-જેમ સુધારેલા વિભાજનમાં ઘણાં વધારે બિંદુઓ લેતા જઈશું તેમ-તેમ U અને L વચ્ચેનો તફાવત ઘટતો જશે અને આપણે,

$I^*(f) = \text{Inf}\{U(f, P) \mid P \text{ is a partition of } [a, b]\}$

$I_*(f) = \text{Sup}\{L(f, P) \mid P \text{ is a partition of } [a, b]\}$

જો $I^*(f) = I_*(f)$ હોય, તો f રીમન સંકલીય છે અને તે રીમન સંકલનને

$\int_a^b f(x)dx$ થી દર્શાવીશું.

પ્રમેય : જો વિધેય f અંતરાલ $[a, b]$ માં સતત હોય, તો તે f રીમન સંકલીય વિધેય છે.

આ ખૂબ જ અગત્યનું પ્રમેય છે. આ પ્રમેયનું ઊલટું સાચું નથી.

9.2 ડિરિચ્લેટનું વિધેય(Dirichlet's Function)

f ફક્ત એક જગ્યા(બિંદુ)એ અસતત છે અને બાકીની બધી જ જગ્યાએ અંતરાલ $[\chi, \beta]$ માં સતત છે. બિંદુ r એ અંતરાલ $[\chi, \beta]$ નું બિંદુ છે જ્યાં વિધેય f અસતત છે. કોશીએ આવા સંકલનો મેળવવાની સરસ રીત નીચે પ્રમાણે બતાવી છે.

$$\int_\chi^\beta f(x)dx = \int_x^r f(x)dx + \int_r^\beta f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to r^-} \int_x^t f(x)dx + \lim_{t \to r^+} \int_t^\beta f(x)dx$$

આ આપણે મેળવી શકીએ.

હવે ધારો કે વિધેય f આંતરાલ $[\chi, \beta]$ માં બે બિંદુએ r_1 અને r_2 એ અસતત છે. અહીંયાં α_1 એ (r_1, r_2) માં કોઈ પણ બિંદુ છે જ્યાં f સતત છે.

$$\int_\chi^\beta f(x)dx = \int_x^{r_1} f(x)dx + \int_{r_1}^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{r_2} f(x)dx + \int_{r_2}^\beta f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to r_1^-} \int_\chi^t f(x)dx + \lim_{t \to r_1^+} \int_t^{\alpha_1} f(x)dx +$$

$$\lim_{t \to r_2^-} \int_{\alpha_1}^t f(x)dx + \lim_{t \to r_2^+} \int_t^\beta f(x)dx$$

આ જ પ્રમાણે જો f અંતરાલ $[\chi, \beta]$ માં n બિંદુઓ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ એ અસતત છે, તો તેના સંકલની વ્યાખ્યા ઉપર મુજબ આપી શકાય.

જો વિધેય f આપેલા અંતરાલ [χ, β] માં અનંત જગ્યાએ અસતત હોય, તો કોશીની રીત કામ ન આવે.

અગાઉની રીતમાં સુધારો વધારો કરવો જ રહ્યો. ડિરિચ્લેટ વિધેય ϕ નીચે મુજબ આપ્યું છે :

$$\phi(x) = \begin{cases} c \text{ જો } x \text{ સંમેય સંખ્યા(Rational) હોય,} \\ d \text{ જો } x \text{ અસંમેય સંખ્યા(Irrational) હોય,} \end{cases}$$

દરેકે દરેક x માટે y હોઈને આ વિધેય છે. આનો આલેખ દોરવો લગભગ અશક્ય છે, કારણ કે બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે એક અસંમેય છે અને બે અસંમેય વચ્ચે એક સંમેય સંખ્યા છે. આથી, ϕ આના આલેખમાં ગમે તેટલો નાનો અંતરાલ લઈએ તોપણ કિંમતો c અને d વચ્ચે અનંત વખત ફર્યા કરશે. આથીયે ખરાબ તો ϕ કોઈ જગ્યાએ સતત નથી, કારણ કે $\lim_{h \to 0} \phi(x + h)$ નું અસ્તિત્વ નથી કારણ કે, $h \to 0$ થયું હોય ત્યારે અનંત સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચેથી પસાર થાય છે. આના કારણે $\phi(x + h)$ નું અસ્તિત્વ નથી. આથી $\phi(x)$ કોઈ પણ જગ્યાએ સતત નથી.

આ ડિરિચ્લેટ વિધેયના ઉદાહરણે બે વસ્તુઓ બતાવી.

(1) વિધેયોનું વિશ્વ કોઈએ ધાર્યું હોય તેનાથી વિશાળ છે.

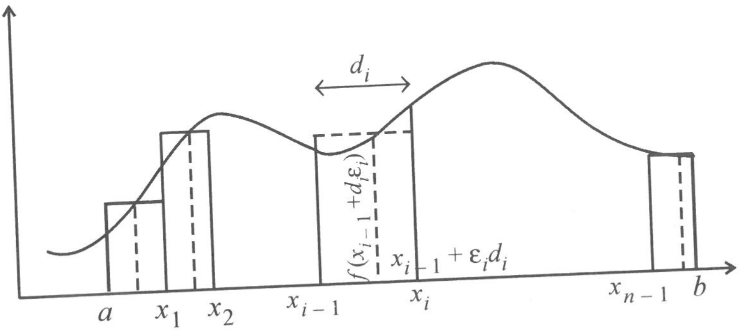
(2) આવા વિધેયોનું સંકલન મેળવવા માટે કોશીની રીત પૂરતી નથી.

આથી, નવી રીતો મેળવવાની રહી. આ પડકાર ડિરિચ્લેટના તેજસ્વી વિદ્યાર્થી ફ્રેડરિક બર્નહાર્ડ રીમને(Friedrich Bernhard Riemann) સ્વીકાર્યો અને સંકલતાને સતતાથી અલગ કરવાનો બહાદુરીભર્યો અને વાદવિવાદ જગાડનારો વિચાર કર્યો.

રીમન સંકલ (Riemann Integral)

રીમને તેમની થીસિસ Habilitation sochrift માં સવાલ કર્યો, "$\int_a^b f(x)dx$ થી શું સમજવું?" અહીંયાં f અંતરાલ [a, b] માં સીમિત (bounded) છે.

સૌથી પહેલાં તેમણે અંતરાલ [a, b] માં શ્રેણી $a < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ લીધી. હાલમાં આને વિભાજન(Partition)થી ઓળખવામાં આવે છે. એમણે પરિણમતા પેટા અંતરાલોની લંબાઈને $d_1 = x_1 - a, \ldots, d_i = x_i - x_{i-1}, \ldots,$

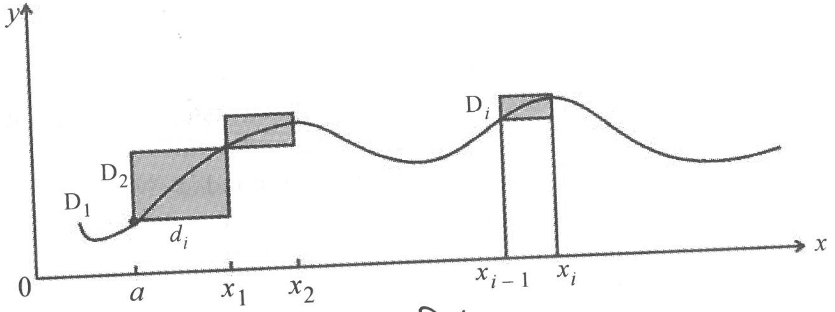


આકૃતિ 3

$d_n = b - x_{n-1}, \ldots$ થી દર્શાવી. આ પછી રીમને શ્રેણી $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ લીધી જ્યાં તેમની કિંમત 0 અને 1 વચ્ચે છે. આથી દરેક ε_i માટે $x_{i-1} + \varepsilon_i d_i$, $x_{i-1} + 0 \cdot d_i = x_{i-1}$ અને $x_{i-1} + 1 \cdot d_i = x_{i-1} + x_i - x_{i-1} = x_i$ વચ્ચેની કોઈ રકમ છે એટલે કે $x_{i-1} + \varepsilon_i d_i$ અંતરાલ $[x_{i-1}, x_i]$ માં છે. આ પછી એમણે,

$$S = d_1 f(a + \varepsilon_1 d_1) + d_2 f(x_1 + \varepsilon_2 d_2) + \ldots + d_i f(x_{i-1} + \varepsilon_i d_i) + \ldots + d_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n d_n)$$

ની વ્યાખ્યા આપી. આ સરવાળાને આપણે 'રીમન સરવાળા(Riemann Sum)' તરીકે ઓળખીએ છીએ. આ સરવાળો આકૃતિ 3માં બતાવ્યા પ્રમાણે જુદા-જુદા પેટા અંતરાલો ઉપરના લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો છે. અહીંયાં i પેટા અંતરાલમાં લંબચોરસનો પાયો d_i અને ઊંચાઈ $f(x_{i-1} + d_i\varepsilon_i)$ છે.



આકૃતિ 4

જેમ જેમ d_i અત્યલ્પ બનતો જાય, તેમ તેમ જો S કોઈ ચોક્કસ કિંમત A ની નજીક આવતો જાય તો આ ચોક્કસ કિંમતને $\int_a^b f(x)dx$ થી દર્શાવીશું. જો S નો આ ગુણધર્મ ન હોય, તો $\int_a^b f(x)dx$ અર્થ વગરનું છે.

આ વ્યાખ્યામાં f ની સતતતા ધારવામાં આવી નથી.

9.3 રીમન સંકલનની શરતો

અગાઉનું વિધેય f અને વિભાજન $a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ લઈએ. અંતરાલ$[a, x_1]$માં fની વધુમાં વધુ અને fની ઓછામાં ઓછી કિંમતોના તફાવતને D_1 થી દર્શાવીએ. તે જ પ્રમાણે બીજા અંતરાલ $[x_1, x_2]$ માં f ની વધુમાં વધુ કિંમત અને f ની ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D_2 થી દર્શાવીએ. આકૃતિ 4માં આ તફાવતો બતાવ્યા છે. $[a, b]$ માં fની વધારેમાં વધારે અને f ની ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D થી દર્શાવીએ. કોઈ પણ
i માટે $D_i \leq D$ રીમને આ તફાવતો લઈને R નવા સરવાળાની વ્યાખ્યા

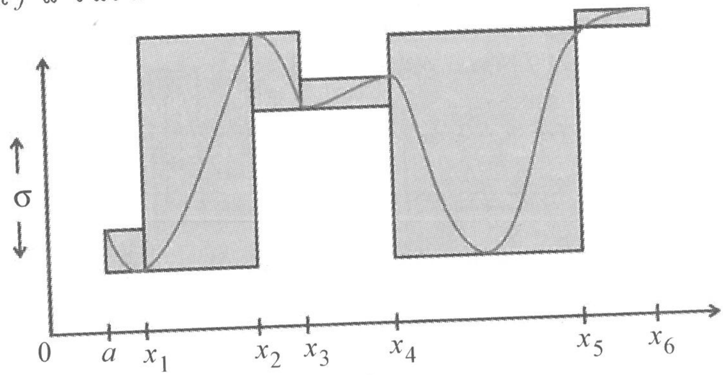
$$R = D_1 d_1 + D_2 d_2 + \ldots + D_i d_i + D_n d_n \qquad \ldots(1)$$

લીધી. આપણે કોઈ ધન સંખ્યા $d > 0$ લઈએ અને અંતરાલ $[a, b]$ નાં વિભાજનો જોઈએ કે જેથી વિભાજનમાં $\text{Max}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \leq d$ હોય.

આ વિભાજન લઈને R ની કિંમત મેળવીએ જેને $\Delta(d)$ થી દર્શાવીશું. રીમનને ચોખ્ખું દેખાયું કે જો $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$ હોય, તો $\int_a^b f(x)dx$ મળે અને જો $\int_a^b f(x)dx$ હોય, તો $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$ છે. આનો અર્થ એ થયો કે જેમ-જેમ $[a, b]$ ના નાના ભાગો કરતા જઈશું તેમ-તેમ આકૃતિ 4માં ઘેરા રંગનો ભાગ ઘટતો જશે અને ઘટતો ઘટતો શૂન્ય તરફ જશે.

રીમને અતિ મહત્ત્વનો સવાલ પૂછ્યો, "કયા સંજોગોમાં સંકલન થઈ શકે અને કયા સંજોગોમાં ન થઈ શકે." જાણે કે રીમન આના જવાબ માટે તૈયાર જ હતા. હાલમાં આપણે તેને "રીમનની સંકલન માટેની શરતો" તરીકે ઓળખીએ છીએ. રીમનની વિચારવાની રીતનો ખ્યાલ આવે તે માટે આગળ વધીશું.

સૌથી પહેલાં કોઈ પણ ઘન સંખ્યા $\sigma > 0$ લઈએ. આપેલા વિભાજનમાં આપણે fની વધારેમાં અને ઓછામાં ઓછી કિંમતને તફાવત મેળવીએ.



આકૃતિ 5

σ કરતાં વધારે તફાવતોવાળા અંતરાલો આકૃતિ 5માં જોઈએ. જે અંતરાલોમાં fની કિંમતોનો તફાવત આવેલી સંખ્યા σ કરતાં વધારે છે. તે અંતરાલો $[x_1, x_2]$ અને $[x_4, x_5]$ છે. જે અંતરાલોમાં fની કિંમતોનો તફાવત σ કરતાં મોટો હોય તેને 'A જાતના અંતરાલો' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તેમના સરવાળા માટે $S = S(\sigma) = (x_1 - x_2) + (x_5 - x_4)$ છે. જે અંતરાલોમાં fની કિંમતોનો તફાવત σ કરતાં ઓછો છે તે અંતરાલો $[a, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ અને $[x_5, x_6]$. જે અંતરાલોમાં f ની કિંમતનો તફાવત જ σ કરતાં ઓછો હોય, તેવા અંતરાલોને 'B જાતના અંતરાલો' તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

રીમનની સંકલન માટેની શરતો :

અહીંયાં, વિધેય f આંતરાલ $[a, b]$ માં સીમિત(bounded) વિધેય છે. અગાઉની જેમ d કોઈ પણ આપેલી સંખ્યા છે અને આપણા અંતરાલ $[a, b]$ના વિભાજનોની લંબાઈ d થી ઓછી છે. આપણો ખ્યાલ d નાનો થતો જાય એટલે કે $d \to 0$ હોય, તો

$$R = D_1 d_1 + D_2 d_2 + \ldots + D_i d_i + D_n d_n$$

$$= \sum_{\text{A જાત}} d_i D_i + \sum_{\text{B જાત}} d_i D_i$$

નું શું થાય તે જોવાનો છે.

અંતરાલ $[a, b]$ માં f ની વધારેમાં વધારે અને ઓછામાં ઓછી કિંમતોનો તફાવત ધારો કે D છે, તો $D_i \leq D$ હોઈને

$$\sum_{A \text{ જાત}} d_i D_i \leq \sum_{A \text{ જાત}} d_i D = D \sum_{A \text{ જાત}} d_i = DS(\sigma)$$

જ્યાં $S(\sigma) = \sum_{A \text{ જાત}} d_i$

B જાત માટે

$$\sum_{B \text{ જાત}} d_i D_i \leq \sum_{B \text{ જાત}} d_i D = D \sum_{B \text{ જાત}} d_i \leq D(b-a) \leq \sigma(b-a)$$

$$\therefore \quad R = \sum_{A \text{ જાત}} d_i D_i + \sum_{B \text{ જાત}} d_i D_i \leq DS(\sigma) + \sigma(b-a)$$

આ સમીકરણ કોઈ પણ σ માટે સાચું હોઈને, σ ની કિંમત એવી લઈએ કે જેથી $\sigma(b-a)$ આપણને ગમે તેવી નાની બને. આપણને આ $\sigma > 0$ આપેલું હોઈને, આપણે d એ રીતે પસંદ કરીએ કે જેથી $DS(\sigma)$ નાનું રહે. આથી $R = \Delta(d)$ જરૂર હોય, તે પ્રમાણે નાનો બનાવી શકાય. ટૂંકમાં $\lim_{d \to 0} R = 0$ હોય, $\int_a^b f(x)dx$ મળે.

વિધેયને રીમન સંકલન હોવા માટે તેમની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર કાબૂ બહાર ન હોવો જોઈએ. જે વિધેયોની કિંમતો વધારે પડતી કૂદાકૂદ કરતી હોય તે વિધેયોનું સંકલન ન થઈ શકે. ભૂમિતિની રીતે જોઈએ તો x-અક્ષ અને આવા વિધેયો વચ્ચે કહી શકાય તેવું ક્ષેત્રફળ જ ન હોય.

રીમન સંકલન માટેની શરત અંતરાલ $[a, b]$ માં સીમિત વિધેયનું સંકલન થઈ શકે નહિ તે નક્કી કરવાનું છે. આપણે ડિરિચ્લેટ વિધેય લઈએ અને સરળતા માટે $c = 1$ અને $d = 0$ લઈએ, આથી,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ જો } x \text{ સંમેય હોય.} \\ 0 \text{ જો } x \text{ અસંમેય હોય.} \end{cases}$$

રીમનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે શક્ય હોય તો $\int_a^b f(x)dx$ મેળવીએ.

$\sigma(b - a) = \sigma = \varepsilon$. ધારો કે, $\sigma = \frac{1}{4}$ છે અને અંતરાલ [0, 1] નું વિભાજન n પેટા અંતરાલોમાં કરવા માટે $0 < x_1 <...< x_{n-1} < 1$ લઈએ. આ પેટા અંતરાલો ગમે તેટલા નાના હોય, તોપણ તેમાં અગણિત સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ છે. આપણે કોઈ પણ પેટાઅંતરાલ $[x_i, x_{i+1}]$ લઈએ. આ અંતરાલમાં $\phi(x)$ ની કિંમતો 0 અને 1 વચ્ચે ફર્યા કરે છે. ϕ ની કિંમત વધારેમાં વધારે 1 અને ઓછામાં ઓછી 0 હોઈને તફાવત $D_1 = 1 - 0 = 1 > \frac{1}{4}$. આથી, પેટા અંતરાલ $[x_i, x_{i+1}]$ એ A પ્રકારનો છે. આથી બધા જ પેટા અંતરાલો A પ્રકારના હોઈને $S(\sigma) = S\left(\frac{1}{4}\right) = \Sigma d_i = 1$ થશે. રીમનની શરત મુજબ,

$$\lim_{d \to 0} S(\sigma) = 1 \neq 0 \text{ આથી, } \int_0^1 \phi(x)dx \text{ નું અસ્તિત્વ નથી.}$$

9.4 બર્નહાર્ડ રીમન(Bernhard Riemann)

ગરીબાઈએ કોઈનેય ગણિતમાં રસ લેતા અટકાવ્યા નથી. ગરીબાઈએ વ્યક્તિઓની તંદુરસ્તીને જરૂર ઘણી અસર કરી છે. મોટા ભાગના ગરીબાઈમાંથી આવનારા ગણિતશાસ્ત્રીઓએ મોટી કિંમત ચૂકવી છે. પ્રમાણમાં નાની ઉંમરે તેઓનું નિધન થતું હોઈને ગણિતના ક્ષેત્રમાં પ્રમાણમાં ઓછો ફાળો તેઓ આપી શક્યા છે. રામાનૂજન, આબેલ (Abel), રીમન વગેરે ગરીબાઈથી ટેવાયેલા હતા. રીમન પ્રમાણમાં જુદા પ્રકારના છે. તેમનું કામ વિશ્લેષણ (વાસ્તવિક તેમજ સંકર), સંખ્યાશાસ્ત્ર (Theory of Numbers), ભૂમિતિમાં રીમન નવો રસ્તો પાડે છે. આ કારણે આપણે તેમનું જીવન જાણવું જોઈએ.

રીમન હાલના ફેડેરલ રિપબ્લિક ઑફ જર્મનીના બ્રેસેલેન્ઝ(Breselang) ગામમાં સપ્ટેમ્બર 17, 1826માં જન્મેલા. તેમના પિતા ફ્રેડરિક બર્નહાર્ડ રીમન લુથરન (Lutheran) ધર્મના બ્રેસેલેન્ઝમાં પાદરી હતા. ફ્રેડરિક બર્નહાર્ડ નેપોલિયનની લડાઈઓ લડેલા. રીમન છ ભાઈબહેનોમાં બીજા નંબરના હતા. તેમનાં માતા ચારલોટ ઇબેલનું (Charlote Ebell) નાની ઉંમરે ટી.બી.થી નિધન થયેલું. ફ્રેડરિક તેમનાં બાળકો માટે શિક્ષક હતા, તે તેમનાં બાળકોને દસ વર્ષનાં થાય ત્યાં સુધી ઘેર જ અભ્યાસ કરાવતા. 1840માં બર્નહાર્ડ ત્રીજા ધોરણમાં હેનોવરમાં દાખલ થયા. હેનોવરમાં તેમનાં દાદી રહેતાં હતાં. 1842માં તેમનાં દાદીનું નિધન થતાં, જ્યાં તેમનું કુટુંબ રહેતું હતું ત્યાં

(લુનબર્ગ) હાઇસ્કૂલમાં આવ્યા. (ખરેખર જર્મનીમાં આપણી હાઇસ્કૂલો માટે જીમ્નેસિયમો વપરાય છે.) અહીંયા બાઇબલનો ખૂબ જ ઊંડાણપૂર્વક અભ્યાસ કર્યો અને કોઈ-કોઈ વખત ગણિત તેમને અવળા પાટે ચડાવી દેતું. તેમની ગણિતની આવડત જીમ્નેસિયમમાં દેખાવા માંડી. જીમ્નેસિયમના ડિરેક્ટરે રીમનને તેમની પોતાની ગણિતની લાઇબ્રેરી વાપરવાની છૂટ આપેલી. સંખ્યાગણિતનું લેજેન્ડ્રે(Legendre)નું 800 પાનાનું પુસ્તક રીમન વાંચવા લાવેલા. છ દિવસ પછી આ પુસ્તક પાછું આપવા ગયા અને ડિરેક્ટરે પૂછ્યું, ''કેટલાં પાનાં વાંચ્યાં ?'' સીધો જવાબ આપવાના બદલે રીમને જણાવ્યું, ''આ પુસ્તક અદ્ભુત છે. મેં તેના ઉપર પ્રભુત્વ મેળવ્યું છે.'' થોડાક વખત પછી આ પુસ્તકની પરીક્ષામાં જરાયે ભૂલ પડી ન હતી.

1846માં રીમનના પિતાએ રીમનને યુનિવર્સિટી ઑફ ગૉટિન્ગનમાં ભણવા મોકલવા માટે પૈસા ગમે ત્યાંથી લાવીને ભેગા કર્યા. રીમન તત્ત્વજ્ઞાન(Philosophy) અને ધર્મશાસ્ત્ર(Theology) ભણીને પાદરી થશે તેવી ગણતરીએ ભણવા આવ્યા. રીમને ગૉસના હાથ નીચે ગણિત ભણવાનું શરૂ કર્યું. ગૉસે રીમનને ધર્મશાસ્ત્ર છોડી દઈને ગણિત ભણવાનું સૂચન કર્યું. નસીબજોગે રીમનના પિતાએ પણ હા પાડી. તમને બધાંને આશ્ચર્ય થશે, પણ તે સમયે યુનિવર્સિટી ઑફ બર્લિનના ગણિત વિભાગમાં જેકોબી, ડિરિચ્લેટ, સ્ટેઇનર અને આઇઝનસ્ટાઈન(Eisenstein) હોઈને રીમન યુનિવર્સિટી ઑફ બર્લિનમાં 1847માં બે વર્ષ અભ્યાસ કરવા આવ્યા. 1849માં ગૉટિન્ગન પાછા આવ્યા અને 1851માં ગૉસને Ph.D.ની થીસિસ, ''સંકર ચલના વિધેયના પ્રચલિત સિદ્ધાંતના મૂળ પાયાઓ (Foundations for a general theory of functions of complex variables)'' આપી. ગૉસ ખરેખર તેમની જિંદગીના અંત ભાગમાં હોઈને તેમનો અભિપ્રાય આ થીસિસ માટેનો સામાન્ય ન ગણાય. ગૉસે જણાવ્યું, ''The dissertation submitted by Herr Riemann offers convincing evidence of the authors thorough and penetrating investigations in those parts of the subject treated in the Dissertation of a creative, active, truly mathematical mind, and of a gloriouoly fertile originality. The presentation is perspicuous and concise and, in places, beautiful. The majority of readers would have preffered a greater clarity of arrangement. The whole is substantial, valuable work, which not only satisfies the standards demanded for doctoral dissertation, but far exceeds them.''

આ પછીનું જર્મન યુનિવર્સિટીઓમાં અધ્યાપકો બનવા માટેનું પગલું Privat dozent (જેને આપણે અંગત શિક્ષક કહીએ જેનો પગાર સંસ્થા આપતી ન હોય) તરીકેની લાયકાત મેળવવાનું. આના માટે તેમને પ્રાથમિક ચકાસણી નિબંધ(Probationary Essay) અને પ્રાથમિક ચકાસણી માટેનું ભાષણ(Probationary Lecture) બધાની સમક્ષ રજૂ કરવાનું હોય છે. ફૂરિયર શ્રેઢી અને જેને આપણે રીમન ભૂમિતિ તરીકે ઓળખીએ છીએ તે પસંદ કર્યા. આ બંને રીમનની શ્રેષ્ઠ કૃતિઓ ગણાય છે. આઇન્સ્ટાઈને સાપેક્ષવાદમાં રીમન ભૂમિતિનો ઉપયોગ કર્યો છે.

1857માં રીમનને એક્સ્ટ્રાઑર્ડિનરી પ્રોફેસર બનાવવા પ્રયત્ન કરેલો, પણ નિષ્ફળ ગયેલો. પણ તે સમયથી તેમને નિયમિત પગાર મળતો થયો. 1859માં ડિરિચ્લેટના નિધન પછી તેમને ગણિતવિભાગના વડા તરીકે નિમવામાં આવ્યા. 1862માં તેમની બહેનની બહેનપણી ઇલિશ કૉશ(Elise Koch) જોડે લગ્ન થયાં અને તેમને એક પુત્રી પણ હતી. જે વર્ષે રીમનનાં લગ્ન થયાં તે જ વર્ષે પાનખર ઋતુમાં રીમનને ખૂબ જ ખરાબ શરદી થયેલી જે ટી.બી.(Tuberculosis)માં ફેરવાઈ. જિંદગીમાં કોઈ વખત રીમનની તબિયત સારી ન હતી. જ્યારે રીમન 20 વર્ષના હતા ત્યારે તેમની માતાનું નિધન થયેલું અને રીમનના ભાઈ અને ત્રણ બહેનો જ્યારે જુવાન હતાં ત્યારે જ માતા મૃત્યુ પામેલાં. રીમન ઇટાલીના ગરમ વાતાવરણમાં જઈને માંદગીથી બચવા મથ્યા. 1862-63નો શિયાળો ઇટાલીમાં પસાર કરેલો. જૂન 1863માં ગૉટિન્ગન પાછા આવ્યા પણ તબિયત ખરાબ થતાં ઇટાલી પાછા ફર્યા. રીમન 1863ના ઑગસ્ટમાં પિત્સા(Pisa) રોકાયા. પિત્સામાં તેમની પુત્રીનો જન્મ થયેલો. યુનિવર્સિટી ઑફ પિત્સાએ રીમનને પ્રોફેસર તરીકેની નિમણૂકનો પત્ર આપ્યો, પણ રીમને ખેદ દર્શાવીને ના પાડી. સાથે-સાથે યુનિવર્સિટી ઑફ ગૉટિન્ગન પણ બધા જ પ્રકારની મદદ કરતી. ઑગસ્ટ 14, 1864થી ઑક્ટોબર 1865 સુધી ઇટાલીમાં તબિયતના કારણે રહ્યા. 1865-66ના શિયાળામાં રીમન ગૉટિન્ગન પાછા આવ્યા અને જૂન 1866માં સિલેસ્કા(Selasca) જે મૅગિઓર (Maggiore) સરોવરના કિનારા ઉપર આવેલું છે ત્યાં આવ્યા. જિંદગીના છેલ્લા દિવસો રીમને સિલેસ્કાના વિલામાં વિતાવ્યા. રીમનના વિદ્યાર્થી અને મિત્ર ડેડેકિન્ડે(Dedekind) લખ્યું :

"તેમની શક્તિ ઝડપથી ઘટી; તેમને પોતાને લાગ્યું કે તેમનો અંત નજીકમાં છે. તેમના નિધનના આગલા દિવસે, અંજીર(Fig)ના ઝાડ નીચે આરામ કરતા હતા, તેમનો આત્મા દિવ્ય કુદરતી દેખાવ જોઈને આનંદમાં હતો, તે તેમના છેલ્લા કામ ઉપર કામ કરતા હતા જે કમનસીબે અધૂરું જ પડ્યું છે."

રીમનની બિગનઝોલો(Biganzolo), ઇટાલીની કબર ઉપર, ''અને આપણે જાણીએ છીએ કે બધી વસ્તુઓ તેમના સારા માટે ભેગી મળીને કામ કરે છે જે પ્રભુને ગમે છે, તેમને તેમની યોજના પ્રમાણે બોલાવ્યા છે.''

'પ્રભુમય જ્યૉર્ગ ફ્રેડરિક બર્નહાર્ડ રીમન અહીંયાં આરામ કરે છે.' લખેલું છે.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

(1) William Dunham, The Calculus Gallery, Princeton University Press, Princenton and Oxford, 2005.

(2) E. T. Bell, Men of Mathematics, Simon and Schuster, New York, 1965.

(3) Ronald Calinger, Classics of Mathematics, Prentice Hall, Englwood Cliff, New Jersey 07632, 1995.

◆

હેન્રી લેબેગ (Henry Lebesgue)

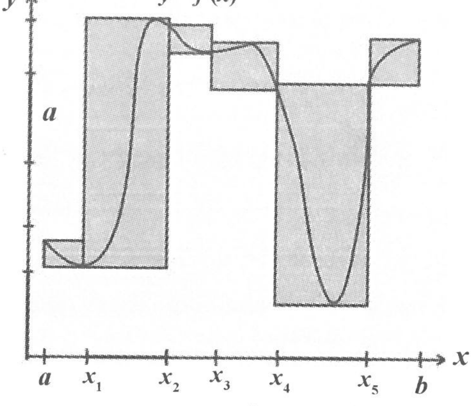
10. હેન્રી લેબેગ(Henry Lebesgue)

"...If one were to refuse to have direct, geometric intivitive insights, if one were refused to pure logic, which does not permit a choice among everything that is exact, one would hardly think of many questions and certain notions... would escape us competely."

– *Henry Lebesgue*

10.1 પ્રસ્તાવના

રીમનને અતિ મહત્ત્વનો સવાલ પૂછ્યો (સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય – વૃત્ત), "કયા સંજોગોમાં સંકલન થઈ શકે અને કયા સંજોગોમાં ન થઈ શકે." રીમન આના જવાબ માટે તૈયાર જ હતા. ધારો કે વિધેય f અંતરાલ $[a, b]$માં સીમિત (bounded) છે. અંતરાલ $[a, b]$ના n પેટા અંતરાલો માટે $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ બિંદુઓ એ રીતે લઈએ કે જેથી $x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < b$ થાય. પરિમાણતા પેટા અંતરાલોની લંબાઈને $d_1 = x_1 - a, d_2 = x_2 - x_1, \dots d_n = b - x_{n-1}$ થી દર્શાવીએ. રીમને પેટા અંતરાલ$[a, x_1]$માં fની વધુમાં વધુ કિંમત અને ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D_1થી દર્શાવ્યો. તે જ પ્રમાણે $[x_1, x_2]$માં fની વધારેમાં વધારે અને ઓછામાં ઓછી કિંમતના તફાવતને D_2થી દર્શાવ્યો. એ જ પ્રમાણે D_n પેટા અંતરાલ $[x_{n-1}, b]$માં fની કિંમતનો તફાવત છે.



આકૃતિ 1

કોઈ પણ ઘન સંખ્યા $\sigma > 0$ લઈએ. આકૃતિ 1માં વિધેય fનો અંતરાલ $[a, b]$માં આલેખ આપેલો છે. અંતરાલ $[a, b]$ના છ પેટા અંતરાલો આપ્યા છે. આ પેટા અંતરાલોમાં f ની વધારેમાં વધારે અને ઓછામાં ઓછી કિંમતોનો તફાવત જોઈએ. પેટા અંતરાલો $[x_1, x_2]$ અને $[x_4, x_5]$માં f ની વધારેમાં વધારે અને ઓછામાં ઓછી કિંમતોનો તફાવત σ કરતા વધારે હોઈને આવા અંતરાલો 'A જાતના' અંતરાલો તરીકે ઓળખાય છે. જ્યારે પેટા અંતરાલો $[a, x_1]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ અને $[x_5, b]$માં તફાવત σ કરતા ઓછો છે. આવા પેટા અંતરાલો 'B જાતના' પેટા અંતરાલો તરીકે ઓળખાય છે.

આપેલી σ ની કિંમત માટે, રીમને પેટા અંતરાલોના સરવાળા માટે

$$S = S(\sigma) = \sum_{\text{A જાત}} d_k = (x_2 - x_1) + (x_5 - x_4) \text{ છે.}$$

કોઈ પણ σ માટે, $\lim\limits_{d \to 0} S(\sigma) = 0$ હોય તો $\int_a^b f(x)\,dx$ મળે.

બીજી રીતે કહીએ તો $\int_a^b f(x)\,dx$ હોવા માટે કોઈ પણ $\sigma > 0$ માટે A પ્રકારના પેટા અંતરાલોને મરજી પ્રમાણે જેટલા નાના જોઈએ તેટલા $d \to 0$ લઈને કરી શકાય.

જેથી $\lim\limits_{d \to 0} S(\sigma) = 0$ થાય.

ઉદાહરણ : આપણે ડિરિચ્લેટ(Dirichlet) વિધેય

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ જો } x \text{ સંમેય હોય} \\ 0 \text{ જો } x \text{ અસંમેય હોય} \end{cases}$$

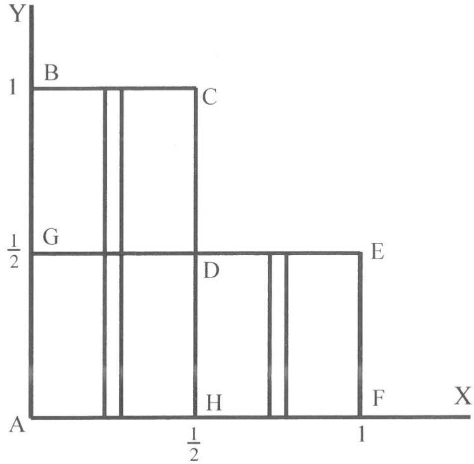
અંતરાલ [0, 1] ઉપર લઈએ. રીમનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ મેળવીએ.

ધારો કે $\sigma = \frac{1}{4}$ છે. અંતરાલ [0, 1] નું વિભાજન n પેટા અંતરાલોમાં કરવા માટે $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < 1$ લઈએ. આનો કોઈ પણ પેટા અંતરાલ $[x_{k-1}, x_k]$ લઈએ. આ પેટા અંતરાલ ગમે તેટલો નાનો હોય તો પણ તેમાં અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ હોઈને, ϕ, 0 અને 1 વચ્ચે ફર્યા કરે છે. ϕની વધારેમાં વધારે 1 અને ઓછામાં ઓછી 0 હોઈને તફાવત $D_k = 1 - 0 = 1 > \frac{1}{4}$ છે. આથી પેટા અંતરાલ $[x_{k-1}, x_k]$ A પ્રકારનો અંતરાલ છે. બધા જ પેટા અંતરાલો A પ્રકારના હોઈને

$S = S(\sigma) = \sum_{A \text{ જાત}} d_k = 1$ છે. રીમનની શરત મુજબ $\lim_{d \to 0} S(\sigma) = 1 \neq 0$ હોઈને $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ નું અસ્તિત્વ નથી. ટૂંકમાં રીમનની રીતે $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ નું અસ્તિત્વ નથી.

10.2 ક્ષેત્રફળો

ડિરિચ્લેટ વિધેય અંતરાલ [0, 1]માં કોઈ જગ્યાએ સતત નથી. આથી પ્રશ્ન ઊભો થાય છે, કેવું અસતત વિધેય હોય જેનું સંકલન થઈ શકે. આનો જવાબ લેબેગે (Lebesgue) 1902માં આપ્યો જે આપણે જોઈએ.



આકૃતિ 2

(a) આપણે ABCDEFનું ક્ષેત્રફળ મેળવવું છે. Gને D સાથે જોડવાથી બે લંબચોરસો AFEG અને GBCD મળે. આથી ABCDEFના ક્ષેત્રફળ = AFEGનું ક્ષેત્રફળ + GBCDનું ક્ષેત્રફળ

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(b) x-અક્ષના અંતરાલ [0, 1]નું વિભાજન n અંતરાલોમાં કરવા માટે $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < 1$ લઈએ પેટા અંતરાલોની લંબાઈને $\Delta x_1 = x_1 - 0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1 \ldots \Delta x_n = 1 - x_{n-1}$ થી દર્શાવીએ. પેટા અંતરાલોને પાયો ગણીને લંબચોરસ દોરીએ જેની ઊંચાઈ H સુધી 1 છે અને Hથી F સુધી $\frac{1}{2}$ છે. આથી,

ABCDEFના ક્ષેત્રફળ

= ABCHનું ક્ષેત્રફળ + DHFEનું ક્ષેત્રફળ

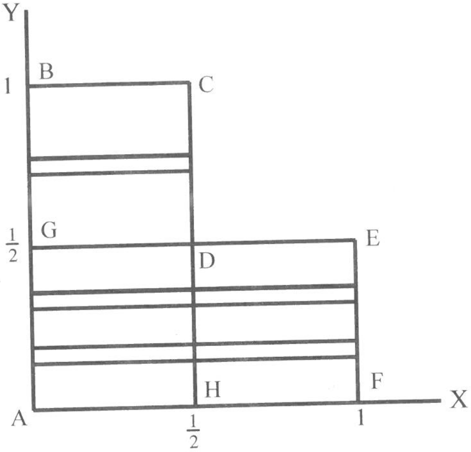
$$= 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + \ldots + 1 \cdot \Delta x_{n/2} + \frac{1}{2} \cdot \Delta x_{n/2+1}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \Delta x_{n/2+2} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \Delta x_n$$

$$= 1 \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_{n/2}) + \frac{1}{2}(\Delta x_{n/2+1} + \Delta x_{n/2+2} ... + \Delta x_n)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(c) લેબેગે x-અક્ષ ઉપરના અંતરાલને બદલે y-અક્ષના અંતરાલનું આકૃતિ-3માં બતાવ્યા પ્રમાણે $2n$ પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરવા માટે $0 < y_1 < y_2 ... < y_n < ... y_{2n-1} < b$ લીધું.. પેટા અંતરાલોની લંબાઈને $\Delta y_1 = y_1 - 0$, $\Delta y_2 = y_2 - y_1, ..., \Delta y_n = y_n - y_{n-1}, ..., \Delta y_{2n} = 1 - y_{2n-1}$થી દર્શાવીએ.



આકૃતિ 3

પેટા અંતરાલોને પાયાઓ ગણીને લંબચોરસ દોરીએ જેની ઊંચાઈ G સુધી 1 છે અને Gથી B સુધી $\frac{1}{2}$ છે. આથી,

ABCDEFના ક્ષેત્રફળ

= AGEFનું ક્ષેત્રફળ + GDCBનું ક્ષેત્રફળ

$$= 1 \cdot \Delta y_1 + 1 \cdot \Delta y_2 + ... + 1 \cdot \Delta y_n + \frac{1}{2}(\Delta y_{n+1}) + \frac{1}{2}\Delta y_{n+2} ... + \frac{1}{2}\Delta y_{2n}$$

$$= 1 \cdot (\Delta y_1 + \Delta y_2 + ... + \Delta y_n) + \frac{1}{2}(\Delta y_{n+1} + \Delta y_{n+2} ... + \Delta y_{2n})$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

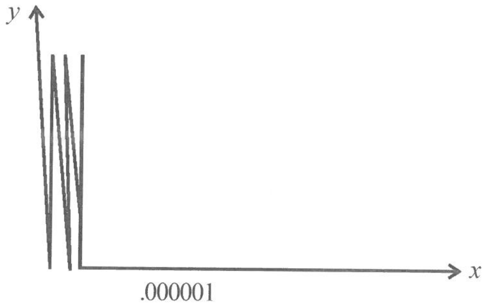
ઉદાહરણ : આપણે ડિરિચ્લેટ વિધેય

$$\phi(x) \equiv \begin{cases} 1 \text{ જો } x \text{ સંમેય હોય} \\ 0 \text{ જો } x \text{ અસંમેય હોય} \end{cases}$$

અંતરાલ [0, 1] ઉપર લઈએ.

10.3 ગણની લંબાઈ

આ અંતરાલ [0, 1]ના ઉપઅંતરાલો લઈએ તો ઉપઅંતરાલ ગમે તેટલો નાનો હોય તોપણ તેમાં અનંત અસંમેય અને સંમેય સંખ્યાઓ આવેલી છે, જાણે કે આની આકૃતિ-4માં દોરવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે. આના ઉપર લંબચોરસ દોરવો ખૂબ જ કઠિન હોઈને x-અક્ષ અને વક્ર વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ મેળવવું ખૂબ જ અઘરું છે.



આકૃતિ 4

ટૂંકમાં રીમનની રીતે $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ નું અસ્તિત્વ નથી. લેબેગની રીતે ગણતાં ϕની બે કિંમતો હોઈને

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx = 1 \times \text{લંબાઈ } \{[0,1]\text{ની સંમેય સંખ્યાઓ}\} + 0 \times \text{લંબાઈ } \{[0,1]\text{ની અસંમેય સંખ્યાઓ}\}$$

આપણે કઈ રીતે [0.1]માંની સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓની લંબાઈ માપીશું ? 1904માં લેબેગે તેમની Ph.D.ની થીસીસ ઉપરથી લખેલા લઘુ પુસ્તક, "Lecons sur L'integration"માં આ આપ્યું છે.

આ ચાર [a, b], (a, b], [a, b), (a, b) અંતરાલમાંના દરેકની લંબાઈ b − a છે. બે અલગ ગણના યોગગણ $A \cup B = (a, b) \cup (c, d)$ની લંબાઈ b − a + d − c થશે. અહીંયાં b < c છે. આપણો ખ્યાલ વિકટ ગણની લંબાઈ શોધવાનો છે.

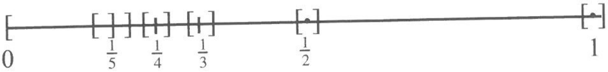
આપણે અનંત ગણ S = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ની લંબાઈ કઈ રીતે માપી શકીએ ? લેબેગ પહેલાં પણ ઘણા ગણિતશાસ્ત્રીઓએ Sની લંબાઈ માપવાનો પ્રયત્ન કરેલો. ઈ. સ. 1880માં એક્સેલ હેર્નેકે(Axel Harnack) 'સીમિત ગણની અંદરની વસ્તુઓને બહારથી કોચલુંવાળીને (outer content of a bounded set)' લંબાઈ માપી.

કોઈ સીમિત ગણ આપેલો છે. આ સીમિત ગણ Eને ઘણા ગણિત અંતરાલોથી પૂરેપૂરો ઢાંકી દઈએ. દરેક અંતરાલની લંબાઈ લઈને તેનો સરવાળો કરીએ. બહારના કોચલાની લંબાઈએ આ બધા જુદાજુદા ઢાંકણાના સરવાળાના લક્ષ્ય બરાબર થાય. આપણા S = $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ને ઢાંકી દેતા જુદાજુદા અંતરાલો લઈએ. જેમ કે,

$$S \subseteq \left(0, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{10}\right)$$

અંતરાલોની લંબાઈના સરવાળા = 0.4 + 0.2 + 0.2 + 0.075 + 0.225 = 1.1

આપણે Sને આકૃતિ 5માં દર્શાવીએ



આકૃતિ 5

Sનું બીજું ઢાંકણ

S ⊆ [0, 0.2001] ∪ [0.2499, 0.2501] ∪ [0.3332, 0.3334] ∪ [0.4999, 0.5001] ∪ [0.999, 1.0001]

અંતરાલોની લંબાઈના સરવાળા = 0.2001 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0002 + 0.0002 = 0.2009

બે જુદાંજુદાં ઢાંકણ લઈને ગણ Sની લંબાઈ માપતાં, જુદીજુદી લંબાઈ મળે છે કારણ કે બીજા ઢાંકણમાં ખાલી જગ્યાને ખાલી રાખતા હોઈને લંબાઈ ઘણી ઓછી છે. છુટક બિંદુની લંબાઈનું માપ મેળવીએ. ધારો કે બિંદુ {a} છે. આ બિંદુના ઢાંકણ માટે અંતરાલ $\left(a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}\right)$ લઈએ અને આ અંતરાલની લંબાઈ $\frac{1}{n}$ છે.

જેમ $n \to \infty$ થશે, તેમ અંતરાલની લંબાઈ $\to 0$ થશે. આથી ગણ {a}ની લંબાઈનું માપ શૂન્ય ગણાય. ગણ Sમાં આવતા આવા અનંત બિંદુઓ જેની લંબાઈ શૂન્ય હોઈને તેમનો સરવાળો શૂન્ય થશે. આથી ગણ Sની લંબાઈ શૂન્ય છે.

આપણે ગણ Sની લંબાઈ શૂન્ય છે તે બીજી રીતે પણ સાબિત કરી શકીએ. ધારો કે $\varepsilon > 0$ કોઈ પણ સંખ્યા આપેલી છે. આપણા અંતરાલ $\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$માં ઘણા ઘણા Sના બિંદુઓ આવશે. Sના બિંદુઓ $\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1$ અંતરાલ $\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$માં નથી. આ દરેક N બિંદુને આપણે $\frac{\varepsilon}{4N}$ લંબાઈના અંતરાલમાં મૂકી શકીએ. આપણે $\frac{1}{n}$ને અંતરાલ $\left(\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{8N}, \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{8N}\right)$માં મુકી શકીએ. આ અંતરાલની લંબાઈ $\frac{\varepsilon}{4N}$ છે. આથી Sને ઢાંકવા માટે $\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{\varepsilon}{8N}, \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{8N}\right), \left(\frac{1}{N-1} - \frac{\varepsilon}{8N}, \frac{1}{N-1} + \frac{\varepsilon}{8N}\right), \ldots$$

$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8N}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{8N}\right)$ અને $\left(1 - \frac{\varepsilon}{8N}, 1 + \frac{\varepsilon}{8N}\right)$ અંતરાલો છે જેની લંબાઈ

$= \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$. આથી કોઈ પણ $\varepsilon > 0$ માટે

ગણ S અંતરાલો જેમની લંબાઈ ε કરતાં ઓછી છે તેમાં આવેલો છે. આથી આપણે કહી શકીએ કે $C_e(S) = 0$ જ્યાં $C_e(S)$ બહારના કોચલાની લંબાઈ છે.

લંબાઈનું માપ શૂન્ય હોય તેવા ગણતરી લાયક ગણોના જોડાણના ગણના લંબાઈનું માપ પણ શૂન્ય છે. આ પ્રમેયનો ઉપયોગ ઘણી જ જગ્યાએ થાય છે.

પ્રમેય 1 : $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ ગણતરી કરી શકાય તેટલા ગણો છે. જેના $m(E_1) = m(E_2) \ldots = m(E_n) = 0$ છે. જો $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \ldots$ હોય તો $m(E) = 0$ છે.

સંમેય સંખ્યાઓનો અંતરાલ [0, 1]નો ગણ Q_1 ગણતરી કરી શકાય તેવો ગણ છે અને તે ગણ સંમેય સંખ્યાઓના જોડાણથી બને છે. સંમેય સંખ્યાઓ છુટક બિંદુઓ હોઈને તેની લંબાઈ શૂન્ય છે. આથી પ્રમેય 1 મુજબ $m(Q_1) = 0$ છે જ્યારે બહારનું કવર અંતરાલ [0, 1] હોઈને $C_e(Q_1) = 1$ છે.

અંતરાલ [0, 1]માં આવેલી અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ છે.

ટૂંકમાં $[0, 1] = Q_1 \cup I_1$ છે.

$\therefore \quad m[0, 1] = m(Q_1 \cup I_1) = m(Q_1) + m(I_1) = 0 + m(I_1) = 1$

$\therefore \quad m(I_1) = 1$

અંતરાલ [0, 1]માં અસંમેય સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ કરતા ઘણી વધારે હોઈને આ પરિણામ ધારેલું જ ગણાય. હવે આપણે શરૂઆતના પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકીએ.

પ્રમેય 2 (લેબેગ પ્રમેય) : કોઈ પણ અંતરાલ [a, b] ઉપર સીમિત વિધેય f ને રીમનની રીતે સંકલિત થવા માટે અંતરાલ [a, b]માંના અસતત બિંદુઓના ગણોની લંબાઈ શૂન્ય હોવી જરૂરી અને પુરતી છે.

લેબેગે તેમની થીસીસમાં ફક્ત માપી શકાય તેવા ગણની જ વાત નથી કરી; તેમણે માપી શકાય (measurable) તેવા વિધેયની પણ વાત કરી છે. જો કોઈ પણ $\alpha < \beta$ માટે ગણ $\{x \mid \alpha < f(x) < \beta\}$ માપી શકાય તેવો ગણ હોય, તો f પણ માપી શકાય તેવું વિધેય છે. માપી શકાય તેવા ગણોના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને લેબેગે સાબિત કર્યું કે જો કોઈ પણ α માટે ગણ $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ માપી શકાય તેમ હોય તો f માપી શકાય તેવું વિધેય છે.

ઉદાહરણ : આપણે ડિરિચ્લેટ વિધેય [0, 1]

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ જો } x \text{ સંમેય હોય} \\ 0 \text{ જો } x \text{ અસંમેય હોય} \end{cases}$$

$\{x \mid \phi(x) > \alpha\}$ જોઈએ $\alpha = 1$ હોય તો ગણ $\{x \mid \phi(x) = 1\}$, [0, 1]માંની સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ Q છે. $m(Q) = 0$; આથી Q માપી શકાય તેવો ગણ હોઈને ϕ માપી શકે તેવું વિધેય છે. $\{x \mid 0 < \phi(x) < 1\}$ આ ગણ emtpy ગણ હોઈને ϕ માપી શકાય $\phi(x)$ હોઈને $m(\phi) = 0$ આથી ϕ ગણ માપી શકાય તેવો ગણ હોઈને ϕ માપી શકાય તેવું વિધેય છે.

$\{x \mid \phi(x) = 0\}$ આ ગણ [0, 1] ઉપરનો ગણ છે અને આ ગણ અસંમેય સંખ્યાઓનો છે. $m(I) = 1$ હોઈને આ ગણ પણ માપી શકાય તેવો ગણ છે. આથી ડિરિચ્લેટ વિધેય માપી શકાય તેવું વિધેય છે.

10.4 લેબેગ સંકલ (The Lebesgue Integral)

સીમિત વિધેય fના રીમન સંકલન માટે ક્ષેત્રના અંતરાલ $[a, b]$ ના નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરો. આ નાના પેટા અંતરાલો ઉપર લંબચોરસ દોરો. આ

લંબચોરસોની ઊંચાઈ વિધેયની કિંમત ઉપર આધારિત છે અને છેવટે નાના પેટા અંતરાલોને નાના બનાવો એટલે કે નાના પેટા અંતરાલોની લંબાઈ શૂન્ય તરફ જશે, તેમ-તેમ નાના પેટા, અંતરાલો ઉપર દોરેલા બધા લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો ચોક્કસ કિંમતે પહોંચશે. આ ચોક્કસ કિંમત એ રીમન સંકલનની કિંમત છે.

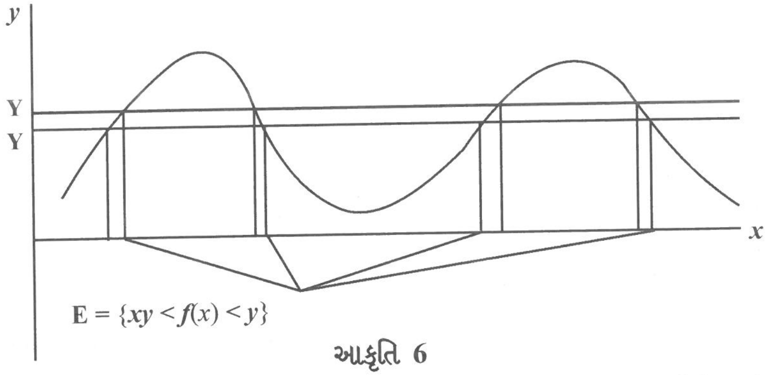
સીમિત વિધેય $f > 0$ના રીમન સંકલન માટે આપણે ક્ષેત્ર(domain) [a, b]નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ છીએ. આપણે x-અક્ષ ઉપર $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots < x_i < x_{i+1\ldots} < x_n = b$ લઈએ જેથી નાના પેટા અંતરાલો $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2],\ldots [x_{i-1}, x_i]\ldots [x_n, x_{n-1}]$ મળે. આપણે i th અંતરાલ $[x_i, x_{i+1}]$ ને Δx_i વળે દર્શાવીએ. આ અંતરાલમાં x_i^* ગમે તે બિંદુ લઈએ. આ નાના પેટાઅંતરાલ Δx_i ઉપર લંબચોરસ દોરીએ જેની ઊંચાઈ $f(x_i^*)$ છે અને તેનું ક્ષેત્રફળ $f(x_i^*)\,\Delta x_i$ છે. બધા પેટાઅંતરાલો ઉપર લંબચોરસ દોરીને તેનો સરવાળો $\sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$ મળે અને આખરે નાના પેટાઅંતરાલ Δx_iને શૂન્ય જેટલા સંકોચાવતા જે કિંમત મળે તેને $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ થી દર્શાવીએ. આપણને $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ મળે.

લેબેગે આથી ઊલટો, સરળ અને હિંમતવાળો રસ્તો બતાવ્યો. વિધેયના ક્ષેત્ર(Domain)ને બદલે વિસ્તાર(Range)નું વિભાજન કરવા સુચવ્યું. ધારો કે $0 \le f(x) \le M$ જ્યાં 0 વિધેયની ઓછામાં ઓછી અને M વધારેમાં વધારે કિંમત છે અને xની કિંમત અંતરાલ [a, b] ઉપર છે. y-અક્ષ ઉપરના અંતરાલ [0, M]નું નાના પેટા અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ. આપણે y-અક્ષ ઉપર $0 = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_i < y_{i+1} <\ldots < y_n = M$ બિંદુઓ લઈએ જેથી આપણને નાના અંતરાલો $[y_0, y_1]$, $[y_1, y_2],\ldots [y_i, y_{i+1}]\ldots [y_{n-1}, y_n]$ મળે. આપણે i th અંતરાલ $[y_i, y_{i+1}]$ ને Δy_iથી દર્શાવીએ. આકૃતિ 6માં બતાવ્યા પ્રમાણે આપણે $y = y_i$ અને $y = y_{i+1}$ સમાંતર રેખાઓ દોરીએ જે વક્ર $y = f(x)$નો જુદી-જુદી ચાર જગ્યાએ છેદે છે. આના ઉપરથી આપણને x-અક્ષ ઉપરના અંતરાલ [a, b]ના ચાર નાના ગણો મળશે અને તે ચારના યોગને (Union) E_i વડે દર્શાવીએ. $[y_i, y_{i+1}]$ અંતરાલમાં કોઈ પણ y_i^* લઈને લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ મેળવીએ. ચાર નાના પેટાગણો અંતરાલ ન પણ હોય. આથી E_i ગણની લંબાઈ $m(E_i)$ આપે, અને લંબચોરસોનું ક્ષેત્રફળ $y_i^*\, m(E_i)$ મળે. આ જ પ્રમાણે [0, M]ના બધા નાના પેટા અંતરાલો

લઈને બધા જ લંબચોરસોના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા બરાબર $\sum_{i=0}^{n} y_i^* m(E_i)$ મળે.

y-અક્ષ ઉપરના અંતરાલોને ખૂબ જ નાના બનાવીએ એટલે કે $\lim_{\Delta y_i \to 0}$ લઈએ ત્યારે $\sum_{i=0}^{n} y_i^* m(E_i)$ અનોખી કિંમત હોય તો તે કિંમતને $\int_a^b f(x)\,dx$ થી દર્શાવીએ. આને લેબેગ સંકલ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રમેય 3 : જો f સીમિત (bounded) હોય અને અંતરાલ $[a, b]$ ઉપર રીમન સંકલની કિંમત મળે, તો f ની અંતરાલ $[a, b]$ ઉપર લેબેગ સંકલની પણ કિંમત પણ મેળવી શકાય જે રીમાન સંકલના જેટલી જ હોય.



આકૃતિ 6

પ્રમેય 4 : જો f સીમિત અને માપી શકાય તેવું વિધેય હોય, તો f નું લેબેગ સંકલ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે માપી શકાય તેવા વિધેયો રીમન સંકલ મેળવી શકાય તેવા વિધેયોની ચોતરફ ફેલાયેલા છે. બીજી રીતે કહીએ તો લેબેગની રીતથી રીમનની રીત કરતા વધારે વિધેયોનું સંકલન મેળવી શકાય. ટૂંકમાં જે જૂની રીતથી સંકલનો મળ્યા ન હતા, તે લેબેગની રીતથી મળે છે. જેમ કે ડિરિચ્લેટ વિધય $\phi(x)$ સીમિત છે અને માપી શકાય તેવું હોઈને $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ નું અસ્તિત્વ પ્રમેય (4)થી છે. અને તેની કિંમત મેળવવા માટે ϕના વિસ્તારનું વિભાજન કરીએ. ϕનો વિસ્તાર અંતરાલ $[0,1]$ છે અને તેની કિંમતોના ત્રણ ભાગ છે : $\phi(x) = 0$, $0 < \phi(x) < 1$ અને $\phi(x) = 1$.

$E_0 = \{x \mid \phi(x) = 0\} = I_1$, E_0 એ [0, 1]ની અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ છે અને આપણે જોયું કે $m(E_0) = m(I_1) = 1$ છે.

$E_K = \{x \mid 0 < \phi(x) < 1\} = \phi$ (Null set); $\quad m(\phi) = 0$

$E_N = \{x \mid \phi(x) = 1\} = Q_1;\ m(E_N) = m(Q_1) = 0$

$$\text{આથી,}\ \int_0^1 \phi(x)\,dx = y_0\, m(E_0) + y_K\, m(E_K) + y_N\, m(E_N)$$

$$= 0{\cdot}1 + y_K \cdot 0 + 1{\cdot}0 = 0$$

ડિરિચ્લેટ વિધેય બધા જ બિંદુએ અસતત છે અને તેનું રીમન સંકલન થતું નથી, જ્યારે તે વિધેયનું લેબેગ સંકલન થાય છે. આનું નામ પ્રગતિ !!

10.5 હેન્રી લેબેગ (Henry Lebesgue)

વીસમી સદીના આગળ પડતા ગણિતશાસ્ત્રી હેન્રી લેબેગનો જન્મ જૂન 28, 1875માં મધ્યમવર્ગના કુટુંબમાં પેરિસની નજીક થયેલો. તેમના પિતાજી પ્રીન્ટિંગ પ્રેસમાં કામ કરતા હતા જ્યારે તેમનાં માતા પ્રાથમિક શાળામાં શિક્ષિકા હતાં. બંને જણ બુદ્ધિશાળી હોઈને, ઘરમાં સારાં પુસ્તકોની લાઇબ્રેરી પણ હતી. શાળામાં હેન્રીની બુદ્ધિ પ્રતિભા તેમના શિક્ષકોને દેખાતી. તેમના પિતાજીનું તેઓ જ્યારે નાના હતા ત્યારે ક્ષયથી નિધન થયેલું. પ્રાથમિક શાળામાં ગણિતમાં ખૂબ જ હોંશિયાર હોઈને તેમની પ્રાથમિક શાળાના શિક્ષકે હેન્રીની ભણાવવાની જવાબદારી સ્વીકારી લઈને ગમે ત્યાંથી માગી લાવીને આર્થિક સહાય કરી. 1894માં ઇકોલ નૉર્મલ સુપીરિયુરે(Ecole Normale Superieure)માં દાખલ થયા અને 1897માં સ્નાતક થયા. સ્નાતક થયા પછી ઇકોલ નૉર્મલ સુપીરિયુરેની લાઇબ્રેરીમાં બે વર્ષ કામ કર્યું અને ત્યાં જ તેમને રેને-લુઇસ બૅર(Bair)ના અસતતતા ઉપરના કામની ખબર પડી અને તેનો અભ્યાસ પણ કર્યો. સોર્બોની(Sorbonne)માં તેમણે ગ્રેજ્યુએટ અભ્યાસ શરૂ કર્યો. બોરેલ અને જૉર્ડનની માપન પદ્ધતિઓનો બરાબર અભ્યાસ કર્યો. ઈ.સ. 1899માં નાન્સીમાં લીસી (Lycee) સેન્ટ્રલમાં ભણાવવાનું શરૂ કર્યું અને સાથે સાથે Ph.D.ની થીસીસ ઉપર પણ કામ ચાલુ કર્યું. 1902માં તેમને Ph.D.ની ડીગ્રી સોર્બોનીમાંથી મળી. તેમના થીસીસના માર્ગદર્શક બોરેલ હેન્રીથી ફક્ત ચાર વર્ષ મોટા હતા. તેમની થીસીસનું મથાળુ, "સંકલન, લંબાઈ અને ક્ષેત્રફળ" હતું. આ થીસીસ ગણિતશાસ્ત્રીઓની લખેલી ઘણી થીસીસોમાંની સરસ થીસીસ ગણાય છે. હેન્રીનાં લગ્ન તેમની વિદ્યાર્થીની સાથે થયાં અને તેમને બે પુત્રીઓ નામે સુઝાન(Suzanne) અને જેકી (Jacques) હતી.

તેમની થીસીસ પ્રસિદ્ધ થતાં જ 1902માં યુનિવર્સિટી ઑફ રીન્નીસે (University of Rennes) હેન્રીને નોકરી આપી અને હેન્રીએ 1906 સુધી ત્યાં ભણાવ્યું. ત્યાંથી યુનિવર્સિટી ઑફ પૉઇટિઅર્સ (University of Poitiers)ની ફેકલ્ટી ઑફ સાયન્સિસમાં જોડાયા. અહીંયાં તેમનાં બે લઘુ પુસ્તકો (Monographs) Lecons sur l'integration (1904) અને Lecons sue les series trigonometrique (1906) પ્રસિદ્ધ થયાં જેના કારણે તેમના કામનો સ્વીકાર થવા માંડ્યો. ફરીથી સોર્બોનીમાં maitra de conferancas (lecturer master) તરીકે ગયા અને 1919માં પ્રોફેસર બન્યા. 1921માં સોર્બોની છોડીને પ્રોફેસર તરીકે કૉલેજ ડી ફ્રાન્સમાં (College de France) ગયા. જ્યાં સુધી જીવ્યા ત્યાં સુધી કૉલેજ ડી ફ્રાન્સમાં ભણાવ્યું અને સંશોધન કર્યું. 1922માં પૅરિસ અકેડેમી ડેસ સાયન્સિસના (Paris Academie des sciences) સભ્ય તરીકે ચૂંટાયા. 1930માં રૉયલ સોસાયટી લંડનના (Royal society of London) પરદેશી પ્રતિનિધિ તરીકે ચુંટાયા. 26 જૂલાઈ 1941માં પૅરિસમાં તેમનું નિધન થયું.

લેબેગ જ્યારે પૅરિસ અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસના સભ્ય બન્યા ત્યારે Theory of integration, The structure of sets and functions, calculus of varifications, theory of surface areas અને Dimension Theory ઉપર લગભગ નેવું લેખો અને પુસ્તકો લખેલાં. આ કામના કારણે તેમને ઘણા માનચાંદ મળેલા, જેવા કે Prix Poncelet (1914), Prix Saintour (1917) અને Pair Petit aormoy (1919). તેમને ગણિત કઈ રીતે શીખવવું તે વિષે પણ લખ્યું છે. શિક્ષકે વિદ્યાર્થીઓની સામે જ વિચારવાનું જણાવ્યું છે. ગણિતના સંશોધન માટે તેમના પુસ્તક 'Lessons on Integration'માં લખ્યું છે, "આપણે ઉપયોગી થાય તેવું કામ કરવા માટે આપણે આપણી પહેલાંના કામ કરનારાઓએ ખુલ્લા કરેલા રસ્તે કૂચ કરવી જરૂરી છે; આ પ્રમાણે ન કરતાં આપણે એવું વિજ્ઞાન ઊભું કરી છીએ કે જેને બાકીના ગણિત જોડે કોઈ સંબંધ ન હોય."

લેબેગનો મોટામાં મોટો ફાળો લેબેગ સંકલ છે. ઓગણીસમી સદીના અંતમાં mathematical analysis માં ફક્ત સતત વિધેયોનો અભ્યાસ થતો કારણ કે રીમન સંકલ તે સમયે ફક્ત સતત વિધેયો, વિધેયો જે સીમિત બિંદુઓએ અસતત હોય તેમના માટે મેળવી શકાતું. ડિરિક્લેટ વિધેયનું રીમન સંકલ મળી શકતું નથી. લેબેગ જ્યારે અનુસ્નાતક વિદ્યાર્થી હતા ત્યારે તેમણે રેને બેર(Rene Baira)નાં અસતત વિધેયો, રીમન સંકલનો અને બોર્રેલની measurabilityનો બરાબર અભ્યાસ કરેલો. લેબેગની માપનશાસ્ત્ર વિલક્ષણ થીયરી હોઈને સ્વીકારાતાં વાર થઈ. લેબેગ સંકલ mathematical analysisનો હવે તો

પાયાનો ભાગ છે અને હવે તો ભવિષ્યમાં આ ચાલુ રહેશે. લેબેગ સંકલ 1854ના રીમન સંકલનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે.

આ પ્રકરણ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યું છે.

(1) Calinger, R., Classics of Mathematics, Prentice Hall, Englwood Cliffs, New Jersey 07632, 1995.

(2) Dunham, W., The Calculus Gallery, Princeton Univesity Press, Princeton and Oxford, 2005.

(3) Wilcox, H., J., Myers D., L., An introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series, Dover Publications, Ing, New York, 1994.

◆

પરિશિષ્ટ 1

કલનગણિત (Calculus) છે શું ?

પ્રસ્તાવના

અમેરિકાના પ્રખ્યાત નવલકથાકાર હર્મન વૉક (Herman Wouk)ને બીજા વિશ્વયુદ્ધને લગતી નવલકથાઓ લખવી હતી. બીજા વિશ્વયુદ્ધમાં ઍટમ બૉમનો ઉપયોગ થયેલો. આ ઍટમ બૉમ બનાવવા માટે અમેરિકામાં મેનહટ્ટન પ્રૉજેક્ટ (Menhattan Project) હતો. આ પ્રૉજેક્ટ ઉપર કામ કરવા માટે અમેરિકાએ સારી યુનિવર્સિટીઓના ભૌતિકશાસ્ત્રીઓને એકઠા કરેલા અને તેમણે ઍટમ બૉમ બનાવેલો. આથી આ નવલકથાકારને મૅનહટ્ટન પ્રૉજેક્ટના વિષે ઘણું બધું જાણવું હતું. આ નવલકથાકાર હર્મન વૉકનો જન્મ મે 27, 1915માં ન્યૂયૉર્કમાં થયેલો અને તેમનું નિધન હમણાં જ એટલે કે મે 27, 2019માં પામ સ્પ્રિન્ગ (Palm Springs) કૅલિફૉર્નિયામાં થયેલું. હર્મન વૉકે આ પ્રૉજેક્ટમાં કામ કરનારા અમેરિકાના ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ અધ્યાપક રૉબર્ટ ફેઇનમેન (Robert Feynman)નો ઇન્ટરવ્યૂ લીધો. બધું કામ પૂરું થયું, અને હર્મન વૉક રૉબર્ટ ફેઇનમેનની ઑફિસમાંથી બહાર નીકળવા જતા હતા ત્યારે ફેઇનમેને પૂછ્યું, ‘‘તમે કલનગણિત (Calculus) જાણો છો ?’’ વૉકે જણાવ્યું કે તેમને કલનગણિત શું છે તેનો જરાયે ખ્યાલ નથી. ફેઇનમેને કહ્યું, ‘‘તમે કલનગણિત શીખો કારણ કે ભગવાન તે ભાષામાં વાતો કરે છે.’’ વૉકે વિશ્વયુદ્ધને લગતી બે નવલકથાઓ ‘The Winds of War’ અને ‘War and Remembrance’ લખ્યા પછી કલનગણિત જાતે શીખવાનો ખૂબ જ પ્રયત્ન કર્યો. તેમણે Calculus Made Easy અને બીજાં ઘણાં પુસ્તકોમાંથી કલનગણિત શીખવાનો પ્રયત્ન કર્યો, પણ સફળતા ન મળી. આથી તેમને પોતાને શીખવવા માટે ઇઝરાઇલના ગણિતના ખાનગી શિક્ષક (ટ્યુટર) રાખ્યા પણ કલનગણિતમાં ચાંચ ન ડૂબી. આથી આખરે હાઇસ્કૂલના કલનગણિતના ક્લાસમાં જવાનું શરૂ કર્યું, પણ તેમાં તે ખૂબ જ પાછળ પડી ગયા અને આખરે ક્લાસમાં જવાનું છોડી દીધું અને વિદ્યાર્થીઓએ તેમને તાલીઓથી વધાવી લીધા. તેમણે ‘The Language God Talks : On Science and Religion’માં આનો ઉલ્લેખ પણ કર્યો છે.

કલનગણિત છે શું ? શા માટે ફેઇનમેને નવલકથાકાર હર્મન વૉક જેવાને કલનગણિતનો અભ્યાસ કરવા જણાવ્યું તે જોઈએ.

કલનગણિત (Calculus)

કલનગણિતને અંગ્રેજીમાં 'કેલ્કુલસ (Calculus)' કહેવામાં આવે છે. અંગ્રેજી શબ્દ કેલ્કુલસ્નું મૂળ લેટિન ભાષાનો શબ્દ 'Calx' છે. લેટિન ભાષામાં 'Calx' શબ્દનો અર્થ નાનો પથ્થર. જૂના જમાનામાં લોકો ગણવા માટે નાના પથ્થર વાપરતા. દાંતના દાક્તરો દાંત ઉપર રહેલા ક્ષારો માટે પણ 'કેલ્ક્યુલસ (Calculus)' શબ્દ વાપરે છે, તે જ પ્રમાણે દાક્તરો ગૉલ સ્ટોન્સ (Gall Stones), કિડની સ્ટોન્સ (Kidney Stones) અને બ્લૅડર સ્ટોન્સ (Bladder Stones) માટે પણ કેલ્ક્યુલસ શબ્દ વાપરે છે.

'કેલ્ક્યુલસ' શબ્દ મૂળભૂત રીતે લેટિન ભાષામાંથી અવતરેલ છે. જેનો અર્થ થાય છે, ''નાના પથ્થર''. રોમન લોકો દ્વારા ગણતરી કરવા માટે નાના પથ્થરનો ઉપયોગ કરતા હતા. જેના અનુસંધાને આ નામ ઉદ્ભવ્યું હોય.

અંકગણિત અને ભૂમિતિ એ ગણિતશાસ્ત્રની પ્રાચીન અને મૂળભૂત શાખાઓ હતી. તે સમયે ગણિતજ્ઞો પોતાની પ્રાથમિક જરૂરિયાતો કે પ્રશ્નો ઉકેલવા તેનો ઉપયોગ કરતા હતા. ઈ.સ. 850માં પેરેસીયન ગણિતજ્ઞ અલ-ખ્વારીઝમી દ્વારા સૌપ્રથમ વખત બીજગણિતનો ઉપયોગ થયો. ઘણા વર્ષો સુધી બીજગણિત અને ભૂમિતિ સ્વતંત્ર રીતે અસ્તિત્વ ધરાવતા. પરંતુ, બંને વચ્ચે કોઈ જોડાણ ન હતું. ઈ.સ. 1500ની શરૂઆતમાં ફ્રેન્ચ તત્ત્વજ્ઞાની અને ગણિતજ્ઞ રેને દકાર્ત દ્વારા ભૂમિતિની નવી શરૂઆત થઈ. જેની મદદથી આ બંને શાખાઓ વચ્ચેનું જોડાણ શક્ય બન્યું. જે કલનગણિતનું ભૌમિતિક સ્વરૂપ સમજવામાં એક મહત્ત્વનું પાસું બન્યું.

શરૂઆતમાં 'કલનગણિત' એ 'સુક્ષ્માભિચલ કલનગણિત' (Infinitesimal calculus) તરીકે જ ઓળખાતું હતું. નવા શીખનારાઓ માટે આ વિષય શીખવો અને પચાવવો ખૂબ જ અઘરો હતો. શૂન્યાભિચલનો ખ્યાલ સ્પષ્ટ થવો ખૂબ જ અગત્યનો છે. તેને સમજવા માટે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

''કોઈ એક નાના છોડનો વિકાસનો અભ્યાસ કરીએ.'' સામાન્ય સંદર્ભમાં આપણે કહી શકીએ કે છોડમાંથી વૃક્ષ બનવાની પ્રક્રિયા ધીમી અને સતત હોય છે. જો છોડના વિકાસને શરૂઆતથી લઈને મહિનાઓ પછી જોવામાં આવે તો સ્પષ્ટ પણે તેમાં પરિવર્તન જોઈ શકાય છે. પરંતુ જો થોડા દિવસો પછી જોવામાં આવે તો બહુ ઓછું પરિવર્તન જોવા મળે છે. અને જો થોડા કલાકો પછી જોવામાં આવે તો નરી આંખે દેખાય તેવું નહિવત્ પરિવર્તન જોઈ શકાય. પણ જો થોડી ક્ષણો પછી જોવામાં આવે તો કોઈપણ પરિવર્તન નોંધી શકાય નહીં.

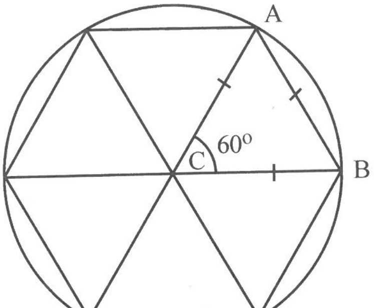
આપણે જાણીએ છીએ કે છોડનો વિકાસ થયો છે. પરંતુ, તે સમયની સાપેક્ષમાં ખૂબ જ ધીમો પરંતુ સતત હોય છે. ન્યૂટને તેને વહેતી માત્રાઓ (Fluxious) દ્વારા જ્યારે લાઇબ્નિઝે તેને સુક્ષ્માભિચલ (Infinitesimal) તરીકે ઓળખ આપી હતી.

વર્ષો સુધી ઇંગ્લેન્ડ અને જર્મની વચ્ચે વિવાદ હતો કે 'કલનગણિત'ની શોધ કોણે કરી, ન્યૂટન કે પછી લાઇબ્નિઝે ? પરંતુ બંનેની પાયાગત ધારણાઓ અલગ હોય તેથી ઇતિહાસકારોએ માન્યું કે બંને ગણિતજ્ઞોએ તેની સ્વતંત્ર રીતે શોધ કરલી હોય.

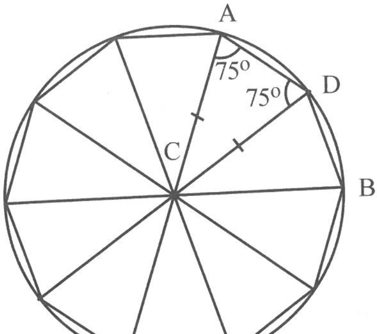
જે પણ કહો! પરંતુ, આ શાસ્ત્રની જટિલતા તેમાં છુપાયેલા રહસ્યોથી જ છે.

કલનગણિતનું મુખ્ય કામ જટિલ પ્રશ્નોને સરળ બનાવવાનું છે. કલનગણિત આ કામ કઈ રીતે કરે છે ? જટિલ પ્રશ્નને નાના પ્રશ્નોમાં વહેંચી નાખવા. જેમકે, આપણે વર્તુળનો પરિઘ મેળવવો છે. જટિલ પ્રશ્ન છે, પણ આપણે પરિઘને નાના ટૂકડાઓમાં વહેંચી શકીએ. આ ટૂકડાઓ ખૂબ જ નાના હોઈને, આપણે તે ટૂકડાઓને સુરેખા કહી શકીએ. આ સુરેખાની લંબાઈ આપણે મેળવી શકીએ. ટૂંકમાં આપણે આ બધા ટૂકડાઓની લંબાઈનો સરવાળો કરીને પરિઘની લંબાઈ મેળવી શકીએ. આ ભાગ અઘરો છે, પણ મૂળ પ્રશ્નના જેટલો અઘરો નથી.

વર્તુળના પરિઘની લંબાઈ



આકૃતિ 1



આકૃતિ 2

આકૃતિ 1માં વર્તુળ જેનું કેન્દ્ર c અને ત્રિજ્યા r છે તે આપેલું છે. આપણે આ વર્તુળનો પરિઘ મેળવવાનો છે. પ્રશ્ન જટિલ છે. આપણે પરિઘના નાના ટૂકડાઓ કરીએ. આ ટૂકડાઓ ખૂબ જ નાના હોઈને, તેમને સુરેખા ગણી શકીએ. ખૂબ જ નાના ટૂકડાઓનો સરવાળો કરવાનું અઘરું છે, પણ મૂળ પ્રશ્ન જેટલું અઘરું નથી.

આપણે શરૂઆતમાં વર્તુળના પરિઘના છ સરખા ભાગ કરીને આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે ષટ્કોણ (Hexagon) દોરીએ. આ શરૂઆત જ છે. રીતનો ખ્યાલ આવે તે માટે જાણીતા પરિણામોથી શરૂઆત કરીએ છીએ. આ ષટ્કોણની છ બાજુઓનો સરવાળો પરિઘ કરતાં ઘણો ઓછો છે. ષટ્કોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધીએ. વર્તુળ ઉપરનાં છ એ છ બિંદુઓને કેન્દ્ર સાથે જોડતાં છ સરખાં ત્રિકોણો મળશે. આથી ગમે તે એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓ શોધીએ. ΔABC માં $CA = CB = r$ છે. 360^o ને છ સરખા ભાગમાં વહેંચતા હોઈને $\Delta ACB = 60^o$ છે. આથી ΔABC માં $\angle ACB = \angle ABC = \angle CAB = 60^o$ છે. આથી ΔABC સમભૂજ છે. આથી $AB = BC = CA = r$ છે. આથી ષટ્કોણની છએ બાજુઓનો સરવાળો $6r$ છે. આથી ત્રિકોણનો પરિઘ, જો આપણે $2\pi r$ લઈએ તો, $2\pi r > 6r$ છે.

આથી, $\pi > 3$ છે.

આ રીતે π ની કિંમત પણ મેળવી શકાય.

જાણે કે ચાપ AB અને સુરેખ ABની લંબાઈમાં ઘણો ફરક છે. આ ફેર નાનો કરવા માટે દરેક ચાપનાં મધ્યબિંદુઓ લઈએ. આગળનાં છ બિંદુઓમાં છ મધ્યબિંદુઓ ઉમેરતાં આપણને આકૃતિ 1(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે 12 બિંદુઓ મળશે. આ બિંદુઓને કેન્દ્ર સાથે જોડતાં 12 ત્રિકોણો મળશે. આપણને ΔABC ના બદલે આકૃતિ 1(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે બે ત્રિકોણો ΔACD અને ΔDCB મળશે. એ જ પ્રમાણે બાકીના દશ ત્રિકોણો મળશે. આ 12 ત્રિકોણો સરખા હોઈને આપણે ΔBCD ની બાજુ BD મેળવીએ. ΔBCD માં $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^o$ છે. આથી $\angle CDB = \angle DBC = 75^o$ થાય.

સાઇનના નિયમ પ્રમાણે $\frac{CB}{\sin 75^o} = \frac{CD}{\sin 75^o} = \frac{BD}{\sin 30^o}$ છે.

આથી, $BD = CD \frac{\sin 30^o}{\sin 75^o} = 0.517638\, r$ છે.

આથી, 12 બાજુવાળો બહુકોણની પરિમિતિ $= 12 \times 0.517638 = 6.211662\, r$

$\therefore \quad 2\pi r > 6.211662\, r$

$\therefore \quad \pi > 3.1058$ છે.

આ જ રીતે વર્તુળ ઉપરનાં બિંદુઓ બમણાં કરતા જઈએ એટલે કે 24, 48, 96 લઈને π ની કિંમત ચોક્કસ કરતા જઈએ અથવા તો વર્તુળનો પરિઘ મેળવતા જઈએ.

પરવલય $y = x^2$ એ x-અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ

આપણે $y = x^2$ અને x-અક્ષ $x = 0$ થી $x = 1$ વચ્ચેનું આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણેનું ક્ષેત્રફળ. આ ક્ષેત્રફળ કઈ રીતે મળે ? ત્રિકોણ, ચોરસ અને ચોરસ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળો કઈ રીતે મેળવવાં તે જાણીએ છીએ. આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ક્ષેત્રફળને નાના લંબચોરસોમાં વહેંચો. આ લંબચોરસો ઘણી રીતે પસંદ કરી શકાય, પણ આકૃતિ 2(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણેના અંતરાલના જમણી બાજુના છેડાની કિંમત લઈને લંબચોરસ દોરીએ.

$\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4},1\right]$ અંતરાલો છે. જમણી બાજુના છેડાની કિંમત

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ અને 1 છે. આથી આકૃતિ 2(a)માં બતાવેલા લંબચોરસોની ઊંચાઈઓ

$\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ અને $(1)^2$ હોઈને લંબચોરસના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા

$$= \frac{1}{4^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + (1)^2\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{4}{16} + \frac{9}{64} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1+4+9+16}{64} = \frac{30}{64}$$

આ બધા લંબચોરસોની અંદર વક્ર $y = x^2$ હોઈને વક્રની નીચેનું ક્ષેત્રફળ $A < \frac{30}{64} = 0.46875$ છે.

અંતરાલોના ડાબી બાજુના છેડાની કિંમતો $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ લઈને આકૃતિ 2(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસો દોરીએ. આ દરેક લંબચોરસની પહોળાઈ $\frac{1}{4}$ છે અને ઊંચાઈઓ અનુક્રમે $(0)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ અને $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ હોઈને તેમના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા

$$= 0^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{0+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right\}$$

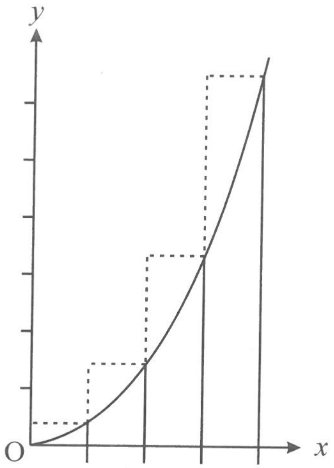
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{14}{16} = \frac{14}{64} \text{ છે.}$$

વક્ર આ બધા લંબચોરસની ઉપર હોઈને વક્રની નીચેનું ક્ષેત્રફળ $A > \frac{14}{64} = 0.21875$

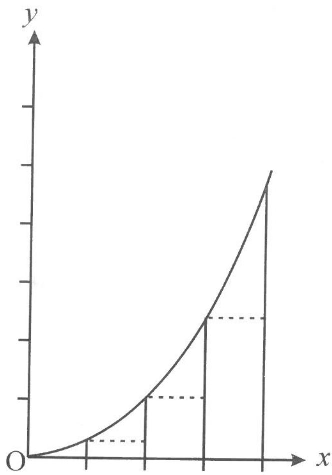
આથી $0.21875 < A < 0.46875$ છે.

અંતરાલ [0, 1]ના ચાર ભાગ કરેલા. હવે દરેક અંતરાલનું મધ્યબિંદુ લઈ આઠ ભાગ કરીએ અને આ બંને પ્રકારના લંબચોરસો લઈને ક્ષેત્રફળો મેળવીએ. એ જ પ્રમાણે 16, 32, 64,... ભાગો પાડીને ક્ષેત્રફળો મેળવી શકીએ.

આ પ્રમાણે, જટિલ પ્રશ્નને નાના પ્રશ્નોમાં વહેંચીને ઉકેલ મેળવી શકીએ.



આકૃતિ 2(a)



આકૃતિ 2(b)

વિકલન

ઈટલીના જાણીતા નમતા પિત્ઝા ટાવર ઉપર ગણિતના પ્રોફેસર ચઢી રહ્યા હતા. આ નમતા પિત્ઝા ટાવરનું બાંધકામ ઑગસ્ટ 14, 1173માં શરૂ થયેલું. લડાઈ અને અન્ય કારણોસર 1372માં પૂરું થયું. લગભગ 55.86 મીટર અથવા 183 ફીટ ઊંચું છે. ટાવરને સાત માળ અને 296 પગથીયાં છે. આ ટાવરના છેલ્લા માળે પહોંચીને આ પ્રોફેસર ગુલાબ અને હીરાની વીંટી હથેળીમાં

રાખે છે અને હાથ કઠેરાના બહાર હવામાં કાઢીને હથેળીને ફેરવીને બંનેને એક સાથે છોડે છે. આ નમતો ટાવર હોઈને આ કામ સરળ બને છે. પછી વિચારે છે :

થોડીક સેકન્ડો પછી આ બંને કેટલે હશે? કોઈને ખબર હશે? આ અખતરા પહેલાં ઘણા સમય પહેલાંનાં સંત જેવા ગણાતા તત્ત્વજ્ઞાની એરિસ્ટોટલ, એમ માનતા કે સરખી ઊંચાઈ ઉપરથી બે જુદા જુદા દ્રવ્યવાળા પદાર્થોને એક સાથે નીચે મુકવામાં આવે તો વધારે દ્રવ્યવાળો પદાર્થ ધરતીને પહેલો અડશે.

આ ગણિતના પ્રોફેસર ગેલિલીયો હતા. તેમણે જે શોધ્યું તે અજબનું હતું. બંને ગુલાબ અને હીરાની વીંટી એક જ સાથે ધરતી ઉપર પડ્યાં. આ તદ્દન અણધાર્યું પરિણામ હતું અને સાથે સાથે અંતર માટેનું સૂત્ર $D(t) = 55.86 - ct^2$ શોધ્યું, જ્યાં c અચળ સંખ્યા છે જેની કિંમત આપણે સગવડતા માટે 16 લઈશું અને t સમય છે.

આકૃતિ 1 માં પદાર્થ જુદા જુદા સમયે ક્યાં હશે, તે બતાવ્યું છે.

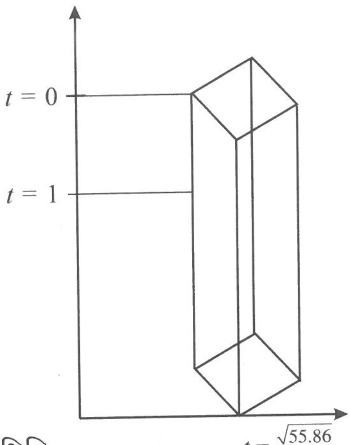
$$D(0) = 55.86$$

$$D(1) = 55.86 - 16(1)^2 = 39.86$$

$$D(t) = 0$$

$$\therefore \quad 16t^2 = 55.86$$

$$\therefore \quad t = \frac{\sqrt{55.86}}{4} \cong 1.87 \text{ સેકન્ડ}$$



આકૃતિ 3

આ ગેલિલીયોનો નિયમએ ભૌતિકશાસ્ત્રની સિદ્ધિ છે. ગેલિલીયોનો નિયમ અંતર અને સમયને જોડે છે.

આપણે ઘણી વખત ઓછા સમયમાં વધારે અંતર કાપીએ છીએ અને વધારે સમયમાં ઓછું અંતર કાપીએ છીએ. આને બીજી રીતે જોઈએ તો બંનેની ઝડપ સરખાવીએ છીએ. આથી સરેરાશ ઝડપ $= \frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}}$.

અહીંયાં અંતર કાપવામાં લીધેલો સમય તે સમય છે. અહીંયાં ટાવર ઉપરથી ગુલાબ કે હીરાની વીંટીની સરેરાશ ઝડપ કેટલી?

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{કુલ અંતર}}{\text{નીચે જમીનને અડે ત્યાં સુધીનો સમય}}$$

$$= \frac{55.86}{\sqrt{55.86/4}} = 4\sqrt{55.86} = 29.89 \text{ K/S}$$

હવે જ્યારે એમ કહીએ છીએ કે, "કલાકના 100 કિ.મી.ની ઝડપે ગાડી ચલાવું છું." એમ કહીએ છીએ એટલે શું? અડધા કલાક પછી ગાડી ચલાવવાનું બંધ કરું તો શું? અડધો કલાક 150 કિ.મી./ કલાક ચલાવતો હોઉં અને શરૂઆતના અડધા કલાક દરમિયાન પોલિસ મળે અને રોડ ઉપર બૉર્ડ હોય જેમાં લખ્યું હોય કે 100 કિ.મી. ની ઝડપ તો શું? હું તેને સમજાવવા મથું કે મારી સરેરાશ ઝડપ 100 કિ.મી./કલાક થશે તો તે માનશે કે મને દંડ કરશે? આ બધી મુશ્કેલીઓનું કારણ આપણને સરેરાશ ઝડપ કરતાં વિશેષ જોઈએ છે. આપણે તાત્ક્ષણિક વેગ (Instantaneous Velocity) અથવા તાત્ક્ષણિક ઝડપ જોઈએ.

તાત્ક્ષણિક વેગ દરેકે દરેક ક્ષણે વેગ દર્શાવે છે, જ્યારે સરેરાશ ઝડપ આખી મુસાફરી દરમિયાન કાપેલું કુલ અંતર અને આખી મુસાફરી દરમિયાન લીધેલા સમયનો ગુણોત્તર છે. દરેકે દરેક ક્ષણે ઝડપ કઈ રીતે મેળવાય? કોઈપણ સમય t માટે આપણે અંતર $D(t)$ મેળવી શકીએ. હવે t ની નજીકમાં નાનામાં નાનો h લઈએ, અને અંતર $D(t + h)$ મેળવીએ. હવે આપણે $t + h$ અને t વચ્ચે કાપેલું અંતર $= D(t + h) - D(t)$ છે. આને લીધેલો કુલ સમય $(t + h) - t = h$ છે. હવે ગુણોત્તર લઈને

$$t \text{ ક્ષણે ઝડપ} = \frac{D(t+h) - D(t)}{h}$$ જ્યાં h એકદમ નાની સંખ્યા છે.

દરેક ક્ષણે આપણને ઝડપ મળતી હોઈને આ પણ વિધેય બને છે. હવે આપણે નીચે પડતા ગુલાબ અને હીરાની વીંટીની તાત્ક્ષણિક ઝડપ મેળવીએ. સામાન્ય રીતે આ નવા વિધેયને $D'(t)$ દર્શાવાય છે. એટલે કે

$$D'(t) = \frac{D(t+h) - D(t)}{h} = \frac{55.86 - 16(t+h)^2 - 55.86 + 16t^2}{h}$$

$$= \frac{16}{h}\{-(t + h)^2 + t^2\}$$

$$= -16\ (2t + h) = -32t - 16h \text{ થાય.}$$

h અત્યંત સૂક્ષ્મ હોઈને, આપણે $D'(t) = -32t$ મેળવીએ છીએ. જાણે કે $t = 1$ સમયે ઝડપ $D'(t) = -32$ m/s છે. ઋણ સંજ્ઞા ઉલટી દિશા બતાવે છે.

વક્રો

વક્રના સ્પર્શકોએ કલનગણિતના વિકાસમાં ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો છે. સ્પર્શક શબ્દ જ શું છે તે કહે છે. વક્રને સ્પર્શક સ્પર્શે છે. વર્તુળના સ્પર્શકોથી આપણે પરિચિત છીએ. સ્પર્શક સુરેખા હોઈને આપણે સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવો જોઈએ. ઉદાહરણ માટે આપણે પરવલય $F(x) = x^2$ લઈએ. આપણે પરવલય ઉપરના બિંદુ (1,1) એ દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવો છે. પરવલય ઉપર બીજું જુદું બિંદુ (2,4) લઈએ અને બંને બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 2 + 1 = 3 \text{ છે.}$$

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ (1,4) ના બદલે બિંદુ $(1.5, \frac{9}{4})$ (1,1)ની નજીક લઈએ,

આ છેદક રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{\frac{3}{2} - 1}$$

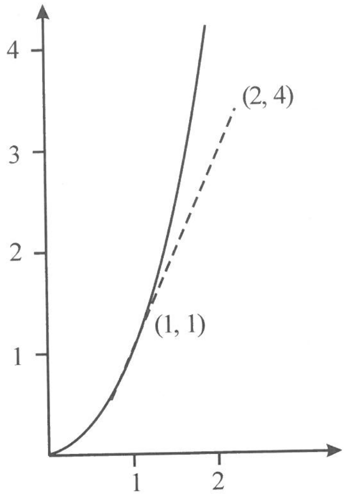
$$= \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ છે.}$$

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ $(1.1, (1.1)^2)$, (1, 1) નજીક લઈએ. આ છેદક રેખાનો ઢાળ

$$m = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}$$

$$= \frac{(1.1)^2 - 1^2}{(1.1) - 1}$$

$$= 1.1 + 1 = 2.1 \text{ છે.}$$



આકૃતિ 4

એ જ રીતે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ $(1.01, (1.01)^2)$ બિંદુ (1.1)ની નજીક લઈએ.

આ છેદક રેખાનો ઢાળ $m = \frac{(1.01)^2 - 1^2}{(1.01) - 1} = 1.01 + 1 = 2.01$ છે.

ટૂંકમાં આપણે બિંદુ (1,1)ની એકદમ નજીકમાં બિંદુ $(1 + h, (1 + h)^2)$ લઈએ.

આ છેદક રેખાનો ઢાળ $m = \dfrac{(1+h)^2 - 1^2}{(1+h-1)} = (1 + h) + 1 = 2 + h$ છે.

છે. અને $h \to 0$ છે. આથી સ્પર્શકનો ઢાળ 2 છે. જો $h \to 0$ હોય, તો $m \to 2$ છે. આમ, કહેવા માટે ઘણું બધું કહેવું પડે. જો તમારે આ બરાબર સમજવું હોય તો કલનગણિતનો અભ્યાસ કરવો પડે. કોઈ બિંદુએ $(x, f(x))$

સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x}$ જ્યાં $h \to 0$ છે.

આની સાથે તાત્ક્ષણિક ઝડપ $D'(t) = \dfrac{D(t+h) - D(t)}{h}$ જ્યાં $h \to 0$ છે.

સરખાવતાં બંને વ્યાખ્યાઓમાં ઘણી જ સમાનતા છે. આથી ઢાળ કે ઝડપ જોડે જોડ્યા વગર જ આપેલા વિધેય f માંથી તદ્દન જુદું જ વિધેય જેને આપણે f માંથી જ મેળવેલું હોઈને f' વડે દર્શાવીશું અને $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x}$ જ્યાં $h \to 0$ છે.

આ બદલાવવાનો દર છે. f' ને f નો x વિશે વિકલિત (Derivative) કહેવાય છે.

વિધેયનો વિકલિત મેળવવાની ક્રિયાને વિકલન કહેવામાં આવે છે.

સરળ વિધેયોના વિકલિતો જોઈએ.

(1) $f(x) = a$. a અચળ છે, $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{x} = \dfrac{a-a}{h} = \dfrac{0}{h} = 0$

$f(x) = a$ નો આલેખ સુરેખા છે. આ સુરેખા ઉપર કોઈપણ બિંદુએ સ્પર્શક દોરીએ તો તે સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે x-અક્ષનાં ઢાળ $m = 0$ છે. સુરેખાઓના સ્પર્શકો તે જ સુરેખાઓ છે.

(2) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$= 2x + h$ થાય, જો $h \to 0$ હોય તો

$$f'(x) = 2x$$

ઉપસંહાર

કલનગણિતના અભ્યાસનું ખરું પ્રેરકબળ એ માપનક્ષેત્રની જરૂરિયાતો માટેનું હોય તેમ લાગે છે. ગતિનું માપન, દ્વિપરિમાણીય કે ત્રિપરિમાણીય બંધ પ્રદેશનું માપન માટેની ગણતરી વિકસાવવાનું કામ કલનગણિત દ્વારા કરવામાં આવ્યું છે.

આજે પણ, સામાન્ય માણસની માપનક્ષેત્રે લગતી જરૂરિયાતો પૂરી કરવા કલનગણિત વરદાનરૂપ સાબિત થયું છે.

આ પરિશિષ્ટ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે.

(1) Wouk, Herman, The Language God Talks : On Science and Religion, Bosten : Little, Brown, 2010

(2) Strogatz, Steran. Infinite Powers : How Calculus Reveals the secrets of the universe. An Eamon Dolan Book, Houghton Miffin Harcourt. Bosten, New York, 2019

(3) "કલનગણિત શું છે?" *સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય વૃત્ત*, (નવેમ્બર-ડિસેમ્બર, 2019)

◆

પરિશિષ્ટ 2

કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળા

પ્રસ્તાવના

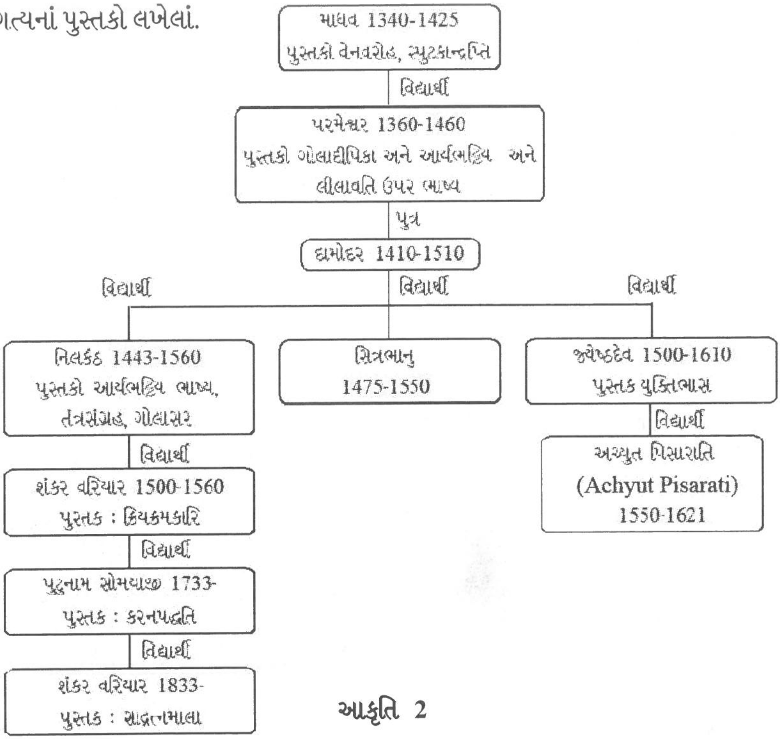
ગણિતશાસ્ત્રના ઇતિહાસકારો એવું માનતા કે ભાસ્કર (1114-1185) પછી કોઈ ભારતીય ખગોળશાસ્ત્રી કે ગણિતશાસ્ત્રી થયું નથી. 1832માં ચાર્લ્સ એમ. વિશે (Charles M. Whish) માધવ અને તેમના વિદ્યાર્થીઓએ શ્રેઢી (Series) ઉપર કરેલા કામ વિષેનો લેખ Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britian and Ireland માટે લખ્યો ત્યારે ખ્યાલ આવ્યો કે ભાસ્કર પછી અંત આવ્યો નથી. વિશ બ્રિટિશ સિવિલ અધિકારી હતા અને ભારત વિષેનું સારું જ્ઞાન ધરાવતા હતા. સો વર્ષ સુધી આની કોઈએ નોંધ લીધી નથી. 1940માં ફરીથી ઊંડાણપૂર્વક આ બધાનો અભ્યાસ પ્રો. સી. ટી. રાજગોપાલ, તેમના સહાધ્યાયીઓ અને તેમના વિદ્યાર્થીઓએ શરૂ કર્યો. સાથે સાથે કે. વી. સર્મા(K. V. Sarma)નું પુસ્તક, "A History of the Kerala School of Hindu Astronomy" 1972માં પ્રસિદ્ધ થયું. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓના કામની યોગ્ય કદર થાય તે માટે એકલા હાથે લડનાર મૂળ કેરાલાના પ્રો. જ્યોર્જ ગેવેરગેસ જૉસેફ (George Gheverghese Joseph)નાં બે પુસ્તકો, 'The Crest of the Peacock' અને 'Indian Mathematics' ખૂબ જ અગત્યનાં છે. ખરેખર ભારત સરકારે તેમના કામની કદર કરીને 'પદ્મશ્રી'થી સન્માનવા જોઈએ.

આકૃતિ 1

આકૃતિ 1માં બતાવેલા કેરાલા રાજ્યની કોચીન શહેરથી થોડાક કિલોમીટરના અંતરે આવેલા સંગમગ્રામ (Sangamgram)ના બકુલ વિહારમાં માધવે

(1340-1425) ગણિત અને ખગોળની શાળા સ્થાપેલી. માધવ વિષેની થોડીક માહિતી જાણીતી છે. તેઓ કર્ણાટકના દરિયા કિનારાના વિભાગમાંથી આવ્યા હતા અને એમ્પ્રાન્તિરિ (Emprantiri) બ્રાહ્મણ હતા જે નામ્બુથિરિ (Nambuthiri) બ્રાહ્મણ કરતાં નીચા ગણાય. આખરે એમ્પ્રાન્તિરિ નામ્બુથિરિની પેટા જ્ઞાતિ બની અને તેમના લખેલા પુસ્તક 'વેનવરોહા' (Venvaroha)માં તેમના ગામની અને ઘરની માહિતી આપેલી છે. તેમનું સંગમગ્રામ હાલમાં ઇરિન્જાલકુડા (Irinjalkuda)ના નામથી ઓળખાય છે અને કોચીનની નજીક આવેલું છે. તેમના ઘરનું નામ 'बकुलाधिस्थित् विहारम्' સંસ્કૃતમાં અને 'ઇલેઇનિન્નાપલ્લિ' (Ilaininnapalli) મલાઈ ભાષામાં હતું. ઈલ્લામ (Illam) એ તામિલ શબ્દ છે, જેનો અર્થ મોટા આંગણા સાથેનું મકાન. તે સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓ ઇલ્લામમમાં જ રહેતા અને વિદ્યાર્થીઓને ત્યાં જ ભણાવતા. વિદ્યાર્થીઓ ઈલ્લામમમાં જ રહેતા. માધવનું ગામ સાતમી અને આઠમી સદીના બ્રાહ્મણો માટેનાં વસવાટનાં 32 ગામોમાંનું એક ગામ હતું. માધવનું મોટા ભાગનું ગણિતનું કામ અદશ્ય થઈ ગયું છે જ્યારે ખગોળશાસ્ત્રનું કામ બચી ગયું છે.

આકૃતિ-2માં આ શાળાના અગત્યના વિદ્યાર્થીઓનાં નામ આપ્યાં છે, જેમણે તે સમયે અગત્યનાં પુસ્તકો લખેલાં.



આકૃતિ 2

દામોદર પરમેશ્વરના પુત્ર હતા. દામોદરના બે પ્રસિદ્ધ વિદ્યાર્થીઓ નીલકંઠ અને જ્યેષ્ટદેવ હતા. નીલકંઠના લખવા પ્રમાણે પરમેશ્વર માધવ પાસેથી ઘણું બધુ શીખેલા. નીલકંઠ સો વર્ષથી વધારે જીવેલા અને આખી જીંદગી ઘણા વિદ્યાર્થીઓને શીખવેલું. જેમાંના ઘણા તે સમયના નામાંકિત વિદ્વાનો બનેલા. નીલકંઠ અને દામોદરનો વિદ્યાર્થી જ્યેષ્ઠદેવ જેણે કેરાલા સ્કૂલનું અગત્યનું પુસ્તક 'યુક્તિભાસ (Yuktibhasa)' લખેલું. કેરાલાના તે સમયના ખગોળશાસ્ત્રીઓ જે બધાં પ્રમેયો અને સૂત્રો વાપરતા તે 'યુક્તિભાસ'માં છે. આ બધાં પ્રમેયો અને સૂત્રોની વ્યુત્પત્તિઓ (Derivations) 'યુક્તિભાસ'માં છે.

માધવ પછીના ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓ પરમેશ્વર, નિલકંઠ અને જ્યેષ્ઠદેવના પુસ્તકો ઉપરથી એવું જણાય કે માધવે $sin\ x$, $cos\ x$ π અને $tan^{-1}\ x$ની ઘાત શ્રેઢીઓ મેળવેલી જે ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝના 200 વર્ષ પહેલાં મેળવેલી.

'યુક્તિભાસ'ના બે ભાગ છે. પહેલો ભાગ ગણિતનો છે. તેમાં માધવની મેળવેલી ઘાત શ્રેઢીઓ પણ છે. બીજો ભાગ ખગોળશાસ્ત્રનો છે.

યુક્તિભાસ 1530ની આસપાસ નીલકંઠના 'તંત્ર સંગ્રહ'ને લંબાણપૂર્વક સારી રીતે સમજાવવા લખાયેલું. 'યુક્તિભાસ'નું અંગ્રેજીમાં ભાષાંતર કે. વી. સર્માનું 2008માં પ્રસિદ્ધ થયું છે, પણ ખૂબ જ મોંઘું છે. એમેઝોન.કોમ ઉપર મળે છે. યુક્તિભાસ લગભગ ચારસો વર્ષ લોકપ્રિય પુસ્તક હતું. 'યુક્તિભાસ'ની મલયાલમ ભાષામાં લખાયેલાંની પ્રતો કેરાલામાં ઘણી લાઇબ્રેરીઓમાં સરસ રીતે સાચવી રાખવામાં આવેલી છે. આ પ્રતો ઉપરથી સંસ્કૃતમાં થયેલું ભાષાંતર Indian Institute of Advanced Study એ પ્રસિદ્ધ કર્યું છે. યુક્તિભાસની શરૂઆતમાં કોઈ જગ્યાએ લેખકનું નામ નથી; પણ બીજી ઘણી જગ્યાએથી મળતા પુરાવા પરથી કહી શકાય કે જ્યેષ્ઠદેવે આ પુસ્તક લખેલું. જ્યેષ્ઠદેવનું કૌટુમ્બિક ઘર હજુયે અલટુર અને ટ્રક્કાન્ટિયુર (Alattur and Trakkantiyar)ની નજીકમાં છે.

sine and cosineની ઘાત શ્રેઢીઓ (Power Series) :

'યુક્તિભાસ'માં માધવની સાઇન શ્રેઢીની વ્યુત્પત્તિ (derivation) આપેલી છે. 'તંત્ર-સંગ્રહ'માં લેખક નીચેના શ્લોકથી શરૂઆત કરે છે.

निहत्य चापवर्गेण चापं ततत् फलानि च।
हरेत् समूलयुगवर्गेस्विज्याव गॉहतैः क्रमात्॥
चॉप फलानि चाधोऽधौ न्यस्योपर्युपरि त्यजेत् जीवाप्त्यै...

સાર : ચાપ a પહેલી રકમ છે. ચાપને ચાપના વર્ગથી ગુણીને જે મળે તેને પહેલી બેકી સંખ્યાના વર્ગને તે સંખ્યાથી વધારીને જે મળે તે સંખ્યાને r^2 વડે ગુણતાં જે મળે તેનાથી ભાગતાં

બીજી રકમ = $\dfrac{a \cdot a^2}{(2^2+2)r^2} = \dfrac{a^3}{3!\,r^2}$ મળે.

આ જ રીતે ત્રીજી રકમ મેળવો. એટલે કે બીજી રકમને ચાપના વર્ગથી ગુણતાં જે મળે તેને બીજી બેકી સંખ્યાના વર્ગને તે સંખ્યાથી વધારીને જે મળે તેને r^2 વડે ગુણતાં જે મળે તેનાથીભાગતાં,

ત્રીજી રકમ = $\dfrac{a^3}{3!\,r^2} \cdot \dfrac{a^2}{(4^2+4)r^2} = \dfrac{a^5}{5!\,r^4}$ મળે.

આ જ રીતે શ્રેણીની બીજી રકમો મેળવો.

છેલ્લે બેકી રકમોનો સરવાળો એકી રકમોના સરવાળામાંથી બાદ કરતાં *sine* ના ચાપ *r* ની કિંમત મળે એટલે કે,

$$sin \text{ જ્યા} = \text{જ્યા } \theta = a - \frac{a^3}{3!\,r^2} + \frac{a^5}{5!\,r^4} - \frac{a^7}{7!\,r^6} + \ldots$$

$a = r\theta$ હોઈને

$$sin \text{ જ્યા} = \text{જ્યા } \theta = r \sin\theta = r\theta - \frac{r^3\theta^3}{3!\,r^2} + \frac{r^5\theta^5}{5!\,r^4} - \frac{r^7\theta^7}{7!\,r^6} + \ldots$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots \text{ છે.}$$

આ જ પ્રમાણે $r(1 - \cos\theta)$ ની શ્રેણી 'તંત્ર-સંગ્રહ'ના નીચેના શ્લોકમાં આપી છે :

निहत्य चापवर्गेण रुपं तत्तत् फलानि च।
हरेत् विमूलयुग्वर्गैस्त्रिज्यावर्गहतैः क्रमात्।
किन्तु व्यासदलेनैव द्विघ्नेनाद्यं विभज्यताम्।
फलान्यधोऽधःक्रमशो न्यस्योपर्युपरि त्यजेत्।
शराप्त्यै...

પહેલી રકમ : ચાપના વર્ગને $2r$ વડે ભાગો એટલે કે પહેલી રકમ = $\dfrac{a^2}{2r}$.

બીજી રકમ : પહેલી રકમને ચાપના વર્ગથી ગુણીને જે મળે તેને બે કરતાં વધારે પહેલી બેકી સંખ્યાના વર્ગને તે સંખ્યાથી ઘટાડીને જે મળે તેને r^2 વડે ગુણીને ભાગતાં

બીજી રકમ : $\dfrac{a^2}{2r} \cdot \dfrac{a^2}{(4^2-4)\,r^2} = \dfrac{a^4}{4!\,r^3}$

ત્રીજી રકમ : $\frac{a^4}{4!\,r^3} \cdot \frac{a^2}{(6^2 - 6)\,r^2} = \frac{a^6}{6!\,r^5}$

બેકી રકમનોનો સરવાળો એકી રકમોના સરવાળામાંથી બાદ કરતાં

ઉત્તક્રમજ્યા $\theta = r\,(1 - cos\,\theta) = \frac{a^2}{2r} - \frac{a^4}{4!\,r^3} + \frac{a^6}{6!\,r^5} - \frac{a^8}{8!\,r^7} + \ldots$

$a = r\theta$ મૂકતાં,

$$r\,(1 - cos\,\theta) = \frac{r\theta^2}{2!} - \frac{r\theta^4}{4!} + \frac{r\theta^6}{6!} - \frac{r\theta^8}{8!} + \ldots$$

$$\therefore \quad cos\,\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

આ *sine* અને *cosine* ની ઘાત શ્રેઢીઓ છે તે માધવે મેળવેલી. આ ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝે માધવના મેળવ્યા પછી બસો વર્ષે મેળવેલી.

આ પરિશિષ્ટ નીચેના પુસ્તકોના આધારે લખાયું છે :

(1) Joseph G. G. : Indian Mathematics : Engahging with the world from ancient to modern times, World Scientific Publishing Europe LTD, 2016.

(2) Joseph G. G. : A Passage to Infinity : Material Indian Mathematics from Kerala and its impact, Sage Publication LTD., 2009

(3) Puttaswamy T. K. : Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians, Elsevier, 2012.

◆

પરિશિષ્ટ 3 : કલનગણિતના વિકાસનો ઘટનાક્રમ

ક્રમ	સાલ	ઘટના
1.	1503	જ્યેષ્ઠદેવે 'યુક્તિભાસ'માં માધવની *sinx, cosx,* π અને $tan^{-1}x$ ની ઘાત શ્રેઢીઓ આપી.
2.	1604	જોહાન્સ કેપ્લરે (જર્મન ખગોળશાસ્ત્રી) તેમના પુસ્તક "Astronomiae Par Optics"માં શૂન્યાભિચલોના ઉપયોગ વિશે સમજૂતી આપી.
3.	1615	જોહાન્સ કેપ્લરે ઘનતા માપવા શૂન્યાભિચલોનો ઉપયોગ સૌપ્રથમ કર્યો.
4.	1629	ફ્રાન્સના ગણિતશાસ્ત્રી પિએરરે ફર્માએ તેમના પુસ્તક "Introduction to Plane and Solid Loci"માં યામભૂમિતિનો ખ્યાલ આપ્યો.
5.	1635	ઇટાલીયન ગણિતજ્ઞ બોનાવેન્ટુરા કાવલીટીનું પુસ્તક "Leometry Developed by a New Method Through the Indivisibles of the Continue." પ્રસિદ્ધ થયું. જેમાં પ્રથમવાર સંકલનના મૂળભૂત ખ્યાલનો પરિચય આપ્યો.
6.	1637	ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ રેને ડેકાર્ટના પુસ્તક "Discourse on Method"માં યામભૂમિતિના વિચારો પ્રસિદ્ધ થયા. યામભૂમિતિ શોધવાનો યશ તેમને મળે છે.
7.	1637	ફર્માના લેખ "On the Method for the Evaluation of Maxima and Minima"માં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધવાની રીત આપેલી છે.
8.	1655	જોહન વાલીસે અનંત શ્રેઢીનો અભ્યાસ કર્યો.

9.	1658	બેઝ પાસ્કલે સાઇન વિધેયનો ઉપયોગ કર્યો.
10.	1665	ઇંગ્લૅન્ડના વિજ્ઞાની અને ગણિતજ્ઞ આઇઝેક ન્યૂટને "વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય" મેળવ્યું.
11.	1665	ન્યૂટને તેમના પુસ્તક "Optics"માં વિકલનની રીતની પ્રથમ વખત સમજ આપી.
12.	1666	ન્યૂટને સંકલન કલનગણિતને લગતા પરિણામો મેળવ્યાં. ન્યૂટન તેને Inverse Method of Fluxions તરીકે ઓળખતા.
13.	1668	જેમ્સ ગ્રેગોરી એ કલનગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની ભૌમિતિક સમજૂતી આપી.
14.	1669	ન્યૂટને લખેલી નોંધપોથી "De Analyst"માં 'ઇન્વર્સ ફ્લક્સિઓન'ના નિયમો પ્રસિદ્ધ કર્યા.
15.	1670	ફર્માના મોટા પુત્ર ક્લેમેન્ટ સેમ્યુલે ફર્માના પુસ્તકો "Fermat's Observations on Diophantus" અને "Various Mathematical Works"નું સંપાદન કર્યું.
16.	1670	આઇઝેક ન્યૂટને વક્રોના સ્પર્શકો અને ક્ષેત્રફળ મેળવવાની રીતો શોધી.
17.	1673	લાઇબ્નિઝે સંકલનના સંકેતો અને નિયમોનો ઉપયોગ તેમની હસ્તપ્રતમાં કરેલો અને સંકલન સંકેત $\int$ અને વિકલન સંકેત $\frac{dy}{dx}$નો ઉપયોગ કર્યો.
18.	1676	લાઇબ્નિઝે વિકલનના નિયમો (તેમની હસ્તપ્રતમાં) મેળવ્યા.
19.	1676	ન્યૂટને લાઇબ્નિઝને પત્રો લખી તેમના ફ્લક્સીઓનના કરેલ કામની માહિતી આપી.
20.	1683	સ્વિટ્ઝરલૅન્ડના ગણિતજ્ઞ જેકોબ I બર્નૂલિએ અચળાંક "e"ની અંદાજિત કિંમત મેળવી. તેમણે સૌપ્રથમ "Integral calculus" શબ્દ પ્રયોજ્યો.

21.	1684	લાઇબ્નિઝનું કલનગણિતનું પ્રથમ સંશોધન પત્ર "New Method for the Maximum and Minimum and also tangents and singular type of calculus of them" લેટિન ભાષામાં "Nova Acta Eraditorum"માં પ્રસિદ્ધ થયું.
22.	1686	ન્યૂટન લેખિત "The Principia" પ્રસિદ્ધ થયું.
23.	1686	લાઇબ્નિઝની સંકલનની રીતો "Acta Eraditorum"માં પ્રસિદ્ધ થયું.
24.	1690	જેકોબ I બર્નૂલિએ કલનશાસ્ત્રને સંબંધિત પ્રશ્નો સંશોધન પત્રમાં રજૂ કર્યાં.
25.	1691	માઇકલ રોલે મધ્યકમાન પ્રમેય સાબિતી વગર આપ્યું.
26.	1693	જોહ્ન વાલીસે ન્યૂટનની ફ્લક્સિઓનની રીતો પ્રસિદ્ધ કરી.
27.	1694	લાઇબ્નિઝે પ્રથમ વખત "વિધેય" શબ્દનો પ્રયોગ કર્યો.
28.	1694	ફ્રાન્સ ગણિતજ્ઞ લોપિટાલના પુસ્તક "Analyse de Infiniment peties"માં વિકલનનો અગત્યનો નિયમ પ્રસિદ્ધ થયો. જે વાસ્તવમાં જોહાન્નીસ I બર્નૂલિ દ્વારા શોધાયેલ હતો.
29.	1700	લાઇબ્નિઝ જોહાન્નીસ I અને જેકોબ I બર્નૂલિ ભાઈઓનાં સંકલન અને વિકલનના પરિણામો "Acta Eraditirum"માં પ્રસિદ્ધ થયા.
30.	1713	જેકોબ I બર્નૂલિનું લેખિત પુસ્તક "Arcs Conjectandi" પ્રસિદ્ધ થયું.
31.	1715	બ્રુક ટેઇલરનું શાંત તફાવતોના કલનગણિત કાર્ય તેમજ પ્રસિદ્ધ ટેલર શ્રેઢીનું પ્રમેય તેમના પુસ્તક "Methods Increamentorum Directa"માં પ્રસિદ્ધ થયું.
32.	1720	નિકોલૉસ III બર્નૂલિએ લંબચ્છેદી વક્રોના વ્યસ્ત અને વિકલ સમીકરણને લગતા પ્રશ્નો રજૂ કર્યા.

33.	1724	ડેનિએલ I બર્નૂલિનું તેમના સંશોધનનું કામ દર્શાવતું પુસ્તક "Exercitationes Mathematical" પ્રસિદ્ધ થયું.
34.	1734	આઇરીસ ફિલોસોફર અને ગણિતજ્ઞ જ્યોર્જ બર્કલીએ તેમના પુસ્તક "The Analyst"માં ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝે આપેલા ફ્લક્સિઓન કે શૂન્યાભિચલના ખ્યાલ બાબતે વાંધો ઉઠાવ્યો.
35.	1754	ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ ગણિત જેન દલામ્બર્ટે વિકલનની સમજૂતી સાથેની વ્યાખ્યા તેમના પુસ્તક "Encyclopeadia Vol. 4"માં આપેલી.
36.	1754	ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ જોસેફ લુઇસ લાગ્રાન્જે ગિયુલિઓ ફ્રેગનને લખેલા પત્રમાં દ્વિપદી પ્રમેય અને ગુણિત વિધેયોના પરંપરિત વિકલનની સમાનતા દર્શાવી.
37.	1755	સ્વિત્ઝરલૅન્ડના ગણિતજ્ઞ લીઓનહાર્ડ ઓઇલરે લખેલું પુસ્તક, "Introduction in Analyin Intitorum" વિકલન માટેનું સુગ્રથિત પ્રથમ પુસ્તક મનાય છે.
38.	1756	લાગ્રાન્જે Calculus of Variation અને Mechanicsને લગતા પરિણામો મેળવ્યાં.
39.	1767	લાન્ગ્રાજનું ખૂબ જ અગત્યનું પુસ્તક "Analytical Mechanics" પ્રસિદ્ધ થયું.
40.	1768	ઓઇલરનું પુસ્તક "Institutionum Calculi Differentials" પ્રસિદ્ધ થયું. જેમાં ત્રિકોણમીતીય શ્રેઢીઓ વ્યાખ્યાયિત કરેલી.
41.	1784	લાગ્રાન્જે કલનગણિતને લગતા પાયાના પ્રશ્નો બર્લિન અકેડમીમાં ઈનામ માટે મૂકેલા.
42.	1794	લાગ્રાન્જના પુસ્તક "Theorie des functions Analytiques"માં કલનગણિતને જુદી જ રીતે રજૂ કરવામાં આવ્યું.
43.	1797	લાગ્રાન્જે વિકલનના સંકેતો તેમજ અગત્યના મધ્યકમાન પ્રમેય (Intermediate Value Theorem) મેળવ્યાં.

44.	1821	ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ ઓગ્સ્ટીન લુઇસ કોશીના પુસ્તક "Cours d'Analyse"માં લક્ષ, સાતત્ય સને અભિસારીનાં પરિણામો આપ્યાં છે.
45.	1823	કોશીના પુસ્તક "Calcul Infinitesimal"માં સંકલન અને વિકલનને લગતાં પરિણામો પ્રસિદ્ધ થયાં.
46.	1828	જ્યોર્જ ગ્રીને મહત્ત્વનું ગ્રીન પ્રમેય મેળવ્યું.
47.	1841	કાર્લ ગુસ્ટવ જેકોલ દ્વારા આંશિક વિકલન (Partial Derivative)નાં પરિણામો મેળવ્યાં.
48.	1854	જર્મન ગણિતજ્ઞ બર્નહાર્ડ રીમને નવા પ્રકારના સંકલનની સંકલ્પના આપી.
49.	1854	આર્મર કલેએ ચાર પરિમાણીય અવકાશની સંકલ્પના આપી.
50.	1856	જર્મનીના ગણિતજ્ઞ કાર્લ વાયર્સ્ટ્રાસે કલનગણિતની મદદથી ગણિત વિશ્લેષણનાં અગત્યનાં પરિણામો મેળવ્યાં. (જે કલનગણિતની મદદથી મેળવ્યાં.)
51.	1872	કાર્લ વાયરસ્ટ્રાસ અન તેમના વિદ્યાર્થી એડ્રેડ હેઇન (Hein) દ્વારા લક્ષની $\varepsilon - \delta$ ની વ્યાખ્યા આપવામાં આવી.
52.	1901	ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ હેન્રી લેબેગે રીમન સંકલનના વ્યાપક સ્વરૂપ એવા લેબેગ સંકલનનો ખ્યાલ આપ્યો.
53.	1901	એલી કાર્ટરે બાહ્ય વિકલનની સંકલ્પના આપી.
54.	1903	કાર્લ ડેવિડ રંગે ફુરીયરે ટ્રાન્સફોર્મની પદ્ધતિ વિકસાવી.
55.	1930	એલ્ઝો ચર્ચ લેમ્ડાએ કલનગણિતની સંકલ્પના આપી.
56.	1957	જાપાની ગણિતજ્ઞ કીયોસ્કી ઇટોએ ઇટો-કલનગણિતની સંકલ્પના આપી.
57.	1961	ડેનીયલ શેન્ક અને જોહ્ન વેરીસે કમ્પ્યૂટરની મદદથી πની 1 લાખ દશાંશ સ્થળ સુધીની કિંમતો મેળવી.

◆

પરિશિષ્ટ 4

અંગ્રેજી પારિભાષિક શબ્દસૂચિ

(ગુજરાતી સમાનાર્થી સહિત)

Aberration – ઉન્માર્ગગમન
Absolute Value – નિરપેક્ષ મૂલ્ય
Analytic Geometry – વૈશ્લેષિક ભૂમિતિ
Appendix – પરિશિષ્ટ
Approches – અનુલક્ષ
Area – ક્ષેત્રફળ
Astronomy – ખગોળશાસ્ત્ર
Axiom – પ્રસ્થાપિત સિદ્ધાંત
Binomial Theorem – દ્વિપદી પ્રમેય
Botany – વનસ્પતિશાસ્ત્ર
Bounded – સીમિત
Calculus – કલનશાસ્ત્ર
Catenary – રજ્જુવક્ર
Centripetal Force – કેન્દ્રગામી બળ
Circle – વર્તુળ
Co-domain – સહપ્રદેશ
Combination – સંયોજન
Comet – પૂંછડીયો તારો
Complex Analysis – સંકર વિશ્લેષણ
Concave – બહિર્મુખ
Conclusion – નિષ્કર્ષ
Congruent – એકરૂપ
Consistent – સુસંગત
Constant – અચળ
Continuous – સતત
Convergence – અભિસારી
Convex – અંતઃમુખ
Co-ordinatic Geometry – યામભૂમિતિ
Corollary – ઉપપ્રમેય
Cosmology – વિશ્વશાસ્ત્ર
Cube – ઘન
Curvature – વક્રની વક્રતા
Curve – વક્ર
Definitions – વ્યાખ્યાઓ
Density – ઘનતા
Dependent – આધારીત
Derivative – વિકલિત
Differentation – વિકલન
Differential Equation – વિકલ સમીકરણ
Discontinuous – અસતત
Divergant – અપસારી
Domain – પ્રદેશ
Dynamics – ગતિવિજ્ઞાન
Ellipse – ઉપવલય
Exponent – ઘાતાંક
Expression – અભિવ્યક્તિ
Eyepiece – નેત્રકાચ
Finite – સાન્ત
Focus – મિલનબિંદુ/નાભિબિંદુ

Fourier Series – ફૂરિયર શ્રેઢી
Function – વિધેય
Fundamental Theorem – મૂળભૂત પ્રમેય
Geometric Progression – સમગુણોત્તર શ્રેણી
Geometric Series – સમગુણોત્તર શ્રેઢી
Gravity – ગુરુત્વાકર્ષણ
Harmonic Series – સ્વરિત શ્રેઢી
Hydro dynamics – દ્રવ્યગતિ વિજ્ઞાન
Hyperbola – અતિવલય
Hypothesis – પૂર્વધારણા
Image – પ્રતિકૃતિ
Inequality – અસમતા
Inertia – જડતા
Infinite – અનંત
Infinite Series – અનંત શ્રેઢી
Infinitesimal – અનંત સુક્ષ્મો/ શૂન્યાભિચલો
Infrimum – અધઃલક્ષ
Integral – સંકલ
Interest – વ્યાજ
Interval – અંતરાલ
Irrational – અસંમેય
Jupiter – ગુરુનો ગ્રહ
Length – લંબાઈ
Limit – લક્ષ
Line – રેખા/સુરેખા
Linear Algebra – સુરેખ બીજગણિત
Logarithm – લઘુગણક
Logic – તર્કશાસ્ત્ર
Lower sum – નિમ્ન સરવાળા
Lunar Eclipse – ચંદ્રગ્રહણ
Mars – મંગળનો ગ્રહ
Mass – વજન/દળ/દ્રવ્ય
Mathematical Physics – ગાણિતીય ભૌતિકશાસ્ત્ર
Maximum – મહત્તમ
Measurability – માપનક્ષમ
Measurement of set – ગણનું માપ
Mechanics – યંત્રશાસ્ત્ર
Mercury – બુધનો ગ્રહ
Metaphysics – અધ્યાત્મશાસ્ત્ર
Minimum – લઘુત્તમ
Momentum – વેગમાન
Natural Number – પ્રાકૃતિક સંખ્યા
Notation – સંકેતલિપિ
Number Theory – સંખ્યાશાસ્ત્ર
Optics – પ્રકાશશાસ્ત્ર
Orbit – ભ્રમણકક્ષા
Parabola – પરવલય
Parallel lines – સમાંતર રેખાઓ
Particle – કણ
Partition – વિભાજન
Partition – વિભાજન
Permutation Group – ક્રમચય સમૂહ
Perpendicular Axis – લંબધરી
Philosopher – તત્ત્વજ્ઞાની
Physics – ભૌતિકશાસ્ત્ર
Physiology - શરીરવિજ્ઞાનશાસ્ત્ર
Point of inflection - પરિવૃત્તિ બિંદુ
Point of Inflection - વિશિષ્ટ બિંદુ

Polar Co-ordinates - ધ્રુવીય યામો
Polygon - બહુકોણ
Principal - મુદ્દલ
Probability Theory - સંભાવનાશાસ્ત્ર
Quadratic Equation - દ્વિઘાત સમીકરણ
Quadrilateral - ચતુષ્કોણ
Quantity - રાશી, પરિમાણ, માત્રા
Range - વિસ્તાર
Rational - સંમેય
Real Numbers - વાસ્તવિક સંખ્યા
Rectangle - લંબચોરસ
Reflection - પરાવર્તન
Refraction - વક્રીભવન
Saturn - શનિનો ગ્રહ
Segment - વૃત્તખંડ
Semicircle - અર્ધવર્તુળ
Sequence - શ્રેણી
Series - શ્રેઢી
Similar - સમરૂપ
Simplification - સાદુ રૂપ
Slop - ઢાળ
Solar Eclipse - સૂર્યગ્રહણ
Solvable - ઉકેલક્ષમ
Space - અવકાશ
Sub-Interval - પેટા અંતરાલ
Supremum - ઉર્ધ્વલક્ષ
Tangent - સ્પર્શક
Theology - ધર્મશાસ્ત્ર
Theorem - પ્રમેય
Tolerance Number - સ્વીકાર્ય સંખ્યા
Trigonomatry - ત્રિકોણમિતિ
Undefined - અવ્યાખ્યાયિત
Union - યોગ
Velocity - વેગ
Venus - શુક્રનો ગ્રહ
Volume - કદ
Waves - મોજાઓ

◆

પરિશિષ્ટ 5

સૂચિ

અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ 84
અધ્યાત્મશાસ્ત્ર 69
અપસારી 117
અભિસરણ 117
આઇઝેક બેરો 43
આઇનસ્ટાઇન 137
આધુનિક વિશ્લેષણ 103
આર્કિમિડિઝ પૂર્વધારણા 105
ઇકોલ નોર્મલ 69
ઇકોલ નોર્મલ સુપીરિયુરે 151
ઇકોલ પોલિટેકનિક 105, 118
ઇડયુન્ડ હેલી 62
ઇલિપ્ટિક ફન્કશન 123
ઉર્ધ્વ સરવાળા 128
એકટા ઇરૂડિટોરમ 31, 77
એનાલીટીકલ મીકેનીક્સ 108
એનાલ્સ ઑફ મેથેમેટીક્સ 17
એન્ડ્રુ વાઇલ્સ 17
એરિથમેટિકા ઇન્ફિનિટોરિયમ 30
એરિસ્ટોટલ 3
$\in$ અને δ 3, 120
ઓઇલર 89
ઓક્સફર્ડ યુનિવર્સિટી 42
ઓરિજિન ઑફ સ્પીશીઝ 70
કલનગણિતનાં પુસ્તકો 92
કલનગણિતનું પ્રથમ સંશોધન પેપર 32
કાર્ટીસિઅન વિજ્ઞાન 74
કિલ્કીની કૉલેજ 100
કેપ્લરના નિયમો 63
કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટી 42, 58, 66
કેલ્ક્યુલસ 155
કેલ્ક્યુલસ વેરિએશન 103
કેલ્વિનિસમ 95
ક્રમચય સમૂહ 119
કોશી 2, 48, 107, 113, 118
ક્ષેત્રફળ 7, 143, 159
ખગોળશાસ્ત્ર 41
ગતિવિજ્ઞાન 62
ગુરુનો ગ્રહ 64
ગેલિલીયો 3, 160
ગોલ્ડબાક 85
ગ્રેન્થેમ 41
ચાર્લ્સ એન. વિશ 165
ચાર્લ્સ ડાર્વિન 70
જેકોબ-I 73
જોહ્‌ન આર્બુથનોટ 64
જોહ્‌ન વાલિસ 30, 68
જોહાન્નીસ I 73, 77
ટંકશાળ 64
ટુરિન યુનિવર્સિટી 120

ટૂલૂઝ 19
ટેઇલર શ્રેઢી 45
ટોટો ક્રોન 103
ટ્રિનિટી કૉલેજ 100
ડિરિચ્લેટ વિધેય 12, 130, 131, 135, 142, 145
ડી આર્લમ્બર્ટ 103, 107, 113, 114
ડેકાર્ટ 1, 19, 20, 43
ડેનિઅલ-I 74, 83
તત્ત્વજ્ઞાન 137
દ્રવ્ય ગતિ વિજ્ઞાન 91
ધ એનાલીસ્ટ 100
ધર્મશાસ્ત્ર 74, 137
નિકોલાસ III 83
નિમ્ન સરવાળા 128
નેપોલિયન બોનાપાર્ટ 102, 109, 110, 118
પરિવૃત્ત બિંદુ 6
પાસ્કલનો ત્રિકોણ 45
પીટર ધી ગ્રેટ 84
પૂંછડિયો તારો 70
પેરિસ 108
પ્રકાશશાસ્ત્ર 17, 41
પ્રિન્સિપિયા 62
પ્રિસ્ટન યુનિવર્સિટી 17
પૃશ્યિ 94
ફર્મા 1, 17
ફર્માનું છેલ્લું પ્રમેય 17
ફ્લક્સિઓન 49
ફ્લુઅન્ટ 49
ફૂરિયર શ્રેઢી 138
ફ્રાન્સની ક્રાન્તિ 109
ફ્રેન્ચ અકેડેમી 84
ફ્રેન્ચ અકેડેમી ઑફ સાયન્સિસ 108
ફ્રેડરિક ધી ગ્રેટ 94
ફ્રેડરિક બર્નહાર્ડ રીમન 131, 136
બર્કલી જ્યોર્જ 2, 99, 114
બર્નૂલિ 73
બર્નૂલિ સમીકરણ 86
બર્લિન 27, 107
બર્લિન અકેડેમી 104
બુધનો ગ્રહ 64
બેસીલ 86
બોયની બર્ગ 28
બ્રુન્સવિક 31
મહત્તમ અને લઘુત્તમ કિંમતો 5, 20, 35
માધવ શ્રેઢી 167
મારક્વિસ ડી લોપિટલ 77
મૂળભૂત પ્રમેય 9, 37
મેઇન્ઝ 28
મેક્લોરીન 103
મેનહટ્ટન પ્રોજેક્ટ 154
મોનેસ્ટરી ઑફ ગ્રાન્ડસેલ્વ 18
યુક્તિભાસ 167
યુનિવર્સિટી ઑફ એલ્ટડોફ 28
યુનિવર્સિટી ઑફ ગોટિન્ગન 138
યુનિવર્સિટી ઑફ પાડુઆ 82
યુનિવર્સિટી ઑફ પોઇટિર્અસ 152
યુનિવર્સિટી ઑફ બેસિલ 74
યુનિવર્સિટી ઑફ રીન્નીસે 152
યુરેનસ ગ્રહ 96

રજ્જુ વક્ર 82
રશિયન અકેડેમી 90
રીમન સંકલ 127, 131, 136
રેને દકાર્ત 155
રોબર્ટ ફેઇનમેન 154
રોયલ અકેડમી ઑફ સાયન્સિસ 104
રોયલ સોસાયટી 68
લક્ષ 1, 113
લાઇટિઝગ યુનિવર્સિટી 27
લાઇબ્નિઝ 27
લાગ્રાન્જ 102, 103
લાપ્લાસ 118
લિવરી 77
લિત્રીસ 17
લૂઇસ XVIII 119
લેબેગ સંકલ 148, 151
લેબેગ સંકલન 11
વક્રીભવન 24
વાયર્સ્ટ્રાસ 3, 48, 120, 122
વિકલિત 1
વિશ્વશાસ્ત્ર 69
વુલ્સ થોર્પ 41
વેગેલ 38
વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય 43, 55
શનિનો ગ્રહ 64
શરીર વિજ્ઞાન 91
શુક્રનો ગ્રહ 64
શૂન્યાભિચલો 38, 105, 107
સમગુણોત્તર શ્રેઢી 8
સર આઇઝેક ન્યૂટન 41, 68
સંકર વિશ્લેષણ 119
સંખ્યાશાસ્ત્ર 17
સંગમ ગ્રામ 165
સંભાવનાશાસ્ત્ર 17, 25
સિઝાર 42
સેન્ટ પિટર્સબર્ગ 85, 107
સ્કૉનબોર્ન 28
સ્ટર્લિન્ગ 84
સ્પર્શક 2, 22
હર્મન વોક 154
હામિલ્ટન 24
હેન્રી લેબેગ 151
હ્યુગિન્સ 29, 66

◆ ◆ ◆

એમિ'રિટસ પ્રોફેસર ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ (1936) માધ્યમિક શિક્ષણ : સર્વ વિદ્યાલય, કડી. B.Sc. (ગુજરાત યુનિવર્સિટી, 1957), M.Sc. (એસ. પી. યુનિવર્સિટી, 1959), Ph.D. (યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલી, 1965-69). 1957થી 1965 દરમિયાન વી. પી. સાયન્સ કૉલેજ, વલ્લભવિદ્યાનગર, ગુજરાત કૉલેજ, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી અને એમ. જી. સાયન્સ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં ગણિતશાસ્ત્રના અધ્યાપક તરીકે સેવાઓ આપી. હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી, આર્કેટા (યુ. એસ. એ.)માં ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગમાં 1969થી 2005 સુધી સેવાઓ આપી સેવાનિવૃત્ત થયા. પ્રકાશનો : 'Numerical Analysis' (1994), 'ગણિતની ક્રાંતિઓ' (2013), 'વિશ્વ આપણી નજરે' (2016) તથા તેમના સંશોધન લેખો વિદ્વત્ત જર્નલ્સ 'Computer & Fluids' તથા 'Journal of Computational Physics'માં પ્રકાશિત થયા છે. આ ઉપરાંત ગણિત વિષયક લોકભોગ્ય લેખો 'સુગણિતમ્', 'કુમાર', 'બુદ્ધિપ્રકાશ', 'સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય વૃત્ત' વગેરે સામયિકોમાં પ્રગટ થયા છે. નિવૃત્તિ બાદ વતન શેરથામાં સ્થાયી થયા છે.

સંપર્ક : 'સ્વરાજ', નરસિંહજી મંદિર પાસે,
ઉવારસદ રોડ, મુ.પો. શેરથા, તા. જિ. ગાંધીનગર.
મો. 9824049739

'કલનગણિતની ક્રાંતિઓ અને ક્રાંતિકારો'માં કલનગણિતની વિભાવના અને તેની મહત્તા સમજાવીને કલનગણિતના વિકાસમાં વિવિધ તબક્કાઓમાં ઐતિહાસિક કાળક્રમમાં મહત્ત્વપૂર્ણ પ્રદાન કરનારા મહાન ગણિતશાસ્ત્રીઓનાં પ્રદાન, પ્રત્યેકની આગવી વિશેષતાઓ તથા મર્યાદાઓ રેખાંકિત કરી આપવાની સાથે તેમનાં જીવન વિશે પણ રસપ્રદ પરિચય આપવામાં આવ્યો છે. જેમાં પિયરે ડી. ફર્મા, ગ્રોટફ્રાઈડ વિલહેલ્મ લાઈબ્નિઝ, સર આઈઝેક ન્યૂટન, બર્નૂલી કુટુંબ, લીઓનહાર્ડ ઓઈલર, જ્યોર્જ બર્કલી, જોસેફ લુઈસ લાન્ગ્રાન્જ, કોશી અને વાયર સ્ટ્રાસ, બર્નહાર્ડ રીમન અને હેન્રી લેબેગનો સમાવેશ થાય છે. આ પૈકી કેટલાકનાં વિષય ક્ષેત્રો ભિન્ન રહ્યાં હોવા છતાં પણ આ ક્ષેત્રે તેમણે આપેલ નોંધપાત્ર પ્રદાનને કાળજીપૂર્વક તારવી આપ્યું છે. આ સાથે જ કલનગણિતનાં પુસ્તકોના ઇતિહાસમાં સીમાચિહ્ન નીવડેલાં લોપિટોલ અને ઓઈલરનાં પુસ્તકો વિશે પણ ચર્ચા-વિમર્શ કરવામાં આવ્યો છે. ગ્રંથાન્તે ઉપયોગી 5 પરિશિષ્ટો અને આ પૈકી 'કેરાલાની ગણિત અને ખગોળની શાળા' વિશેના પરિશિષ્ટમાં પ્રત્યેક ભારતીય માટે ગર્વરૂપ બની રહે તેટલો સંતર્પક પરિચય કરાવવામાં આવ્યો છે. અપેક્ષા બની રહે છે કે ગુજરાતી ભાષામાં પ્રસ્તુત વિષયક પ્રથમ વખત પ્રકાશિત થતું આ પુસ્તક ગણિતશાસ્ત્રના શિક્ષકો, ઉપરાંત સવિશેષતઃ સંશોધકો અને વિદ્યાર્થીઓ માટે ઉપકારક બની રહેશે.

સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળ
કડી ગાંધીનગર

9788195420339
₹ 250