કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી : 1

ગણિતની ક્રાન્તિઓ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય
ગાંધીનગર

એમિ'રિટસ પ્રોફેસર ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ કૃત 'ગણિતની ક્રાન્તિઓ' વિશેના આ પુસ્તકમાં ભૂમિતિ અને ઍલ્જિબ્રામાં શું નવું થયું છે અને કઈ રીતે થયું છે તે ઉપરાંત હાલમાં નવું વિજ્ઞાન કેઑસ (Chaos) ઊભું થયું છે તેનો પણ પરિચય આપ્યો છે.

યુક્લિડના પાંચમા ગૃહિતસિદ્ધાંતમાં ફેરફાર કરતાં મળતી નવી ઉપવલયી અને અતિવલયી ભૂમિતિઓ તથા ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ જેણે કમ્પ્યૂટર રસિકોને અણમોલ આનંદ આપ્યો છે તે તેમ જ દ્વિઘાતી, ત્રિઘાતી અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણોનાં બીજોનાં સૂત્રો આપ્યાં છે. પંચઘાતી સમીકરણના બીજાનું સૂત્ર ન હોય તે સ્વીકારવું અઘરું છે. ગાલોઆનું આ દિશાનું કામ અને પ્રમેય પણ અહીં છે.

કમ્પ્યૂટરના આગમનથી વિજ્ઞાનની પ્રગતિનાં અગત્યનાં ઉદાહરણો લૉજિસ્ટિક સમીકરણ અને લૉરેન્ઝ સમીકરણોના ઉકેલો અને આ ઉકેલોમાં કેઑસ છે તે આપ્યા છે. આ ઉકેલોમાંથી મળતી ફાઈગનબૉમ સંખ્યાઓ અને પ્રયોગોમાંથી મળતી ફાઈગનબૉમ સંખ્યાઓની સરખામણી પણ કરવામાં આવી છે.

માધ્યમિક શાળાના શિક્ષકો અને કૉલેજોના અધ્યાપકો માટે આ પુસ્તક ઉપયોગી ગણાય.

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી : 1

ગણિતની ક્રાન્તિઓ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
ઈમે'રિટસ પ્રોફેસર ઑફ મેથેમેટિક્સ
હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી
આર્કેટા, કેલિફોર્નિયા 95521

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય
ગાંધીનગર

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી : 1

ગણિતની ક્રાંતિઓ

Ganitni Krantio

by Vitthalbhai A. Patel
Published by Kadi Sarva Vishwavidyalaya
Gandhinagar-382016

© લેખકના

પ્રથમ આવૃત્તિ, 2013

કિંમત : ₹ 150

પ્રકાશક :
કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય,
સેક્ટર 15, ગાંધીનગર-382016

મુદ્રક :
ભગવતી ઑફસેટ
સી/16, બંસીધર એસ્ટેટ, બારડોલપુરા, અમદાવાદ – 380 004

ગુજરાત ગણિતમંડળના
પાયદળના સૈનિકો અને
ગુજરાતના શિક્ષકોને
જેમણે વિદ્યાર્થીઓમાં અને સામાન્ય પ્રજામાં ગણિતની
જ્યોત ઝગમગતી રાખી છે તેમને

સ્નેહપૂર્વક અર્પણ

કવિતા લખવામાં જેટલું ગૌરવ છે,
એટલું જ ગૌરવ ખેતર ખેડવામાં પણ રહેલું છે.

બુકર ટી. વોશીંગ્ટન

પ્રાક્કથન

સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળ, કડી-ગાંધીનગર દ્વારા સંચાલિત 'કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય' ગાંધીનગર (2007) ની સ્થાપના પાછળનો મૂળભૂત હેતુ ઉચ્ચશિક્ષણની વિવિધ વિદ્યાશાખાઓમાં અધ્યાપન, સંશોધન અને પ્રકાશનનો રહ્યો છે. સમાજના વિવિધ ઘટકો સાથે અનુબંધ જાળવી રાખવાના હેતુથી સેતુરૂપ 'સર્વ વિશ્વ વિદ્યાલય-વૃત્ત' નું વર્ષ 2011 થી દ્વિમાસિક ધોરણે તથા Journal of Science and Technology તથા Journal of Humanities and Social Sciences નું પણ નિયમિત રીતે વર્ષ 2010 થી પ્રકાશન કરવામાં આવી રહ્યું છે. હવે, 'કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય પ્રકાશન શ્રેણી (Kadi Sarva Vishwavidyalaya Publication Series)' ના પ્રથમ પ્રસૂન અંતર્ગત ઈમે'રિટસ પ્રોફેસર ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ (હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી, આર્કેટા, કેલિફોર્નિઆ, યુ.એસ.એ.) કૃત **'ગણિતની ક્રાન્તિઓ'** નું પ્રકાશન કરતાં પ્રસન્નતા અનુભવું છું.

'ગણિતની ક્રાન્તિઓ' સાચા અર્થમાં વિચારોની ક્રાન્તિઓ છે. માધ્યમિક શાળાના શિક્ષકો અને કૉલેજોના અધ્યાપકો માટે તો આ પુસ્તક જરૂરી ગણાય. ગુજરાતની ગણિતપ્રિય પ્રજા આ પુસ્તકનો બરાબર ઉપયોગ કરશે તેવો શ્રદ્ધાભાવ સેવું છું.

ગાંધીનગર
તા. 26 નવેમ્બર, 2012

વલ્લભભાઈ એમ. પટેલ
પ્રેસિડેન્ટ
કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલય
ગાંધીનગર

પ્રાસ્તાવિક

ગણિતની ક્રાન્તિઓ એ સૌમ્ય બાબત છે. સામસામે લશ્કરો લડતાં નથી અને બંદૂકો પણ નથી. આના સમાચાર પહેલા પાનાને બદલે જ્યાં જગ્યા મળી ત્યાં નાના સમાચારની વાર્તારૂપે અપાય છે. ઘણીબધી ક્રાન્તિઓ ગણિતમાં થઈ, પણ લેખકની આવડતના અને જગ્યાના અભાવે લેખકને યોગ્ય લાગતી ક્રાન્તિઓ જ અહીં આપવામાં આવી છે. ક્રાન્તિઓ વિષેનું પુસ્તક લખવાનો આશય આપણા માધ્યમિક શાળાના વિદ્યાર્થીઓને માધ્યમિક શાળા પૂરી કર્યા પછી ભૂમિતિ અને ઍલ્જિબ્રામાં શું નવું થયું છે અને કઈ રીતે થયું છે તે જણાવવાનો છે. આ ઉપરાંત હાલમાં નવું વિજ્ઞાન કેઑસ (Chaos) ઊભુ થયું છે તેનો પરિચય આપવાનો પણ છે. આશા રાખું કે ગણિતના રસિકોને ગણિતના નવા નવા વિચારો કરવાની ગણિતશાસ્ત્રીઓની રીત પ્રેરણારૂપ બને.

જાદુ કે દૈવની આડકતરી ખલેલ વગર વિશ્વ અને તારાઓ નિયમિત કાયદા પ્રમાણે વર્તે છે તેવો, ઈ.સ. પૂર્વે 600 માં તદ્દન નવો અને ક્રાન્તિકારી વિચાર આપનાર થેલેસથી શરૂ કરીએ. ભૂમિતિના વિધાનને અનુભવની હકીકતથી કે સાચું દેખાય છે તે માટે સાચું માનવાને બદલે દલીલોથી સાચું બતાવવાનો પહેલો પ્રયત્ન કરનારા પણ થેલેસ જ હતા. પાયથાગોરસના પ્રમેયથી આપણે બધા પરિચિત છીએ. તેમણે પણ પૂર્વધારણા આપવાનો મોટો ક્રાન્તિકારી વિચાર આપેલો. ઘણાબધા ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ યુક્લિડિયન ભૂમિતિ જે આપણે બધા જાણીએ છીએ તે વિકસાવવામાં ફાળો આપ્યો છે. યુક્લિડિયન ભૂમિતિ જ્યાં લખાઈ તે એલેક્ઝાન્ડ્રીઆનો અને એલિમેન્ટ્સનાં પુસ્તકોનો પરિચય ન અપાય તો કંઈક અધૂરું લાગે. આથી ગ્રીક સંસ્કૃતિ, એલેક્ઝાન્ડ્રીઆ અને એલિમેન્ટ્સ વિષે પહેલા અને બીજા પ્રકરણમાં આપ્યું છે.

યુક્લિડના પાંચ ગૃહિત સિદ્ધાંતો (Postulates) છે, જેવા કે, (1) કોઈ બિંદુથી બીજા કોઈ બિંદુ સુધી સુરેખા દોરી શકાય. આવો જ પાંચમો ગૃહિત સિદ્ધાંત :

બે સુરેખા ઉપર પડતી સુરેખા જો કોઈ બાજુએ એવા ખૂણા બનાવતી હોય કે જેમનો સરવાળો 180^o થી ઓછો હોય, તો તે બાજુએ આ બંને સુરેખાઓને અનંત સુધી લંબાવવામાં આવે તો તેઓ મળે છે. (આકૃતિ 2.1.1)

આ પાંચમો ગૃહિત સિદ્ધાંત સદીઓ સુધી વાદવિવાદનું કારણ રહ્યો છે. આના તુલ્ય પ્લેફરનો સિદ્ધાંત :

રેખા l ઉપર ન હોય તેવા કોઈપણ બિંદુ P માંથી રેખા l ને સમાંતર અનન્ય

રેખા m દોરાય.

આ સિદ્ધાંત આખરે આપણે નક્કી કર્યો છે, તો આપણે બદલીએ અને જોઈએ કે યુક્લિડ ભૂમિતિથી કેટલો ફેર પડે છે. પહેલી રીત : રેખા l ઉપર ન હોય તેવા કોઈપણ બિંદુ P માંથી રેખા l ને એક કરતાં વધારે સમાંતર રેખાઓ એક જ સમતલમાં દોરી શકાય છે.

આ સિદ્ધાંત લેતાં જે નવી ભૂમિતિ મળે તેને આપણે અતિવલયી ભૂમિતિ (Hyperbolic Geometry) તરીકે ઓળખીએ છીએ. અતિવલયી ભૂમિતિ ત્રીજા પ્રકરણમાં આપી છે. આપણે સમજીએ તેવો મોટો ફેર અતિવલયી ભૂમિતિના ત્રિકોણોના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o થી ઓછો છે. પૉઇનકેરે આ ભૂમિતિનો સરળ નમૂનો આપેલો. એ પણ પ્રકરણ ત્રણમાં આપ્યો છે.

બીજી રીત :

જો બિંદુ P રેખા l ઉપર ન હોય તો બિંદુ P માંથી રેખા l ને સમાંતર રેખા દોરી ન શકાય.

આ સિદ્ધાંત સ્વીકારતાં પહેલાં ઘણાબધા પાયાના સિદ્ધાંતોમાં ફેરફાર કરવા પડ્યા તે પ્રકરણ ચારમાં આપ્યા છે. આ સિદ્ધાંતના કારણે જે નવી ભૂમિતિ ઊભી થઈ તે ઉપવલયી ભૂમિતિ (Elliptic Geometry) તરીકે ઓળખાય છે. આ ભૂમિતિમાં બનતા ત્રિકોણોના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o થી વધારે છે.

કુદરતમાં મળતા ઘણા આકારો જેવા કે, ફૂલકોબી (Cauliflower) આપણી દર્શાવેલી કોઈ ભૂમિતિ વર્ણવી ન શકે. કમ્પ્યૂટરની મદદથી નવી વિકસેલી ભૂમિતિ ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ વર્ણવી શકે છે, જે પ્રકરણ પાંચમાં આપી છે.

દ્વિઘાતી સમીકરણોનાં બીજોનાં સૂત્રો સરળતાથી વાપરીને દ્વિઘાતી સમીકરણનાં બીજો મેળવી શકાય છે. આ માધ્યમિક શાળાના બીજગણિતનો અગત્યનો ભાગ છે. સ્વાભાવિક છે કે ત્રિઘાતી, ચતુર્ઘાતી, પંચઘાતી વગેરે સમીકરણોના બીજનાં સૂત્રો મેળવવા જોઈએ. ત્રિઘાતી સમીકરણનાં બીજોનાં સૂત્રો પ્રકરણ છ અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણનાં બીજોનાં સૂત્રો પ્રકરણ સાતમાં આપ્યાં છે. પંચઘાતી સમીકરણનાં બીજોનાં સૂત્રો મેળવવા નાના અને મોટા, જુવાન અને વૃદ્ધ, ગણિતશાસ્ત્રી અને સામાન્ય માણસોએ બે સદીઓ સુધી ખૂબ જ પ્રયત્નો કર્યા. આખરે સામાન્ય ગુણાકાર, ભાગાકાર, સરવાળા, બાદબાકી અને n-મૂળ વાપરીને પંચઘાતી કે તેથી વધારે ઘાતી સમીકરણનાં બીજોનાં

સૂત્રો ન હોઈ શકે તે સાબિત થયું. આની સાબિતી આપણે સમૂહ, ક્ષેત્ર, અરૂપ ઍલ્જિબ્રા અને ગાલોઆના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને પ્રકરણ આઠમાં આપી છે. આ સાબિતી આપવાનો આશય જરૂરી ગણિતથી વાચકને પરિચિત કરવાનો છે.

કેઑસ (અંધાધૂંધી) આપણે ઘણીબધી જગ્યાએ જોઈએ છીએ. કમ્પ્યૂટર આવ્યા પછી જ વસ્તીની આગાહી કરતાં લૉજીસ્ટિક સમીકરણના ઉકેલોમાં કેઑસ મળે છે. આથી પ્રકરણ નવમાં લોજિસ્ટીક સમીકરણ અને તેના ઉકેલો આપ્યા છે. આ સમીકરણના અચળ A ની કિંમતો બદલતાં સ્થિર બિંદુઓનું વિભાજન જોવા જેવું છે અને એક અક્ષ ઉપર A અને બીજા અક્ષ ઉપર વસ્તીનો દોરેલ આલેખ પણ જાણવા અને જોવા જેવો છે, જે પ્રકરણ નવમાં આપ્યો છે. લૉજીસ્ટિક સમીકરણમાં નથી વિકલન કે સંકલન, નથી ત્રિકોણમિતિના વિધેયો કે નથી ભૌતિકશાસ્ત્રના નિયમોનો ઉપયોગ. આવા સરળ દેખાતા સમીકરણમાં આટલી બધી માહિતી છે, તે પણ મોટામાં મોટું અને જાણવા જેવું આશ્ચર્ય છે.

વિભાજન સમજવા માટે સ્થિરબિંદુઓ અને તેના વિભાજનનું ગણિત પ્રકરણ 10 માં આપ્યું છે. સાથે સાથે કેઑસ ઓળખવા માટેનો લિયાપુનોવ દર્શક પણ પ્રકરણ 10 માં આપ્યો છે. A ની જુદી જુદી કિંમતોએ થતા વિભાજનનો A ની કિંમતોનો તફાવત સમગુણોત્તર શ્રેણી હોઈને તેનો સમગુણોત્તર અચળ છે, જે ફાઇગનબૉમ $\delta = 4.6692$ તરીકે ઓળખાય છે. આ જ રીતે વિભાજન થતાં આલેખમાં બનતી પંજેટીની પહોળાઈ પણ સમગુણોત્તર શ્રેણી હોઈને તેનો સમગુણોત્તર અચળ છે અને તે ફાઇગનબૉમ $\alpha = -2.5029$ તરીકે ઓળખાય છે. જેમ π, e સર્વસામાન્ય સંખ્યાઓ છે તે જ પ્રમાણે ફાઇગનબૉમ δ અને ફાઇગનબૉમ α પણ સર્વસામાન્ય સંખ્યાઓ છે. જે 1977 એટલે કે, હમણાં શોધાયા છે. પ્રકરણ 11 માં આ સર્વસામાન્ય સંખ્યાઓ ગણી બતાવી છે. આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓના બમણા થવાની શ્રેણી ઘણા પ્રયોગોમાં જોવા મળી છે અને તેના આધારે ફાઇગનબૉમ δ પણ મેળવવામાં આવ્યો છે, જે 4.4 ± 0.1 જે 4.67 થી ખાસ દૂર ન ગણાય. આ પ્રકરણ 11માં આપ્યું છે.

લૉરેન્ઝ સમીકરણોના ઉકેલોમાં પણ કેઑસ અને સ્થિર બિંદુઓનું બમણા થવાનું જોવા મળ્યુ છે જે પ્રકરણ 12 માં આપ્યું છે. પતંગિયાની પાંખો જેવો ઉકેલ પણ આ પ્રકરણમાં આપ્યો છે. લૉરેન્ઝ સમીકરણો કરતાં પણ સરળ રૉસ્સલર સમીકરણોના ઉકેલો પણ આ પ્રકરણમાં આપ્યા છે.

ઘણાબધાની પ્રેરણા અને મદદથી જ આ પુસ્તક લખાયું છે. સૌથી પહેલાં શેલાવી પલ્પ એન્ડ પેપર મિલ્સ, છત્રાલના સ્ટાફનો ખૂબ જ આભારી છું. ત્યાંની ઓફિસમાં

બેઠા બેઠા ઘણું બધું લખાયું છે અને સ્ટાફની ખૂબ જ મદદના કારણે આ બન્યું છે. એટલી જ અગત્યની મદદ મારા મિત્ર શ્રી પ્રહ્લાદભાઈ વ્યાસની (પી. કે. વ્યાસ) છે. અમેરિકાથી ભારત પાછો આવ્યો ત્યારથી જ પ્રહ્લાદભાઈ સુગણિતમ્ માટે લેખોની માગણી કરતા. સુગણિતમ્‌ના લેખોના આધારે જ આ પુસ્તક લખાયુ છે. તેમણે બધા લેખો બરાબર વાંચીને યોગ્ય સુધારા સૂચવેલા. ખરેખર પ્રહ્લાદભાઈની મદદ માટે હું ખૂબ જ ઋણી છું. હું એટલું જરૂરથી કહીશ કે તેમની પ્રેરણા અને મદદ વગર આ પુસ્તક લખાયું ન હોત. તેમની પુત્રી આલ્ફાબેને સરસ ટાઈપ કર્યું અને આકૃતિઓ વગેરે તૈયાર કરીને યોગ્ય રીતે ગોઠવી છે. આ પુસ્તક જે સુંદર દેખાય છે તે તેમની મહેનતના કારણે. આલ્ફાબેનનો ખૂબ જ આભાર. ગુજરાતીની જોડણી અને ગુજરાતી સુધારવા બદલ મારા જૂના મિત્ર પ્રા. ત્રિકમભાઈ પટેલ, પૂર્વપ્રાધ્યાપક, વિવેકાનંદ આર્ટ્સ કૉલેજનો અંતઃકરણપૂર્વક આભાર.

કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલયના પ્રેસિડન્ટ સ્વ. માણેકલાલભાઈ પટેલ અને હાલના પ્રેસિડન્ટ શ્રી વલ્લભભાઈ પટેલનો 'ગણિતની ક્રાન્તિઓ' પ્રસિદ્ધ કરવા માટે ખૂબ જ આભાર. આશા રાખું કે તેમણે મારામાં મુકેલા વિશ્વાસને લાયક મેં મહેનત કરી હોય. કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલયનાં પ્રકાશનો સર્વ વિદ્યાલય, કડીના ઉચ્ચ આદર્શોથી ચઢિયાતાં બને તે માટે અથાગ પરિશ્રમ કરવા માટે અને આ પુસ્તકને પોતાના પુસ્તકથી ય વધારે ગણીને ઘણાં બધાં યોગ્ય સૂચનો કરવા બદલ શ્રી મણિભાઈ પ્રજાપતિ, ડાયરેકટર ઑફ પબ્લિકેશન્સ, કડી સર્વ વિશ્વવિદ્યાલયનો ખૂબ જ આભારી છું. કોઈપણ ભૂલ હોય તો તે મારી બેદરકારીના કારણે. તમારા ધ્યાનમાં ભૂલ આવે તો મને vap1226@yahoo.com દ્વારા જણાવશો તો આપનો ખૂબ જ આભારી થઈશ.

તા. 1-1-2013 **વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ**

જંપ્યા વિના

માનવે તો પુરુષાર્થમાં સતત મચ્યા રહેવાનું છે. કસો કમર, ચલાવો મજલ. મુકામની દિશામાં બે ડગ તો ભરો.

જે પ્રયત્નશીલ છે, તે અથડાતો-પછડાતો પણ છેવટે પોતાના અસલ મુકામે પહોંચે છે. વચ્ચે કેવી ભૂલો થઈ, પતનો થયાં, એ મોટો સવાલ નથી; માણસ પાછો ઊભો થઈ જાય અને ફરી મજલ કાપવા માંડે, એનું મહત્ત્વ છે. સતત પ્રયત્ન કરતો રહે તો માણસ અંતે જીવનસાફલ્ય પામે જ છે.

"ઉતાવળ વિના, પરંતુ ક્ષણ એક જંપ્યા વિના"

ઉમાશંકર જોશી

અનુક્રમણિકા

1. ગ્રીક સંસ્કૃતિ

1.0 પ્રાસ્તાવિક 1

1.1 થેલેસ અને પાયથાગોરસ 2

1.2 ઍલેક્ઝાન્ડ્રિઆ 6

1.2.1 યુક્લિડ અને એલિમેન્ટ્સ 11

1.2.2 આર્કિમિડિઝ 13

1.2.3 હાઈપૅશ્યા 16

1.2.4 ખેલ ખલાસ !! 17

2. યુક્લિડીઅન ભૂમિતિ

2.0 પ્રાસ્તાવિક 21

2.1 એલિમેન્ટ્સ 22

2.2 પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત 26

3. અતિવલયી ભૂમિતિ

3.0 પ્રાસ્તાવિક 32

3.1 સમાંતર રેખાઓ 34

3.2 ઓમેગા ત્રિકોણો 38

3.3 ત્રિકોણો 43

3.4 પોઈન્કેરની સૃષ્ટિ 44

4. ઉપવલયી ભૂમિતિ

4.0	પ્રાસ્તાવિક	49
4.1	ઉપવલયી ભૂમિતિના ગુણધર્મો	51
4.2	ઉપસંહાર	54

5. ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ

5.0	પ્રાસ્તાવિક	56
5.1	સિરપિન્સ્કિ ગાસ્કેટ	57
5.2	વૉન કોશ આલેખ	59
5.3	જુલિયા ગણો	62
5.4	મેન્ડેલબ્રોટ ગણ	68
5.5	પરિમાણ	75
5.6	કેન્ટર ગણ (Cantor Set)	79

6. દ્વિઘાતી અને ત્રિઘાતી સમીકરણો

6.0	પ્રાસ્તાવિક	81
6.1	દ્વિઘાતી સમીકરણ	82
6.2	ઉદાહરણ	83
6.3	ત્રિઘાતી સમીકરણ	83
6.4	ઉદાહરણ	87

7. ચતુર્ઘાતી સમીકરણ

7.1	ચતુર્ઘાતી સમીકરણ	89
7.2	ઉદાહરણ	91

8. પંચઘાતી સમીકરણ

8.0 પ્રાસ્તાવિક 93
8.1 ગાલોઆ સમૂહ અને ક્ષેત્રો 98
8.2 ગાલોઆ પ્રમેય અને બીજનાં સૂત્રો 103
8.3 ઉદાહરણ 108

9. લોજિસ્ટીક સમીકરણ અને તેના ઉકેલો

9.0 પ્રાસ્તાવિક 111
9.1 લૉજિસ્ટીક સમીકરણ 113
9.2 આબેહૂબ ચિત્ર 119
9.3 કેઑસ (અંધાધૂંધી) 129

10. સ્થિર બિંદુઓ અને તેનાં વિભાજનો

10.0 પ્રાસ્તાવિક 132
10.1 સ્થિર બિંદુઓનું વર્ગીકરણ 133
10.2 બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ 137
10.3 દરેક વખતે બમણાં થતાં સ્થિર બિંદુઓ 142
10.4 સ્પર્શક વિભાજન 143
10.5 લિયાપુનોવદર્શક 149

11. ફાઈગનબોમ સંખ્યાઓ અને પ્રયોગો

11.0 પ્રાસ્તાવિક 155
11.1 સર્વસામાન્ય ખાસિયત અને U શ્રેણી 155
11.2 ફાઇગનબૉમ સંખ્યાઓ 157
11.3 સ્વ-સમાનતા 162
11.4 પ્રયોગો 164

12. લોરેન્ઝ અને રોસ્સલર સમીકરણો (Lorenz and Rössler Equations)

12.1 લૉરેન્ઝ સમીકરણો 167

12.2 સ્થિરબિંદુઓ અને તેમની સ્થિરતા 168

12.3 ઉકેલો 172

12.4 રૉસ્સલર સંહતિ

વાઙમય સૂચિ 186

પરિશિષ્ટ

A-1 સમૂહ 187

B-1 ક્ષેત્ર 191

સૂચિ 194

પ્રતાપવંશી

અમારે એક મોતીભાઈ ડોસા હતા. 1930 ની લડતમાં બીજા ઘણાને પકડ્યા, પણ એમને રાખી દીધા. એક દિવસ એ પત્રિકા વાંચતાં પકડાયા. પોલીસવડાને એની વૃદ્ધાવસ્થા દેખી દયા આવી. એના પરનો ખટલો રોળી-ટોળી નાખવા માટે પૂછ્યું : "કેમ ડોસા, આ પત્રિકા તો તમને કોઈએ મોકલી હતી ને ?" ડોસાએ જવાબ દીધો : "શું કહો છો ? મોકલે? કોઇક મને મોકલે ? શી વાત કરો છો ! હું તો રીતસરનો એનો ગ્રાહક છું. હું, સાહેબ, આજકાલનો નથી - 1922 થી સત્યાગ્રહી છું." એમ ગુનો કબૂલ કરી જેલમાં ગયેલા.

બહાર આવ્યા પછી જમીનો તો ઝૂંટવાઈ ગયેલી. પોતે વૃદ્ધ ને જીર્ણ બનેલા. અમે એમને મદદ આપવા કહ્યું ત્યારે એ રોષ કરીને બોલી ઊઠેલા કે, "હું મદદ લઉં ! હું પારકે પૈસે નિર્વાહ કરું ! મને જાણો છો ? હું તો રાણા પ્રતાપનો વંશજ છું !"

દૈવ જાણે શાથી એમણે પોતાને પ્રતાપવંશી કહ્યા. પણ એ મોતી ડોસાની તદ્દન બેહાલી વચ્ચે પણ એમના આવા અરમાનથી એની કુલીનતા પ્રકાશી ઊઠી. એને ઘેર સારાવાળાએ કન્યા આપી, ને એની કન્યા સારાવાળાએ રાખી.

રવિશંકર વ્યાસ (મહારાજ)

પ્રકરણ 1

ગ્રીક સંસ્કૃતિ

1.0 પ્રાસ્તાવિક

માટીનું કદ માપવા કે જમીનનું ક્ષેત્રફળ ગણવા કરતાં ગણિત કંઈક વધારે છે તેનું સૌથી પહેલું ભાન આશરે 2500 વર્ષ પહેલાં વેપારીમાંથી તત્ત્વજ્ઞાની બનેલા ગ્રીક થેલેસને (Thales) થયેલું. આના કારણે પાયથાગોરસે ઘણી શોધો કરેલી અને આખરે યુક્લિડે એલિમેન્ટ્સ લખ્યાં. આ જ સમયે જાણે કે દુનિયાભરમાં જ્ઞાનની જ્યોત પ્રગટી હોય તેમ લાગે છે. એ જ સમય દરમિયાન ઈ.સ. પૂર્વે 560 માં ભારતમાં સિદ્ધાર્થ ગૌતમ બુદ્ધનો જન્મ થયો અને ચીનમાં ઈ.સ. પૂર્વે 551માં કનફુસિયસનો (Confucious) જન્મ થયો. આ જ સમયે ગ્રીસના સુવર્ણયુગની શરૂઆત થઈ.

બેબીલોનમાં (હાલનું સીરિયા) પાકી માટીની તકતી ઉપરનું લખાણ કે ઇજિપ્તમાં પેપીરી (Papyrii) ઉપરનું લખાણ ઐતિહાસિક પુરાવા તરીકે ગણી શકાય. આવો કોઈ પુરાવો ગ્રીક સંસ્કૃતિના ભૂમિતિમાં આપેલા ફાળા માટે નથી. ગ્રીક ભાષાની નાજુક હસ્તપ્રતો રાજકીય અને સામાજિક ઊથલપાથલમાં બચી નથી. પણ આ હસ્તપ્રતોની સદીઓ પછીની નકલો અને ભાષાંતર ઉપરથી પુરાણા ગ્રીસ સમયની ભૂમિતિ અને તે સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આપેલા ફાળાની માહિતી ચોક્કસપણે મળે છે.

ભૂ એટલે જમીન કે ધરતી, મિતિ એટલે માપવું. ભૂમિતિ એટલે જમીન માપવી. ભૂમિતિ માટે અંગ્રેજી ભાષામાં જ્યોમેટ્રી (Geometry) શબ્દ વપરાય છે. ખરેખર તે ગ્રીક શબ્દ છે અને ગ્રીક ભાષામાં પણ તેનો અર્થ 'જમીન માપવી' એ જ છે. જૂના જમાનામાં ખેતીવાડી અને નહેરોના માટે જરૂરી લંબાઈ, ક્ષેત્રફળ અને કદ માપવા માટે બેબીલોન અને ઇજિપ્તના માણસો ભૂમિતિનો ઉપયોગ કરતાં. ભૂમિતિને વપરાશના વિજ્ઞાનમાંથી ગણિતની શાખા તરીકે વિકસાવવામાં ઘણાબધા ગ્રીક વિજ્ઞાનીઓએ ઘણીબધી મહેનત કરી છે.

પૂર્વે આઠમી અને સાતમી સદીઓમાં ગ્રીક લોકો આનંદી અને આવડતવાળા, વ્યાપાર અને સંશોધનમાં ઉત્સાહી, દ્રષ્ટિવિષયક કલામાં આવડતવાળા અને આ ઉપરાંત માનવ અનુભવ અને લાગણીને ખૂબ જ સ્પષ્ટપણે કાવ્યમાં પ્રદર્શિત કરનારા હતા.

ઈ.સ. 750 પૂર્વેથી 650 પૂર્વે વચ્ચે આપણાં મહાકાવ્યો રામાયણ અને મહાભારતની જેમ જ ગ્રીક ભાષામાં સુપ્રસિદ્ધ મહાકાવ્યો ઈલિયડ (Iliad) અને ઓડીસી (Odyssey) લખાએલાં. ફક્ત આટલું જ હોત તો પણ પુરાણા માણસોમાં આપણે તેમનો અભ્યાસ કરવો પડત. તેમની સિદ્ધિઓ કલા, સાહિત્ય, ગણિત, ખગોળશાસ્ત્ર, વૈદકશાસ્ત્ર અને શાસનતંત્રમાં પણ એવી જ હતી, પણ સૌથી વધારે સિદ્ધિ તત્ત્વજ્ઞાનમાં હતી. ફિલોસોફી (Philosophy) એ ગ્રીક શબ્દ છે અને તેનો અર્થ છે : 'અસામાન્ય જ્ઞાન માટે ભક્તિ'. સૉક્રેટિસ (Socrates 469-399 પૂર્વે), પ્લેટો (Plato 427-347 પૂર્વે) અને એરિસ્ટોટલ (Aristotle 384-322 પૂર્વે) ખૂબ જ જાણીતા તત્ત્વજ્ઞાનીઓ હતા.

પ્લેટો એથેન્સમાં પૈસાદાર કુટુમ્બમાં જન્મેલા. જિંદગીની શરૂઆતમાં પેલોપોનેસિયન (Peloponnesian) લડાઈ ચાલતી હોઈને પ્લેટો ઘોડાદળમાં જોડાયેલા. વીસ-પચીસ વર્ષના હતા ત્યારે સૉક્રેટિસનાં સંપર્કમાં આવેલા અને તેની અસર તેમના ભણતર અને જીવન ઉપર ખૂબ જ થયેલી. ઈ.સ. પૂર્વે 388માં તેમણે વિદ્યાપીઠની સ્થાપના કરી અને તે વિદ્યાપીઠના દરવાજા ઉપર 'જે માણસ ભૂમિતિ ન જાણતો હોય તે દાખલ ન થાય (Let no man ignorant of geometry enter)' કોતરેલું હતું. આ વિદ્યાપીઠને ઈ.સ. 529માં બંધ કરવામાં આવી. ગ્રીક તત્ત્વજ્ઞાની તરીકે પ્લેટો ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ હતા. આ વિદ્યાપીઠમાં ઘણાબધા તે સમયના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રીઓ શીખવતા.

1.1 થેલેસ (Thales) અને પાયથાગોરસ (Pythagoras)

હાલના તુર્કસ્તાનમાં પશ્ચિમ કિનારે આશરે ઈ.સ. પૂર્વે 640માં મિલેટસ (Miletus) નામના ગ્રીક શહેરમાં થેલેસનો જન્મ થયેલો. દુનિયાના સૌથી પહેલા વૈજ્ઞાનિક કે ગણિતશાસ્ત્રી થેલેસ હતા તેમ કહી શકાય. સુવર્ણયુગના ગ્રીક લોકોને નવું નવું શીખવાનું ખૂબ જ ગમતું તેવું થેલેસનું પણ હતું. બેબીલોનની (હાલનું સીરિયા) મુસાફરી દરમિયાન વિજ્ઞાન અને ખગોળશાસ્ત્રનો તેમણે અભ્યાસ કર્યો. ઈ.સ. પૂર્વે 585ના સૂર્યગ્રહણની સાચી આગાહી કરવા બદલ પ્રખ્યાત થયેલા. ઇજિપ્તમાં પણ ઘણો વખત રહેલા અને પિરામીડની ઊંચાઈ ભૂમિતિની મદદથી મેળવેલી. ઇજિપ્તના રાજા એમેસિસ (Amasis) તેમની બાજુમાં ઉભેલા હતા, અને જે સમયે તેમનો પડછાયો તેમની ઊંચાઈ જેટલો થયો તે જ સમયે પિરામીડના પડછાયાની લંબાઈ માપીને પિરામીડની ઊંચાઈ કહી શકેલા. થેલેસની બુદ્ધિથી રાજા એમેસિસ ખૂબ જ પ્રભાવિત થયેલા. એકરૂપ ત્રિકોણોનો ઉપયોગ કરીને કિનારાથી વહાણ કેટલું દૂર છે તે પણ ગણી બતાવ્યું. ઇજિપ્તમાં તેમણે પ્રતિષ્ઠા

મેળવેલી.

બે આકૃતિઓને સરકાવીને અને ફેરવીને એકબીજી બરાબર છે તેમ બતાવી શકાય, તો તે આકૃતિઓ એકરૂપ છે તે વિચાર તેમણે આપેલો. ભૂમિતિના વિધાનને અનુભવની હકીકતથી કે સાચું દેખાય છે તે માટે સાચું માનવાને બદલે દલીલોથી સાચું બતાવવાનો પહેલવહેલો પ્રયત્ન કરનાર થેલેસ હતા. પ્રોકલસ (Proclus) ની 'કોમેન્ટરી ઑન ધી ફર્સ્ટ બુક ઑફ યુક્લિડ (Commentary on the First Book of Euclid)' ના પુસ્તકના નાના ભાગ 'ધી યુડેમિયન સમરી (The Eudemian Summary)' માં વર્તુલનો કોઈપણ વ્યાસ વર્તુલના બે સરખા ભાગ કરે છે તે દલિલથી સાબિત કરવાનું માન થેલેસને આપે છે.

જાદુ કે દૈવની આડકતરી ખલેલ વગર વિશ્વ અને તારાઓ નિયમિત કાયદા પ્રમાણે વર્તે છે તેવો તે સમયે તદ્દન નવો અને ક્રાન્તિકારી વિચાર તેમણે આપેલો. ગ્રીસમાં તેમના સમકાલીનોએ દુનિયાના ડાહ્યામાં ડાહ્યા સાત માણસોમાંના થેલેસ એક છે તેવું બિરુદ આપેલું. જ્યારે થેલેસ વૃદ્ધ થયા ત્યારે, લાંબા વાળવાળો, ગ્રીસ પહેરવેશમાં નહિ, પણ જૂના જમાનાના હિપ્પી (Hippy) પહેરવેશમાં એક વીસ વર્ષનો છોકરો તેમને મળવા આવ્યો. આ બંને વચ્ચે શી વાતચીત થઈ તેનો ખ્યાલ નથી, પણ આ જુવાન ઉપર થેલેસનો ખૂબ જ મોટો પ્રભાવ પડ્યો. આ જુવાન તે બીજું કોઈ નહિ, પણ પાયથાગોરસ હતા. થેલેસે જુવાનીમાં થોડોક સમય ઇજિપ્તમાં કાઢેલો, આથી તેમણે પણ પાયથાગોરસને તેમ કરવા જણાવ્યું.

હાલના તુર્કસ્તાનના પશ્ચિમ કિનારથી બે કિલોમીટર દૂર આવેલ સમોસ (Samos) ટાપુ ઉપર ઈ.સ. પૂર્વે 596માં પાયથાગોરસ જન્મેલા. એવું કહેવાય છે કે, તેમના પિતા નેસારચસને (Mnesarchus) સમોસમાં દુષ્કાળના સમયમાં અનાજ આયાત કરવા માટે નાગરિક બનાવેલા. પાયથાગોરસ તેમના પિતાની સાથે નાનપણમાં સીરિયા, ઇટાલી, ગ્રીસ વગેરે જગ્યાએ ફરેલા. પાયથાગોરસ નાનપણથી જ અસાધારણ પ્રતિભાસંપન્ન હતા અને નાનપણથી જ તેમને તત્ત્વજ્ઞાનમાં રસ હતો. જ્યારે પાયથાગોરસ અઢાર વર્ષના થયા ત્યારે તેમના પિતાનું નિધન થયું. પાયથાગોરસના કાકાએ તેમને થોડાક ચાંદીના સિક્કા અને ઓળખાણપત્ર આપીને પાસેના ટાપુ લેસબોસ (Lesbos) ઉપર ફેરેકિડેસને (Ferekydes 600-500 પૂર્વે) મળવા મોકલ્યા. ફેરેકિડેસે આત્મા અમર છે અને પુનર્જન્મની માન્યતા ગ્રીસમાં ફોનિસિઅન (Phoenician) પુસ્તકોમાંથી અભ્યાસ કરી દાખલ કરી. તે સમયના તે જાણીતા તત્ત્વજ્ઞાની હતા. ફેરેકિડેસ પાસે પાયથાગોરસ બે વર્ષ રહ્યા. પછી થેલેસને મળવા ગયેલા અને તેમની

સલાહ પ્રમાણે ઇજિપ્ત ગયા.

ઇજિપ્તમાં પાયથાગોરસને ઇજિપ્તના ગણિતમાં ન કોઈ કાવ્ય દેખાયું. ઇજિપ્તના ગણિતમાં રેખા એ પિરામિડનું કામ કરનાર મજૂરનું દોરડું; ચોરસ એ ખેતરની સરહદ; અવકાશ (space), માટી કે જમીન હતાં. જ્યારે રેખા પિરામીડની ધાર હોય, ખેતરની ધાર હોય કે કાગડાને ઊડવાનો રસ્તો હોય તે રીતે જોવાનો યશ ગ્રીકોને જાય છે. એકનું જ્ઞાન બીજા માટે વાપરી શકાય. અવકાશ એ ગણિતનું અમૂર્ત વિચારણાક્ષેત્ર પણ હોય તે જાતની વિચારણાનો યશ ગ્રીકોને જાય છે.

ઇજિપ્તમાં પાયથાગોરસ રહસ્યમય પવિત્ર સંઘમાં જોડાઈને ધર્મોપદેશક બનેલા. આના કારણે ઇજિપ્તનાં મંદિરોના પવિત્ર અને ગુપ્ત ઓરડાઓમાં જઈ શકતા. તેમની સાથળ ઉપર સોનેરી નિશાન જન્મથી હતું, તે દૈવી નિશાન તરીકે કોઈ કોઈ વખત બતાવતા. આ કારણે તેમના જેવા પરદેશી માણસને આ માન મળેલું. લગભગ તેર વર્ષ તે ઇજિપ્તમાં રહ્યા. પરશિયનોએ (Persians) ઇજિપ્ત ઉપર હુમલો કર્યો ત્યારે પરશિયનો પાયથાગોરસને કેદી તરીકે હાલના બગદાદ શહેરથી 55 માઈલ દૂર આવેલા બેબીલોન (Babylon) શહેરમાં લઈ ગયા. ત્યાં તેઓ બેબીલોનિયન ગણિત શીખ્યા અને આખરે જેલમાંથી છૂટીને પચાસ વર્ષની વયે સમોસ પાછા આવ્યા.

તેમનું આગમન રોમાંચક હતું. તેઓ વિશિષ્ટ પ્રકારનો સફેદ ઝભ્ભો અને સફેદ લેંઘો પહેરતા. પાયથાગોરસ તત્ત્વજ્ઞાની અને ધર્મોપદેશક પણ હતા. તેમની બોલવાની રીત ખૂબ જ આકર્ષક અને આક્રમક હતી, જે ત્યાંના (સમોસના) તત્ત્વજ્ઞાનીઓથી તદ્દન વિરુદ્ધ પ્રકારની હતી. તદુપરાંત તેઓ તેમના વિષેની કાલ્પનિક અફવાઓને પ્રોત્સાહન આપતા. એક અફવા તો એવી હતી કે, પાયથાગોરસે ઝેરી સાપને કરડીને મારી નાખેલો. તેમને અનુયાયીઓ અને વિદ્યાર્થીઓ જોઈતા હતા, પણ સમોસમાં ઠંડો આવકાર મળતાં તેઓ ગ્રીક કોલોનીના ઇટાલીના ક્રોટોન (Croton) શહેરમાં ગયા.

ક્રોટોનમાં તેમણે ગણિત, તત્ત્વજ્ઞાન વગેરે અંગે વિચારતી અર્ધ ધાર્મિક બંધુભાવ સંસ્થા સ્થાપી, જે 'પાયથાગોરીઅન' નામે ઓળખાય છે. આ બધા શાકાહારી હતા અને તેમનું પોતાનું કંઈ જ ન હતુ. કોઈ કમાતું ન હોઈ તેમને ક્રોટનની પ્રજા, અનુયાયીઓની માલમિલકત ઉપર આધાર રાખવો પડતો. પાયથાગોરસ 'પૃથ્વી ગોળ છે' તે શીખવતા અને આ વિચારને ટેકો આપતા પુરાવા પણ ભેગા કરતા. તેમણે કલ્પના કરેલી કે પૃથ્વીનું તારાઓ સાથે એક જ વિશ્વમાં અસ્તિત્વ છે.

પાયથાગોરીઅનના વિચારો એરિસ્ટોટલ અને પ્લેટોએ તેમની સંસ્થાઓ અને શિક્ષણમાં અપનાવેલા.

પાયથાગોરસ પહેલાં ધારણાની મદદથી ભૂમિતિમાં સાબિતી આગળ વધવી જોઈએ તેવી સમજ ન હતી. પાયથાગોરસ જ પહેલા હતા કે જે ભૂમિતિમાં ધારણાઓ પહેલાં નક્કી કરીને ભૂમિતિના વિકાસમાં માનતા હતા. ધારણાઓ અને તર્કશાસ્ત્ર બંનેની મદદથી સાબિત કરવાનું ગણિતમાં પાયથાગોરસે શરૂ કરેલું.

સંખ્યાઓને 'એકી (odd)' અને 'બેકી (even)' એમ બે ભાગમાં વહેંચનાર પાયથાગોરસ જ હતા. આ ઉપરાંત એક પગલું આગળ જઈને સંખ્યાઓમાં સજીવારોપણ ઉમેરવા 'એકી' સંખ્યાઓને 'નરજાતિ' અને 'બેકી' સંખ્યાઓને 'નારીજાતિ' ની સંખ્યાઓ તરીકે ઓળખતા. સંખ્યાઓને વિચારો સાથે જોડતા. 'એક' ને કારણ, 'બે' ને અભિપ્રાય અને 'ચાર' ને ન્યાય જોડે જોડતા. આના કારણે 'સ્કવેર ડીલ (square Deal)' શબ્દ વપરાય છે.

એક એકમની બાજુના ચોરસનો કર્ણ $\sqrt{2}$ છે. બેબીલોનીઅનોએ $\sqrt{2}$ ની કિંમત છ આંકડા સુધી મેળવેલી, જ્યારે પાયથાગોરસ માટે આ પૂરતું ન હતું. તેમને $\sqrt{2}$ ની ક્ષતિરહિત કિંમત જોઈતી હતી. $\sqrt{2}$ ની કિંમત ઘણા આંકડાઓ સુધી મેળવેલી. આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે. આથી તે નિશ્ચિત આંકડામાં દર્શાવી ન શકાય, એટલે કે પૂર્ણાંક સંખ્યા કે સંમેય સંખ્યાથી $\sqrt{2}$ ને દર્શાવી ન શકાય. પાયથાગોરસ ફક્ત પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને સંમેય સંખ્યાઓ જાણતા હતા. પાયથાગોરસ ગાંજ્યા જાય તેવા ન હોઈને સવાલ પૂછયો કે, $\sqrt{2}$ સંખ્યા છે ? $\sqrt{2}$ ને સંમેય સંખ્યા તરીકે લખી ન શકાય, તેથી $\sqrt{2}$ તેમની નજરે સંખ્યા ન હતી. પાયથાગોરસ સંખ્યાઓને ભૂમિતિની આકૃતિઓ સાથે જોડતા, આથી $\sqrt{2}$ લંબાઈની સુરેખા કોઈ સંખ્યા સાથે જોડી ન શકતા. આવી લંબાઈ માટે પાયથાગોરસે એલોગોન (alogon) શબ્દ વાપર્યો. એલોગોનનો ગ્રીક ભાષામાં અર્થ છે : 'ગુણોત્તર પ્રમાણ નથી' અને બીજો અર્થ છે : 'ના વિષે ન બોલાય'. પાયથાગોરસનો સ્વભાવ ગુપ્ત રાખવાનો હોઈને, તેમના સ્વભાવ પ્રમાણે રસ્તો કાઢ્યો. તેમના અનુયાયીઓને પણ $\sqrt{2}$ ની બાબતમાં કોઈનેય પણ આ વાત ન જણાવવી તેમ તેમણે આદેશ આપ્યો. દુનિયામાં ખૂનો વેર, અદાવત, પૈસા અને રાજકીય કારણે થાય છે, પણ $\sqrt{2}$ ની બાબતમાં ગુપ્તતા ન સાચવવા માટે બંધુસમાજના સભ્ય હિપ્પાસુસનું (Hippasus) ખૂન થયેલું !! જો પાયથાગોરસે $\sqrt{2}$ ના કર્ણ માટે નવા પ્રકારની સંખ્યા ગણી હોત, તો વાસ્તવિક સંખ્યાની શોધ ઘણી સદીઓ પહેલાં થઈ હોત.

એક દિવસ પાયથાગોરસ લુહારની કોઢ પાસેથી નીકળ્યા. એરણ ઉપર જુદા જુદા ઘણના જુદાજુદા સ્વરો સાંભળ્યા. આને એમને વિચાર કરતા કરી દીધા. બંને બાજુ બાંધેલી દોરીના અખતરા કરીને તેમણે ધ્રૂજતી દોરીની લંબાઈ અને તેના સ્વરની તીવ્રતાનો સંબંધ શોધી કાઢયો. બમણી લંબાઈની ધ્રૂજતી દોરીના સ્વરની તીવ્રતા અડધી હોય છે.

ઈ.સ. પૂર્વે 510 માં ક્રોટોનની નજીકના શહેર સિબરિસમાં (Sybaris) પાયથાગોરીઅન અનુયાયીઓ શોધવા ગયેલા, પણ કોઈ કારણસર તેમનું ખૂન થયેલું. જુલમખોર ટેલીસ (Telys) સિબરિસમાં સત્તા ઉપર આવેલા અને તેમના જુલમથી ત્રાસેલા સિબરિસિયનો ક્રોટોન ભાગી આવેલા. ટેલીસે ક્રોટોનને ભાગી આવેલા સિબરિસિયનોને પાછા મોકલવા માગણી કરી. પાયથાગોરસે પાયાનો સિદ્ધાંત તોડયો : 'રાજકારણથી દૂર રહો'. પાયથાગોરસે ક્રોટોનના લોકોને ભાગી આવેલા સિબરિસિયનોને પાછા ન મોકલવા સમજાવ્યા અને તે માની ગયા. બંને શહેરો વચ્ચે લડાઈ થઈ અને ક્રોટોન જીત્યું, પણ થનાર નુકસાન થઈ ગયું. પાયથાગોરસના રાજકીય દુશ્મનો ઊભા થયા અને તેમણે પાયથાગોરસ ઉપર હુમલો કર્યો. પાયથાગોરસ નાસી છૂટયા. એ પછી શું થયું તેની પાકી માહિતી નથી. ઘણા એવું કહે છે કે, પાયથાગોરસે આપઘાત કર્યો. ઘણા એવું કહે છે કે, શાંતિથી સો વર્ષના થયા ત્યાં સુધી જીવ્યા.

હિપ્પોક્રેટસ (Hippocrates)

હિપ્પોક્રેટસ (460 પૂર્વે - 380 પૂર્વે) ચિયોસ (Chios) નામના ગ્રીસ ટાપુમાં જન્મેલા. આ નાનો ટાપુ પાયથાગોરસની જન્મભૂમિ સમોસ ટાપુની નજીક આવેલો છે. આથી શક્ય છે કે એ પાયથાગોરસની અસર નીચે આવ્યા હોય. પાછળની જિંદગી તેમણે એથેન્સમાં ભૂમિતિ ભણાવવામાં કાઢી. ભૂમિતિ શીખવતાં શીખવતાં તેમણે એલિમેન્ટ્સ ઓફ જ્યોમેટ્રી '(Elements of Geometry)' નામનું પુસ્તક તૈયાર કર્યું, જેમાં તેમણે પ્રમેયો એ રીતે ગોઠવ્યા કે જેમાં પાછળના પ્રમેયો આગળના પ્રમેયો ઉપર આધારિત હોય. આ પુસ્તકના આધારે જ યુક્લિડે 'એલિમેન્ટ્સ (Elements)' લખેલાં. આ પુસ્તક પણ ઘણાંબધાં પુસ્તકોની જેમ અદ્રશ્ય થઈ ગયું.

1.2 એલેકઝાન્ડ્રિયા (Alexandria)

આપણા હાલના વિજ્ઞાનયુગની સફળતાનો યશ એલેકઝાન્ડ્રિયા, ઈજિપ્તને ફાળે જાય છે. યુક્લિડે એલિમેન્ટ્સ (Elements), હીરોફીલસે (Herophilus) ઓન

ડિસેકશન્સ (On dissections), ગેલેને (Galen) ઓન એનાટોમિકલ પ્રોસિજર્સ (On anatomical procedures), અને ટોલેમીએ (Ptolemy) અલ્માગેસ્ટ (Almagest) એલેકઝાન્ડ્રિયામાં લખ્યાં. આ પુસ્તકો સદીઓ સુધી ખૂબ જ અગત્યનાં પુસ્તકો ગણાયાં છે અને વિજ્ઞાનનો વિકાસ જે આપણે જોઈ રહ્યા છીએ તે આ પુસ્તકોના કારણે થયો છે. અબ્રાહમ લિંકન, મહાત્મા ગાંધી, મહમદ અલી ઝીણા, નથુરામ ગોડસે અને પન્નાલાલ પટેલ વગેરેને યુક્લિડિયન ભૂમિતિ ભણવી પડેલી. સાન ફ્રાન્સિસ્કો (યુનિ. ઓફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલી અને સ્ટેનફર્ડ યુનિ.), બોસ્ટન (હારવર્ડ યુનિ. અને એમ.આઈ.ટી.), કેમ્બ્રિજ (ન્યુટન), ગોટીન્ગન (Gottengen) (ગૉસ) અને પેરિસની સાથે નવા વિચારોના ફાળા માટે એલેકઝાન્ડ્રિયા ખૂબ જ સરળતાથી હરીફાઈ કરી શકે. ગણિત, ખગોળશાસ્ત્ર, શરીરશાસ્ત્ર, સાહિત્ય અને તત્ત્વજ્ઞાન વગેરેમાં ખૂબ જ અગત્યનો ફાળો આપનાર ગણિતશાસ્ત્રીઓ, ખગોળશાસ્ત્રીઓ, ચિકિત્સકો, લેખકો અને તત્ત્વજ્ઞાનીઓ વગેરે એલેકઝાન્ડ્રિયામાં ભણેલા અને ઘણાં વર્ષો ત્યાં રહેલા.

એલેકઝાન્ડ્રિયા ઈજિપ્તમાં ભૂમધ્ય સમુદ્રના કિનારે આવેલું શહેર છે. એલેકઝાન્ડર (સિકંદર) બાવીસ વર્ષના હતા ત્યારે તેમના પિતા ફિલિપ બીજાનું (Philip II) ખૂન થતાં મેસેડોનિયાના (Macedonia) રાજા બન્યા. આ પછી થોડાક વખતમાં ગ્રીક લોકોએ તેમને પર્શિયા (Persia) (હાલના ઈરાન વિ. ભાગો) ઉપર ચઢાઈ કરવા માટે નેતા બનાવ્યા. ઈજિપ્ત પર્શિયાને ધિક્કારતું હતુ. સિકંદરે પર્શિયનોને ડેર્ડેનેલેસ (Dardanelles) અને એશિયા માઈનર (હાલના તુર્કસ્તાન) આગળ હાર આપેલી, આથી ઈજિપ્ત સ્વેચ્છાપૂર્વક સિકંદરને તાબે થયું. ઈ.સ. પૂર્વે 332 માં સિકંદર ઈજિપ્તની રાજધાની મેમ્ફિસ (Memphis) (હાલના કૈરો (Cairo)) આવ્યા. ત્યાંથી વજનવાહક નૌકાથી નાઈલ નદીમાં થઈને નકશામાં દર્શાવેલા ફારોસ ટાપુ (The Isle of Pharos) આવ્યા. સિકંદરને નવા જીતેલા ઈજિપ્ત અને બીજા દેશો માટે દરિયાકિનારે મેસેડોનિયા, ગ્રીસ વગેરે દેશો જોડે વેપાર કરી શકે તેવી રાજધાનીની જરૂર જણાઈ. જ્યારે ભૂમધ્ય સમુદ્ર અને મેરીઓટીસ (Mareotis) સરોવર વચ્ચેની જગ્યા જોઈ ત્યારે તે જગ્યા ઉપર તેમની કલ્પના મુજબની રાજધાનીનું શહેર બાંધવાની ઇચ્છા થઈ. પ્લેટો અને એરિસ્ટોટલ યુરોપના ખૂબ જ જાણીતા તત્ત્વજ્ઞાનીઓ ગણાય. ભૂમિતિ, નીતિશાસ્ત્ર, રાજ્યવહીવટ વગેરે સિકંદર એરિસ્ટોટલના હાથ નીચે ભણેલા હોઈને સિકંદરને જ્ઞાનની ખૂબ જ કિંમત હતી. સિકંદરની આ શહેરની કલ્પના જૂના જમાનાના વૉલ્ટ ડિઝની (Walt Disney) જેવી હતી, કાળજીપૂર્વક યોજના કરેલ પાટનગર. આ નવી રાજધાની સંસ્કૃતિ, વ્યાપાર અને સરકાર માટેનું મુખ્ય કેન્દ્ર બનવી જોઈએ તેવી તેમની કલ્પના હતી. એ

કલ્પનાને પહોંચી વળવા માટે જીતેલા પ્રદેશોની ભરેલી તિજોરીઓ હતી.

આ શહેરને બે બંદરો છે : એક ભૂમધ્ય સમુદ્રનું અને બીજું મેરિઓટિસ સરોવરનું. આ ઉપરાંત સિકંદરને મેરિઓટિસથી નાઈલ નદી જે લગભગ 32 કિલોમીટર (વીસેક માઈલ) દૂર છે ત્યાં સુધી નહેર ખોદીને એલેકઝાન્ડ્રિયાને દક્ષિણ ઈજિપ્તના અને આફ્રિકાના નાઈલ નદીના બંદરો સુધી જોડી દેવાનો ખ્યાલ હતો. આ રીતે દરિયાઈ માર્ગે અને નાઈલ નદીના માર્ગે આવતાં સર્વે જહાજો એલેકઝાન્ડ્રિયા આવી શકે. સિકંદરે પોતે આ શહેરની જગ્યા નક્કી કરી અને રસ્તાઓ જાતે જ દોર્યા અને કહ્યું કે, આ શહેર એલેકઝાન્ડ્રિયાના નામે ઓળખાશે. રસ્તાઓની દિશા ઉનાળુ પવનની રાખી, કે જેથી ઉનાળામાં દરિયાનો ઠંડો પવન શહેરમાં ફૂંકાતો રહે અને હવા ફરતી રહે. સિકંદરનો ઉત્સાહ એટલો બધો હતો કે જાતે આ વિશાળ રસ્તાઓને કાટખૂણે બીજા વિશાળ રસ્તાઓ આંગળીથી દોરતા. સાથેના લોકો નિશાનીઓ ઉપર ચૂનો નાખતા. ચૂનો ખૂટતાં સૈનિકોના ખાવાનો લોટ લઈને નિશાનીઓ કરતા. પ્લુટાર્ચના લખવા પ્રમાણે સરોવરમાંથી જુદીજુદી જાતનાં મોટાં પક્ષીઓ આવીને બધો લોટ ખાઈ ગયાં. સિકંદરે આને અપશુકન માન્યા, પણ બીજા બધાએ ખાત્રી આપી કે આ શહેર માટે બહુ જ સારા શુકન છે. સિકંદરે તેમના સ્થપતિ ડાઈનોક્રેટેસને (Dienocrates) આ જગ્યાએ યાદગાર બને તેવી ભવ્ય રાજધાની અને ભવ્ય અને વિશાળ રાજમહેલો બાંધવા જણાવ્યું. ડાઈનોક્રેટેસે શહેરની પાકી યોજના તૈયાર કરી અને પછી મુખ્ય ઈમારતો બાંધવાનું શરૂ કર્યું. સિકંદર અકાળે ફક્ત 33 વર્ષની નાની ઉંમરે ઈ.સ. પૂર્વે 323માં અજાણી માંદગીથી એલેકઝાન્ડ્રિયાના બાંધકામ શરૂ થયા પછી નવ જ વર્ષમાં ગુજરી ગયા. સિકંદરના મૃત્યુ પછી જનરલ ટોલેમીએ (Ptolemy) ઈજિપ્તનો ચાર્જ લીધો અને પછી ઈજિપ્તના રાજા બન્યા. તેમના વંશજો ઈજિપ્તની ગાદીએ આવતા ગયા. ટોલેમી- પહેલાના પુત્ર ટોલેમી બીજાના રાજ દરમિયાન પણ બાંધકામ ભરપટે ચાલતું રહ્યું. બાંધકામ શરૂ થયા પછી ત્રણસો વર્ષ પછીનો એટલે કે ટોલેમી વંશના છેલ્લા વંશજ ક્લિઓપેટ્રા (Cleopatra) સમયનો એલેકઝાન્ડ્રિયાનો નકશો આ પ્રકરણના છેલ્લાં પાના 20 ઉપર આપેલો છે. નામ એલેકઝાન્ડ્રિયા છે, પણ જે કંઈ એલેકઝાન્ડ્રિયામાં છે તે ટોલેમી વંશના રાજાઓના કારણે જ. ઈજિપ્તના રાજાઓ ગ્રીક હતા. સામાન્ય રીતે મેસેડોનિયા, ગ્રીસ, ઈટાલી વગેરે દેશોમાંથી નોકરી કે ધંધા માટે તે જમાનામાં દરિયામાર્ગે જહાજોમાં લોકો એલેકઝાન્ડ્રિયા આવતા. તમે ગ્રીસ રાજ્યોના વતની અને ગ્રીક હો તો ઈજિપ્તમાં તમને સરકારી તંત્રનો મોટો ટેકો મળે.

જહાજથી આવતા હોઈએ તો ફારોસ દીવાદાંડીથી (Pharos Lighthouse)

ગ્રેટ હાર્બરમાં (Great Harbour) આવીએ કે તરત જ લીલાંછમ વૃક્ષો અને ઊંચી ભૂશિર પર લોચીઆસ (Lochias) ઉપરના ભવ્ય રાજમહેલો નજરે ચઢતા અને એન્ટીર્‌હોડસ (Antirhodas) ટાપુ પરના રાજમહેલો દેખાતા. આ રાજમહેલો ઈજિપ્તના રાજાઓના હતા અને તેમનાં વહાણો માટે શાહી બંદર હતું. જે પ્રવાસીઓને આકર્ષે છે તે તે એલેકઝાન્ડ્રિયામાં છે : ઘણાં વિશાળ મંદિરો, ભવ્ય રંગભૂમિઓ, ઊંચી ટેકરી પરનું પોસેઈડોનનું ખૂબ જ મોટું વિશાળ મંદીર અને ખાસ તો તેનું હેપ્ટાસ્ટેડીઅન (Heptastadion) સુધીનું વિશાળ બજાર, બજારની દુકાનો અને વખારો. હેપ્ટાસ્ટેડીઅન, ફારોસ ટાપુ અને એલેકઝાન્ડ્રિયાને જોડતો રસ્તો હતો. કુદરતી બંદરને ગ્રેટ હાર્બર અને પોર્ટ ઓફ યુનોસ્ટોસ (Port of Eunostos) માં વહેચતા, માણસોના બનાવેલા આ રસ્તાની લંબાઈ લગભગ 1400 મીટર હતી. વહાણો ગ્રેટ હાર્બરમાંથી પોર્ટ ઓફ યુનોસ્ટોસ કે પોર્ટ ઓફ યુનોસ્ટોસમાંથી ગ્રેટ હાર્બરમાં હેપ્ટોસ્ટેડીઅનના છેડે ખુલ્લા રાખેલા ભાગમાંથી આવજા કરી શકતાં. દુનિયાભરનાં જહાજો અહીંયાં આવતાં. ભારત અને ચીનથી રેશમ અને ચોખા લઈને આવેલાં જહાજો ખાલી થતાં. નાઈલ નદીની ખીણમાંથી આવેલાં મકાઈ અને અનાજ એથેન્સ અને રોમ મોકલવા જહાજોમાં ભરાતાં. આફ્રિકાના નીચેના ભાગમાંથી હાથીદાંત લઈને આવેલાં જહાજો ખાલી થતાં. ભૂમધ્ય સમુદ્રમાં નાહનારાઓ માટે કિનારા ઉપરથી દરિયામાં જવા માટે આરસપહાણનાં પગથિયાં હતાં. શહેરની અંદર મેસેડોનિયન અને અન્ય સૈનિકો માટે છાવણીઓ હતી. રમતગમતો માટે અખાડાઓ અને ક્રીડાંગણો પણ હતાં.

એલેકઝાન્ડ્રિયામાં બધા જ રસ્તાઓ ઘોડાઓ અને રથગાડીઓ માટે વિશાળ હતા, પણ શહેરના બે મુખ્ય રસ્તાઓ કેનોપિક વે (Canopic Way) અને સ્ટ્રીટ ઑફ ધી સોમા (Street of the Soma) ઓછામાં ઓછા સો ફૂટ પહોળા હતા. આ બે વિશાળ રસ્તાઓની બન્ને બાજુએ આરસપહાણના સ્થંભો, બાવલાં, પુરુષ, ઘેટાં વગેરેનાં માથાં અને સૂતા સિંહની પ્રાચીન મિસરની આકૃતિવાળાં પૂતળાં હતાં. ચાર ઘોડાગાડીઓ એક બાજુ એક સાથે ખુશીથી જઈ શકે. આ બંને રસ્તાઓના મિલનસ્થાને ઊભા રહીને જુઓ તો વિશાળ અને સુંદર મકાનોની એક પછી એક હારમાળા દેખાય. આ ઉપરાંત શહેરમાં અંદર આવવાના કે બહાર જવાના દરવાજાઓ સન ગેટ (Sun Gate), મૂન ગેટ (Moon Gate) અને કેનોપિક ગેટ (Canopic Gate) દેખાતા. બીજા ઘણાબધા રસ્તાઓ કેનોપિક વે અથવા સ્ટ્રીટ ઓફ ધી સોમાને સમાંતર હતા. બાજુમાં પેનિયમ (Paneium) માણસની શંકુ આકારની બનાવેલી ટેકરી હતી. આ ટેકરી ઉપર ચઢવાનો રસ્તો ગોળગોળ હતો. ટેકરીની છેક ઉપરથી સુંદર શહેર દેખાતું હતું. કેનોપિક વે ઉપર

પેનિયમથી આગળ જઈએ એટલે ફરવાની કે ઘોડે સવારી કરવાની વિશાળ જગ્યા આવે. આની સામે ઊંચી બેઠકોવાળી ગોળાકાર રંગભૂમિ આવે. આની બાજુમાં સોમા (Soma) જેમાં ટોલેમી વંશના રાજાઓ અને સિકંદરની ભવ્ય કબરો અને સ્મારકો હતાં. આ બધું બ્રુકિયમના (Bruchium) ભાગરૂપ હતું. ત્યાંથી આગળ જઈએ એટલે દુનિયાભરના વિદ્વાનોને જે જોવું છે તે ભવ્ય પુસ્તકાલય અને માઉસિયન ((Mouseion) યુનિવર્સિટી) જે તે સમયે ખૂબ જ આગળપડતી યુનિવર્સિટી હતી તે આવે. આ બંને રાજા ટોલેમીના રાજમહેલના ભાગરૂપે હતાં. લોકોને ચાલવાના રસ્તા, બાગ, બગીચા અને પ્રાણીસંગ્રહાલય પણ હતાં. યોગ્ય રીતે કહીએ તો, માઉસિયન એ કળા અને વિજ્ઞાનની દેવીઓનું પવિત્ર સ્થાન છે અને તેના પુરોહિત ઇજિપ્તના રાજા અને પાછળથી રોમના રાજા નીમતા. આ આખાયે અંગોપાંગોના બનેલા ભાગને કાયમી વિપુલ આવક હતી.

ઈ.સ. પૂર્વે 300માં ટોલેમી દ્વિતીયે માઓસિયન ખુલ્લી મૂકેલી અને દુનિયાના દરેક ક્ષેત્રના વિદ્વાનોને એલેકઝાન્ડ્રિયા આવીને રહેવા અને વ્યાખ્યાનો આપવા આમંત્રણ આપેલાં. ખરેખર માઓસિયન સંશોધનસંસ્થા હતી. દુનિયામાં સૌથી પહેલી સરકારી સંશોધનસંસ્થા ગણી શકાય. એલેકઝાન્ડ્રિયાના મોટાભાગના વિજ્ઞાનીઓ અને તત્ત્વજ્ઞાનીઓ એથેન્સથી આવેલા. વિદ્વાનોને રહેવા માટે મોટું મકાન અને જમવા માટે મોટું ભોજનગૃહ પણ હતું. આ સર્વેની જીવન જરૂરિયાતો પૂરી પાડવામાં આવતી અને તેઓ કરવેરો ભરવામાંથી મુક્ત હતા. આ ઉપરાંત રસ્તાની બંને બાજુએ પ્રવેશદ્વારો સાથેનાં સભાગૃહો, વર્ગો જેમાં તત્ત્વજ્ઞાનીઓ, વક્તૃત્વ નિષ્ણાતો, ચિકિત્સકો, વૈજ્ઞાનિકો અને કવિઓ નવાનવા સિદ્ધાંતોની ચર્ચા કરતા. આ સર્વે વિદ્વાનો પોતપોતાનાં ક્ષેત્રનો અભ્યાસ કરતા, લખતા, સંશોધન કરતા અને વ્યાખ્યાનો આપતા. આ સર્વે માટે સુંદર સભાગૃહો, વર્ગો, પ્રયોગશાળાઓ અને વનસ્પતિશાસ્ત્ર માટેના બગીચાઓ પણ હતા. આ અનોખી સંસ્થાનો લાભ આજે પણ આખી દુનિયાને મળે છે. વિશાળ સુંદર બાગબગીચાઓ, ભવ્ય મકાનો, ભવ્ય રાજમહેલો, માઓસિયન, ભવ્ય પુસ્તકાલય ગુલામોએ બાંધેલાં. આશ્ચર્ય પમાડે તે રીતે સિકંદરનું મહાસ્વપ્ન એલેકઝાન્ડ્રિયાના મન અને પ્રકૃતિમાં ઊતર્યું અને પશ્ચિમનાં સંસ્કૃતિ, કળા, રાજનીતિ, ધર્મ વગેરે ઉપર ગહન અસર કરી ગયું.

ટોલેમીના વંશજો માટે પુસ્તકો અમૂલ્ય હોઈને તે મેળવવા માટે અવનવા રસ્તાઓ શોધતા. યહૂદીઓના ધર્મગ્રંથ ઓલ્ડ ટેસ્ટામેન્ટનું (Old Testament) ગ્રીક ભાષાંતર ટોલેમી દ્વિતીયે લગભગ સિત્તેર યહૂદી વિદ્વાનોને ફારોસ ટાપુ ઉપર કેદ કરીને કરાવેલું.

ટોલેમી તૃતીયે દરેક રાજ્યોને તેમનાં પુસ્તકો ઉછીનાં આપવા માટે લખ્યું અને ઘણાંબધાં રાજ્યોએ ઉછીનાં આપ્યાં. ટોલેમી તૃતીયે પુસ્તકોની નકલ કરીને પાછાં મોકલવાને બદલે તે બધાં પુસ્તકો રાખી લીધાં. મોટાભાગનાં પુસ્તકોનું ગ્રીક ભાષાંતર થતું. દરિયાઈ માર્ગે એલેકઝાન્ડ્રિયા આવો તો વહાણમાંથી ઊતરતાં જ તમારાં પુસ્તકો સરકાર લઈ લેતી અને નસીબદારને જ પોતાનાં પુસ્તકો પાછાં મળતાં. આ રીતે એલેકઝાન્ડ્રિયાના પુસ્તકાલયમાં લગભગ બે લાખથી પાંચ લાખ કાગળ કે ચર્મપત્રના વીંટાઓ (પુસ્તકો) ભેગા કરેલા.

1.2.1 યુક્લિડ અને એલિમેન્ટ્સ (Euclid and Elements)

ઈજિપ્તમાં આવેલા એલેકઝાન્ડ્રિયામાં ઈ.સ. પૂર્વે 300માં યુક્લિડ નામનો માણસ રહેતો હતો, જેના કામના આધારે વિજ્ઞાનની પ્રગતિ થઈ રહી છે અને થતી રહેશે. એમનાં લખેલાં પુસ્તકોના આધારે હાલનાં ભૂમિતિનાં પુસ્તકો રચાયેલાં છે.

લાગ્રાન્જની (Lagrange) લખેલી ભૂમિતિના કારણે ગાલોઆ (Galois) ગણિત ભણી આકર્ષાયેલા. અમારા જેવા ઘણાબધા ભૂમિતિના કારણે જ ગણિતવિષય તરફ આકર્ષાયેલા. થેલેસ, પાયથાગોરસ, પ્લેટો, હિપ્પોક્રેટસ વગેરેએ જે ગણિત ઊભું કર્યું તે ગણિતને યુક્લિડે એલિમેન્ટ્સમાં ખૂબ જ વ્યવસ્થિત સ્વરૂપમાં મૂક્યું. જૂના બેબીલોનિયન અને ઈજિપ્તના ગણિતને તદ્દન નવા ગ્રીકસ્વરૂપમાં એલિમેન્ટ્સની તેર પુસ્તિકાઓમાં યુક્લિડે મૂક્યું. શરૂઆતથી જ એલિમેન્ટ્સ સનસનાટીભર્યું હતું. યુક્લિડના જેટલો પ્રભાવ આ દુનિયામાં કોઈ પાડી શક્યું નથી. કમનસીબે આપણી પાસે યુક્લિડની કોઈ માહિતી નથી. ફક્ત એટલું જાણીએ છીએ કે તેઓ માઓસિયનમાં ગણિતના અધ્યાપક હતા અને તેમણે ઓછામાં ઓછાં બે પુસ્તકો લખેલાં. એમાંનું એક પુસ્તક ખોવાઈ ગયું છે. આ ખોવાયેલું પુસ્તક શંકુ અને સમતલના છેદથી બનતા વલયોને (conics) લગતું હતું. આ પુસ્તકના કારણે એપોલોનિયસે (Appolonius) આ બધા વક્રો ઉપર ખૂબ જ અગત્યનું કામ કરેલું. આ કામના કારણે નૌકાયાનશાસ્ત્ર અને ખગોળશાસ્ત્રનો ઘણો વિકાસ થયો.

બીજું પુસ્તક ખૂબ જ વંચાયેલાં પુસ્તકોમાંનું એક તે એલિમેન્ટ્સ છે. ખરેખર તો, એ તેર પુસ્તિકાઓ છે, જે ભૂમિતિ, મૂલપૂર્ણાંક અને ઘનભૂમિતિ પર છે. મૂળસ્વરૂપે કંઈ બચ્યું નથી, પણ ગ્રીક આવૃત્તિમાંથી અરબી ભાષામાં ભાષાંતર થયેલું, અરબી ભાષાના ભાષાંતરમાંથી ઘણીબધી ભાષાઓમાં ભાષાંતર થયેલું. આ બધાં ભાષાંતરોના કારણે અને હાથથી નકલો કરવાના કારણે ઘણીબધી ભૂલો હોઈ શકે. હજારો વિદ્વાનો અને

શિક્ષકોએ એલિમેન્ટ્સના દરેકેદરેક શબ્દ અને પ્રમેયનો અભ્યાસ કર્યો છે અને તેમની આગવી શૈલીમાં લખવાનો પ્રયત્ન કરેલો છે. આપણી ગીતાના દરેકેદરેક શ્લોકના દરેકેદરેક શબ્દ સમજાવતાં ઘણાબધા વિદ્વાનોનાં ઘણાંબધાં પુસ્તકો મળે છે તે જ રીતે એલિમેન્ટ્સનાં પુસ્તકો મળે.

યુક્લિડનો આશય કોઈપણ માન્યતા આપ્યા વગરની ધારણાઓથી પર, અટકળો વગરની, અચોક્કસતાથી પર એવી રચના કરવાનો હતો. આ માટે યુક્લિડે ત્રેવીસ વ્યાખ્યાઓ, પાંચ ભૂમિતિના ગૃહિત સિદ્ધાંતો અને પાંચ સામાન્ય અભિપ્રાયો આપ્યા છે. આના આધારે યુક્લિડે 465 પ્રમેયો સાબિત કર્યાં છે, જે તે સમયે જાણીતા હતાં. એલિમેન્ટ્સનો સંયમ પ્રેરણા આપે તેવો છે. જરૂર, એલિમેન્ટ્સ ભવ્ય પણ છે.

થીઓન (Theon) એલેકઝાન્ડ્રિયામાં અધ્યાપક હતા અને તેમની તૈયાર કરેલ યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સની પુસ્તિકાઓ એલેકઝાન્ડ્રિયામાં પાઠ્યપુસ્તક તરીકે આશરે ઈ.સ. 390માં વપરાતી હતી. આ પુસ્તિકાઓ ગ્રીક ભાષામાં હતી. આ પુસ્તિકાઓ ખલીફ અલ-મનસૂરે (Caliph al-Mansur) બાયઝન્ટાઈન (Byzantine) રાજા પાસેથી મેળવેલી અને અલ-હજાજે (al-Hajjaj) બે વખત અરબી ભાષામાં ભાષાંતર કરેલું. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓની જેમ આરબ વિદ્વાનો પણ એલિમેન્ટ્સથી મુગ્ધ હતા. તે સમયમાં આરબ શિક્ષણકેન્દ્રોમાં એલિમેન્ટ્સની નકલો થતી રહી, ભાષાંતરો થતાં રહ્યાં અને સુધારા વધારા થતા રહ્યા. ઘણી સદીઓ પછી અરબી ભાષામાં ભાષાંતર થયેલ એલિમેન્ટ્સ અને એરિસ્ટોટલનાં કામોનું ગેરાર્ડ ઓફ ક્રેમોનાએ (Gherard of Cremona (1114-1187)) લેટિનમાં ભાષાંતર કર્યું. આ જ સમય દરમિયાન ઈ.સ. 1088માં યુનિવર્સિટી ઓફ બોલોગ્ના (University of Bologna), ઈ.સ. 1117માં ઓક્સફર્ડ યુનિવર્સિટી (Oxford University), ઈ.સ. 1150માં યુનિવર્સિટી ઓફ પેરિસ (University of Paris) અને ઈ.સ. 1209 માં કેમ્બ્રિજ યુનિવર્સિટી (Cambridge University) શરૂ થઈ. યુરોપનાં ઘણાં બધાં શિક્ષણકેન્દ્રોમાં એલિમેન્ટ્સ જ કેન્દ્રસ્થાને હતાં.

ગ્રીક ભાષામાં એલિમેન્ટ્સ રોમમાં વેટિકન (Vatican) પુસ્તકાલયમાં અને ઓક્સફર્ડ યુનિવર્સિટીના બોડ્લિયન (Bodlein) પુસ્તકાલયમાં છે. એ ઘણી સદીઓ પુરાણાં છે. આ બંને પુસ્તકોના આધારે અંગ્રેજીમાં હીથે (Heath, T.L.) ભાષાંતર કરેલાં, જે હાલમાં ડોવર (Dover) કંપનીએ પ્રસિદ્ધ કર્યાં છે. લગભગ ઈ.સ. 1482ની આસપાસ છાપખાનાની શરૂઆત થઈ ત્યારે વિજ્ઞાનક્ષેત્રે પહેલવહેલું પુસ્તક એલિમેન્ટ્સ છપાયેલું. એલિમેન્ટ્સનું ભાષાંતર 1505માં બાર્ટોલોમીઓ ઝામ્બેર્ટીએ

(Bartolomeo Zamberti) લેટિનમાં, 1543 માં વેર્ટુરિનો રૂફિફનેલ્લીએ (Verturino Ruffinelli) ઇટાલિયનમાં, 1555 માં જોહાન શ્યુબેલે (Johann Scheubel) અને 1562માં જેકોબ કુન્ડિગે (Jecob Kundig) જર્મનીમાં, 1564માં પિયેરે ફોરકાડેલ ડી બ્રેઝિઅર્સે (Pierre Forcadal de Braziers) ફ્રેન્ચમાં, 1570માં જોન ડેએ (John Day) અંગ્રેજીમાં, 1576માં રોડ્રિગો ડી ઝામોરાનોએ (Rodrigo de Zamorano) સ્પેનીશમાં અને 1607માં મેહીઓ રિક્કિ અને ક્યુ ગ્યુઆન્ગિએ (Maheo Ricci and Xu Guanggi) ચીની ભાષામાં કરેલાં. રોબર્ટ સિમ્સને (Robert Simson) એલિમેન્ટ્સની 1-6, 11 અને 12 પુસ્તિકાઓ લગભગ 1710 ની આસપાસથી, પહેલી આવૃત્તિ લેટિનમાં અને પછીની સિત્તેર આવૃત્તિઓ અંગ્રેજીમાં પ્રસિદ્ધ કરેલી.

હાલમાં ભૂમિતિનાં લખાયેલાં પુસ્તકો ભુલાઈ જશે અને તેમની જગ્યાએ નવાં ભૂમિતિનાં પુસ્તકો આવશે તોપણ યુક્લિડનું કામ જીવંત રહેશે. જૂના જમાનાનું એ મહાન સ્મારક છે. ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે ઓળખાવનારે યુક્લિડનું કામ જાણવું પડશે, નહિતર તેને સાચા ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે ઓળખાવવાનો હક્ક જતો કરવો પડશે. યુક્લિડનું કામ જાણવા માટે યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સ જાણવાં પડશે.

1.2.2 આર્કિમિડિઝ (Archimedes)

ગ્રીક સંસ્કૃતિના ગણિતઇતિહાસ માટે આપણે આર્કિમિડિઝને જાણવા પડે. તેમના વગર ગણિત અને વિજ્ઞાન રસહીન લાગે. સામાન્ય પ્રજાની નજરમાં ગણિતશાસ્ત્રી ધૂની એટલે કે તેના કામમાં રચ્યોપચ્યો હોવો જરૂરી છે. આથી તેને ખાવાપીવાની કે કપડાંની ખાસ પડી હોતી નથી. આવી સામાન્ય પ્રજાની ગણિતશાસ્ત્રીની સમજને કોઈપણ ગણિતશાસ્ત્રી બંધ બેસે તેવા હોય તો તે આર્કિમિડિઝ. મહાન ગણિતશાસ્ત્રીઓમાંના એક તો ખરા જ! અત્યાર સુધીના પહેલા ત્રણ ગણિતશાસ્ત્રીઓ ગૉસ (Gauss), ન્યૂટન (Newton) અને આર્કિમિડિઝ ગણાય. જે સમયમાં આ ત્રણે ગણિતશાસ્ત્રીઓ જીવેલા તે સમયમાં ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્ર શક્ય હતું તેની સરખામણીમાં તેમની સિદ્ધિઓ સરખાવતાં આર્કિમિડિઝ પહેલા નંબરના એટલે કે સર્વશ્રેષ્ઠ ગણિતશાસ્ત્રી ગણાય.

આર્કિમિડિઝ (ઈ.સ. પૂર્વે 287 - ઈ.સ. પૂર્વે 212) સિરેક્યુસ (Syracuse) સિસિલીમાં (Sicily) જન્મેલા. સિસિલી ટાપુ, ભૂમધ્ય સમુદ્રમાં ઇટાલીના નજીકમાં આવેલો છે. આર્કિમિડિઝના પિતાજી ફેઈડિયાસ (Pheidias) ખગોળશાસ્ત્રી હતા અને સિરેક્યુસના રાજા હિરોન દ્વિતિય (Hieron-II) ના સંબંધી હતા. તેઓ

એલેકઝાન્ડ્રિયામાં ભણેલા. ન્યૂટન અને હેમિલ્ટોનની (Hamilton) જેમ, જ્યારે વિચારમાં ઊંડા ઊતરેલા હોય ત્યારે આર્કિમિડિઝ પણ કોઈ કોઈ વખત જમવાનું ભૂલી જતા. રાજા હિરોને રાજમુગુટના સોનામાં સોનીએ ભેગ કર્યો છે કે નહિ તે શોધવાનું કામ આર્કિમિડઝને સોંપેલું. હોજમાં નહાવા પડ્યા અને પડતાંની સાથે તેમને તેમનું વજન પાણીમાં ઓછું લાગ્યુ એટલે આના ઉપરથી તેમને રાજમુગુટમાં સોનીએ ભેગ કર્યો છે કે નહિ તેનો જવાબ મળી ગયો. તેના ઉત્સાહમાં તેઓ સિરેક્યુસના રસ્તા ઉપર હોજમાંથી સીધા નગ્નાવસ્થામાં જ 'યુરેકા (Eureka), યુરેકા (શોધી કાઢ્યું, શોધી કાઢ્યું)' ની બૂમો પાડતા ઘેર જવા માટે દોડેલા. રાજમુગટ અને રાજમુગુટના વજન જેટલા જ સોનાનું, પાણીમાં વજન સરખું ન હોય તો, સોનીએ રાજમુગુટના સોનામાં ભેગ કર્યો છે તેમ કહી શકાય. સોનીએ ભેગ કરેલો ? જવાબની ખબર નથી. પ્રવાહીશાસ્ત્રની શરૂઆત આર્કિમિડિઝે કરેલી અને 'પ્રવાહીમાં ડૂબેલા કે તરતા પદાર્થથી જેટલા પ્રવાહીનું સ્થળાંતર થાય તેટલા પ્રવાહીના વજન બરાબર પદાર્થના વજનનો પ્રવાહીમાં ઘટાડો થાય.' - આ આર્કિમિડિઝના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. યંત્રશાસ્ત્રના પણ ખૂબ જ બુદ્ધિશાળી વ્યક્તિ હતા. તેમણે ઉચ્ચાલનના અને ગરગડીના ઘણા નિયમો શોધી કાઢેલા અને આ કારણે તે કહેતા : "મને પૃથ્વી બહાર ઊભા રહેવાની જગ્યા આપો અને હું પૃથ્વીને ખસેડીશ." તે જમાનામાં વજનવાળું મોટું જહાજ ઉચ્ચાલન અને ગરગડીઓની મદદથી એકલા હાથે પાણીમાં તરતું મકેલું. આ કામ જોઈને રાજા હિરોને જ્યારે રોમન સેનાપતિ માર્સેલસે (Marcellus) દરિયાઈ માર્ગે સિરેક્યુસ ઉપર હુમલો કર્યો ત્યારે આર્કિમિડિઝને મદદ માટે વિનંતી કરી. આર્કિમિડિઝે આવતાં જહાજો ઉપર વિશાળ ગિલોલથી 1/4 ટનના પથ્થરોનો સતત મારો રાખીને મોટાભાગનાં આવતાં જહાજો તોડી પાડ્યાં. સિરેક્યુસ શહેરની દિવાલ ઉપરથી અણીદાર લોખંડના પંજા વડે અને બગલાની ચાંચ જેવી લોખંડની ચાંચ વડે બચીને કિનારે આવેલાં જહાજોને પકડીને ગોળ ગોળ ફેરવીને તોડી પાડ્યાં. તેવી જ હાલત જમીનને રસ્તે આવેલા લશ્કરની થઈ!! માર્સેલસને વિલા મોઢે પાછા વળવું પડ્યું. વિજ્ઞાન, દેશોને લશ્કરી વિજય અપાવી શકે છે અને આબાદ રીતે બચાવી પણ શકે છે. આર્કિમિડિઝની વૈજ્ઞાનિક આવડતને કારણે હિરોન તેમના દેશને બચાવી શક્યા. બીજા વિશ્વયુદ્ધમાં અમેરિકાનો વિજય તેના વૈજ્ઞાનિકોની અણુબોમ્બ બનાવવાની સફળતાને કારણે થયો. આર્યોએ રથ અને ધનુષ્યબાણથી ભારત જીતી લીધેલો. એ જમાનામાં રથ અને ધનુષ્યબાણની શોધ હાલના કમ્પ્યૂટર અને અણુબોમ્બ જેવી જ ગણાય !!

શાંતિનો સમય લાંબો ન ચાલ્યો. ફરીથી માર્સેલસે જમીન માર્ગે જ સિરેક્યુસ ઉપર

હુમલો કર્યો. આ વખતે માર્સેલસના સારા નસીબે ભગવાન આર્ટેમિસના (Artemis) માનમાં ધાર્મિક તહેવાર ચાલતો હતો અને સિરેક્યુસના લોકો દારૂના ઘેનમાં હતા. આથી સિરેક્યુસનો બચાવ ન કરી શક્યા. એ જમાનામાં જમીન ઉપર સરખી રીતે રેતી કે રાખ પાથરીને તેના ઉપર લખવામાં આવતું. આવી રેતી ઉપર દોરેલાં વર્તુળો ઉપર રોમન સૈનિકનો પડછાયો જોઈને શું બની રહ્યું છે તેનો આર્કિમિડિઝને ખ્યાલ આવી ગયો. રોમન લશ્કરના લાભ માટે ભૂતકાલીન ખૂબ જ હોશિયાર બચાવનારની શોધોનો ઉપયોગ લેવાના ખ્યાલે, માર્સેલસને તેમને (આર્કિમિડિઝને) શોધવાનો અને તેમની જિંદગી બચાવવાનો હુકમ આપવામાં આવેલો. રોમન સૈનિકે આર્કિમિડિઝને સેનાપતિ માર્સેલસ પાસે આવવા જણાવ્યું. આર્કિમિડિઝે રોમન સૈનિકને જણાવ્યું કે, જે તેઓ ગણે છે તે પૂરું કરીને તેની સાથે આવશે. સૈનિકની ધીરજ ન રહી અને આપણા મહાન ગુરુ દ્રોણાચાર્યના મૃત્યુની યાદ અપાવી જાય તે રીતે આર્કિમિડિઝનું ધડ કાપી નાખ્યું !! સર્વશ્રેષ્ઠ ગણિતશાસ્ત્રીનો ગણિતમાં ધ્યાનસ્થ સ્થિતિમાં જ અંત આવ્યો.

આર્કિમિડિઝને સાચા અર્થમાં આધુનિક ગણિતશાસ્ત્રી કહી શકાય. તેમણે સમતલમાં વાંકીચૂકી આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની રીત શોધી કાઢેલી. આ ક્ષેત્રફળ ગણવાની રીત, કલનશાસ્ત્રમાં આવતા નાની પહોળાઈના લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો જ છે. આ રીતનો ઉપયોગ કરીને આર્કિમિડિઝે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, બે જુદીજુદી ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ શોધેલું. નાના નાના સમાંતર ફલક (parallelopiped) ના ઘનફળનો સરવાળો કરીને વક્રતલથી (curved surface) બનતા ઘનનું કદ શોધવાની રીત શોધેલી. આર્કિમિડિઝ પોતે એવું માનતા કે નળાકારમાં આવેલા અંતઃગોલકનું (નળાકારની ઊંચાઈ બરાબર ગોલકનો વ્યાસ છે, અને નળાકારની ત્રિજ્યા બરાબર ગોલકની ત્રિજ્યા છે.) ઘનફળ નળાકારના ઘનફળનું $\frac{2}{3}$ છે તે તેમની મોટામાં મોટી શોધ છે. આ શોધનો આર્કિમેડિઝને એટલો બધો ગર્વ હતો કે તેમણે તેમની કબર ઉપર આનું વર્ણન કરતું ચિત્ર દોરવા જણાવેલું. યાદ રાખવાની જરૂર છે કે, તે સમયે યામ-ભૂમિતિ ન હતી, આ જોતાં આ ભવ્ય કામગીરી ગણાય. તદુઉપરાંત સર્પિલના (spiral) કોઈપણ બિંદુએ સ્પર્શકની રચનાની રીત આપીને ન્યૂટન અને લિબનીઝથી (Leibniz) બે હજાર પૂર્વે આર્કિમિડિઝે સંકલન અને વિકલનની રીત વિચારેલી.

π ની કિંમત ગણવાની રીત પણ તેમણે આપી અને તે કિંમત $3\frac{1}{7}$ અને $3\frac{10}{71}$ ની

વચ્ચે છે તે બતાવેલું. વર્ગમૂળ ગણવાની રીત આપેલી, જે આવર્તી પરંપરિત અપૂર્ણાંકના (Periodic Continued Fraction) જેવી છે. ગ્રીકની આંકડાઓને સંજ્ઞાથી દર્શાવવાની એ સમયની રીત મોટા આંકડાઓને દર્શાવી શકે તેમ ન હોઈ આર્કિમિડિઝે એવી રીત શોધેલી કે જે ગમે તેવા આંકડાઓ દર્શાવી શકે.

એલિમેન્ટ્સ લખાયા પછી ફક્ત નેવું વર્ષમાં આર્કિમિડિઝે આ બધું કરેલું. કમનસીબે ગ્રીક વૈજ્ઞાનિકોએ અને ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આર્કિમિડિઝના કામને આગળ ન વિકસાવ્યું. તેઓએ યુક્લિડ અને પ્લેટોના કામને જ આગળ વિકસાવ્યું. જો ગ્રીક વૈજ્ઞાનિકોએ અને ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આર્કિમિડિઝના કામને આગળ ધપાવ્યું હોત તો ગણિત અને વિજ્ઞાનનો ઇતિહાસ જુદો જ હોત !!

1.2.3 હાઈપેશ્યા (Hypatia)

ટોલેમીના વંશજો એલેકઝાન્ડ્રિયામાં રાજ કરતા હતા ત્યાં સુધી માઓસિયન અને પુસ્તકાલયને પૂરતા પ્રમાણમાં આર્થિક ટેકો મળતો. ઇજિપ્ત ઈ.સ. પૂર્વે 30થી ઈ.સ. 311 સુધી રોમનોના તાબાનો દેશ બન્યો. આખરે કોન્સ્ટટાઈન ધ ગ્રેટે (Constatine the Great, A.D. 274-337) ખ્રિસ્તી ધર્મ રાજ્યધર્મ તરીકે સ્વીકાર્યો. ખ્રિસ્તી ધર્મનું જેમ જેમ જોર વધતું ગયું તેમ તેમ એલેકઝાન્ડ્રિયામાં પણ અંદર અંદર ઝઘડા વધતા ગયા. પ્લેટોનિસ્ટો, યહૂદીઓ એક બાજુ અને બીજી બાજુ ખ્રિસ્તીઓ. સામાન્ય રીતે યુનિવર્સિટીઓ ઉદારમતવાદી ગણાય, જે સામાન્ય વર્ગને ઓછું ગમે. આ કારણે ઈ.સ. 321માં ખ્રિસ્તીઓના ટોળાએ એલેકઝાન્ડ્રિયાનું ભવ્ય પુસ્તકાલય સળગાવેલું. યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સ હાલમાં જે વપરાય છે તે થિયોને (Theon) તૈયાર કરેલી યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સની પુસ્તિકાઓ છે. એલેકઝાન્ડ્રિયામાં આ પુસ્તિકાઓ પાઠ્યપુસ્તક તરીકે વપરાતી અને થિયોન યુનિવર્સિટીમાં ભણાવતા હતા.

થિયોનની પુત્રી હાઈપેશ્યા ઈ.સ. 370માં એલેકઝાન્ડ્રિયામાં જન્મેલી. ગ્રીક શબ્દ હાઈપેટો (Hypatos) જેનો અર્થ 'શ્રેષ્ઠ' થાય તેના ઉપરથી હાઈપેશ્યા નામ આપેલું અને તે સાર્થક નીવડ્યું. થિયોને હાઈપેશ્યાને ગણિત અને તત્ત્વજ્ઞાન શીખવેલું. થિયોનને યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સ અને બીજાં લખાણો લખવામાં હાઈપેશ્યાએ મદદ કરેલી. હાઈપેશ્યાએ ડાયોફેન્ટ્સ (Diophantus) ની એરિથમેટિકા (Arithmetica) અને એપોલોનિયસના કોનિક્સ ઉપર વિવેચન લખેલાં. ઈ.સ. 400માં ઘણાં વર્ષો શીખવતાં પ્લેટોના તત્ત્વજ્ઞાન વિભાગનાં મુખ્ય બન્યાં. દુનિયાના દરેક ભાગમાંથી વિદ્યાર્થીઓ તેમના વર્ગમાં આવતા. બુદ્ધિપ્રતિભા, વક્તૃત્વછટા અને જવલ્લે જ જોવા મળતી સુંદરતા

હાઈપેશ્યામાં હોઈને તે જમાનામાં તેઓ સુપ્રસિદ્ધ હતાં. એલેકઝાન્ડ્રિયામાં સર્વેને હાઈપેશ્યા માટે પ્રેમ હતો અને સર્વે તેમની પ્રશંસા કરતાં. દરરોજ સાંજના સુંદર રથમાં બેસીને સભાગૃહમાં તે શીખવવા જતાં. સભાગૃહ સુંદર શણગારેલું, ગોળાકાર અને ઘુમ્મટવાળું હતું અને તેમાં સુગંધી તેલવાળા ઝૂલતા દીવાઓ હતા. સુશોભિત સફેદ વસ્ત્રો અને ચંદ્રક પહેરીને અસરકારક અને રમણીય ગ્રીકમાં પ્લેટો અને એરિસ્ટોટલનું તત્ત્વજ્ઞાન તેઓ સમજાવતાં.

હાઈપેશ્યાનાં ભાષણો સાંભળવા માટે રોમન પરફેક્ટ ઓરેસ્ટીસ (Roman Perfect Orestes) પણ આવતા. ભાષણની ચર્ચાની સાથે સાથે મ્યુનિસિપલ અને રાજકીય મુદ્દાઓની પણ ચર્ચા થતી. બંને મિત્રો બની ગયા. ઓરેસ્ટીસ ઈ.સ. 412 થી 415 ઈજિપ્તના સિવિલ ગવર્નર હતા અને એલેકઝાન્ડ્રિયાના બિનસાંપ્રદાયિક સત્તાધારી પણ હતા. આ સમયમાં ખ્રિસ્તી ધર્મનું જોર ખૂબ જ હતું. ઈ.સ. 412માં ખ્રિસ્તી ધર્મના એલેકઝાન્ડ્રિયાના મુખ્ય ધર્માધ્યક્ષ (Archbishop) ગુજરી ગયા. તેમના ભત્રીજા સિરિલ (Cyril) સત્તાના ભૂખ્યા અને ધર્મઝનૂની હતા. તે એલેકઝાન્ડ્રિયાના મુખ્ય ધર્માધ્યક્ષ બન્યા. ઓરેસ્ટીસ અને સિરિલ વચ્ચે સત્તા માટેનું ઘર્ષણ રહ્યા કરતું. હાઈપેશ્યા અને ઓરેસ્ટીસના સંબંધો સરસ હોઈને અને હાઈપેશ્યાના વિદ્યાર્થીઓ ખૂબ જ આગળ પડતા હોઈને, હાઈપેશ્યા સિરિલને અડચણરૂપ લાગતી. આ કારણે સિરિલ અને તેના અનુયાયીઓ હાઈપેશ્યા ડાકણ અને જાદુગરણી છે એવી અફવાઓ ફેલાવતા. હાઈપેશ્યા જાદુગર હોઈને એલેકઝાન્ડ્રિયાના માણસોને તકલીફમાં મૂકશે તેવી વાતો પણ કરતા. ઈ.સ. 415ના લેન્ટના ((Lent) ઈસ્ટર પહેલાંના ચાલીસ પવિત્ર દિવસો) પવિત્ર દિવસોમાં સવારના હાઈપેશ્યા તેમના રથમાં જઈ રહ્યાં હતાં ત્યારે સિરિલના ચારસોથી વધારે ખ્રિસ્તી અનુયાયીઓએ હાઈપેશ્યાના રથને રોકીને, તેમને ખેંચીને બહાર કાઢયાં અને ત્યાંથી ઢસડીને બાજુના ચર્ચમાં લઈ ગયા. ચર્ચમાં હાઈપેશ્યાને નિર્વસ્ત્ર કરીને તીણા પથ્થરોથી અને ધારવાળાં વાસણોથી તેમની ચામડી ચીરી નાખી અને બધાં અંગો કાપી નાખીને તેમને સળગાવી દીધાં. એલેકઝાન્ડ્રિયાના યુનિવર્સિટીની છેલ્લી મોટી વિદ્વાન અને સૌથી પહેલી સ્ત્રીવિદ્વાનનો કેવો કરૂણ અંત!!

1.2.4 ખેલ ખલાસ !!

એલેકઝાન્ડ્રિયા તેના દરવાજાઓમાંથી આવતી કોઈપણ વિચારધારા કે પદ્ધતિ સ્વીકારી લેતું. યહુદીધર્મ, પ્લેટોનું તત્વજ્ઞાન, ખ્રિસ્તીધર્મ વગેરે અને તે વિચારધારા કે પદ્ધતિ ઉપર ભૂંસી ન શકાય તેવી કાયમી છાપ આ શહેર મૂકતું. સાતમી સદીમાં આ

શહેરનાં મકાનો જીર્ણ થયેલાં દેખાતાં અને તે જ રીતે નૈતિક સ્વરૂપમાં પણ કાટ દેખાતો. ઈ.સ. 641માં મહંમદ પેગંબરના મૃત્યનાં દશ વર્ષ પછી આરબ જનરલ અમરૂએ ફક્ત 4000 ઘોડેસવારોથી એલેકઝાન્ડ્રિયા સિવાયનું ઇજિપ્ત જીતી લીધું. આરબ અમરૂ ઉત્તમ પ્રકારના લશ્કરી પ્રતિભાસંપન્ન જનરલ હતા. ઉપરાંત કવિ પણ હતા. એલેકઝાન્ડ્રિયાની છાપ રાષ્ટ્રીયતાની મર્યાદાઓથી મુક્ત શહેર હોઈ, આરબો તેને નીતિભ્રષ્ટ અને પ્રલોભનવાળું શહેર ગણતા. આ કારણે આ શહેરને જીતતાં અચકાતા. આખરે આરબોએ આ શહેરને જીતવાનો વિચાર કર્યો અને જનરલ અમરૂને મોકલ્યા. આ પહેલાં રાજા હિરેક્લિઅસનું (Heraclius) શાહી લશ્કર કોન્સ્ટેન્ટિનોપલ (Constantinople) પાછું પહોંચી ગયું હતું અને એલેકઝાન્ડ્રિયાના બચાવ માટે કોઈ ખાસ લશ્કર જ ન હતું. સન ગેટથી જનરલ અમરૂએ હુમલો શરૂ કર્યો. જનરલ અમરૂના લશ્કરે શહેરની ભવ્ય ઇમારતોને ખાસ નુકસાન ન કર્યું. તે સમયના રીતરિવાજે સૈનિકોએ શહેર લૂંટયું અને સ્ત્રીઓ ઉપર બળાત્કાર પણ કર્યા. જનરલ અમરૂ પ્રજા તરફ ક્ષમાશીલતાથી વર્ત્યા. જેમને એલેકઝાન્ડ્રિયા છોડવું હોય તેમને જવા દીધાં અને કર ભરે તેને જે ધર્મ પાળવો હોય તે પાળવાની છૂટ આપી. આ જ અરસામાં આરબોએ મેમ્ફિસનું નામ બદલીને કૈરો (Cairo) કર્યું. જનરલ અમરૂએ ખૂબ જ સરળતાથી એલેકઝાન્ડ્રિયા જીત્યું તેના આનંદમાં કૈરોના ખલીફ ઓમારને લખ્યું :

"4000 રાજમહેલો, 4000 સ્નાનાગારો, 400 નાટ્યગૃહો, 1200 શાકભાજી વેચનારા અને 40,000 કરવેરો ભરનારા યહૂદીઓવાળું શહેર મેં જીતી લીધું છે."

ખલીફને આથી ખાસ આનંદ ન થયો. સમાચાર લઈને આવનાર દૂત સામે માથું હલાવીને સમાચાર લાવવા બદલ પાઉંરોટીની નાની પોટલી, ઑલિવના તેલની નાની શીશી અને થોડીક ખજૂરની પેશીઓ આપી. એલેકઝાન્ડ્રિયાની હરીફાઈ કરી શકે તેવું દુનિયામાં ઘણી સદીઓ સુધી કોઈ શહેર ન હતું તેની આરબોને કશી કિંમત ન હતી. અલ્લાએ તેમને મોટું શક્તિશાળી શહેર આપ્યું છે એ સિવાય આરબોને લગભગ એક હજાર વર્ષ સુધી એલેકઝાન્ડ્રિયાની કોઈ કિંમત ન સમજાઈ.

એલેકઝાન્ડ્રિયા હાલનાં ઉદાર મતવાદી શહેરોની જેમ જ ઉદાર મતવાદી શહેર હતું. અખંડિત શાહી નૌકાસૈન્યની મદદથી, આરબ રાજ્ય સામે એલેકઝાન્ડ્રિયાએ માથું ઊંચકયું. જનરલ અમરૂને બળવો દાબી દેવા માટે મોકલવામાં આવ્યા. મોટી કત્લેઆમ કરવામાં આવી. લાયબ્રેરીનાં બાકી રહેલાં પુસ્તકોનો નાશ કરવાનો હુકમ કરવામાં આવ્યો. જૉહ્ન (John) એલેકઝાન્ડ્રીઆના નવા ધર્માધ્યક્ષ હતા. જૉહ્ન અને અમરૂ જૂના મિત્રો હતા. જૉહ્ને અમરૂને લાઈબ્રેરીનાં પુસ્તકોનો નાશ ન કરવા સમજાવ્યા. જૉહ્ને

ટોલેમી રાજાઓએ કેટલી તકલીફો લઈને પુસ્તકો ભેગાં કરેલાં તે સમજાવ્યું. જૉહ્નના ખરા દિલની ખાસ વિનંતીથી અમરૂનું દિલ ભરાઈ ગયું અને લાંબો વિચાર કરીને કહ્યું:

'પુસ્તકોની બાબતમાં ખલીફની પરવાનગી વગર મારાથી કશું જ બની ન શકે. હું ખલીફને તમે જણાવેલી અસાધારણ વસ્તુઓ લખીને જણાવીશ'.

ઘણાં અઠવાડિયાં પછી ખલીફનો જવાબ આવ્યો :

'આ બધાં પુસ્તકોની શીખ કુરાનના જણાવ્યા પ્રમાણે હશે અથવા કુરાનના જણાવ્યાથી ઊલટી હશે. જો કુરાનના જણાવ્યા પ્રમાણે હોય તો આ પુસ્તકો અર્થ વગરનાં છે, કારણ કે કુરાનમાં બધું છે. જો કુરાનની શીખથી ઊલટી હોય તો આ પુસ્તકો નુકસાનકારક છે. આથી એમનો નાશ કરવો જોઈએ'.

યુક્લિડ અને ટૉલેમિની હસ્તલિખિત પ્રતો બચાવી. ઉપરાંત પાપુસની (Pappus) પ્રત પણ બચાવી. બાકીના ડાભના કાગળના વીંટાઓની બધી જ હસ્તલિખિત પ્રતોનો જનરલ અમરૂએ નાશ કરવાનો હુકમ કર્યો. આ હુકમ પ્રમાણે એલેકઝાન્દ્રિયાના પ્રત્યેક સ્નાનાગારના પાણીને ગરમ કરવા માટે આ વીંટાઓ મોકલી આપ્યા. છ મહિના સુધી આ વીંટાઓ 4000 સ્નાનાગારનાં પાણીને ગરમ કરવા માટે વપરાયા. તાડનાં પાન ઉપર લખાયેલી પ્રતો આગ પ્રકટાવવાની શરૂઆત માટે વાપરવામાં આવી. અમૂલ્ય પુસ્તકો અને પુસ્તકાલય જતાં એલેકઝાન્દ્રિયાનો આત્મા ગયો !!. દુનિયા માટે પણ અમૂલ્ય ખજાનો ગયો. એલેકઝાન્દ્રિયાથી આરબો અને અમરૂ દૂર રહ્યા અને કૈરોની નજીક તેમણે નવું આરબ સંસ્કૃતિકેન્દ્ર સ્થાપ્યું.

* * *

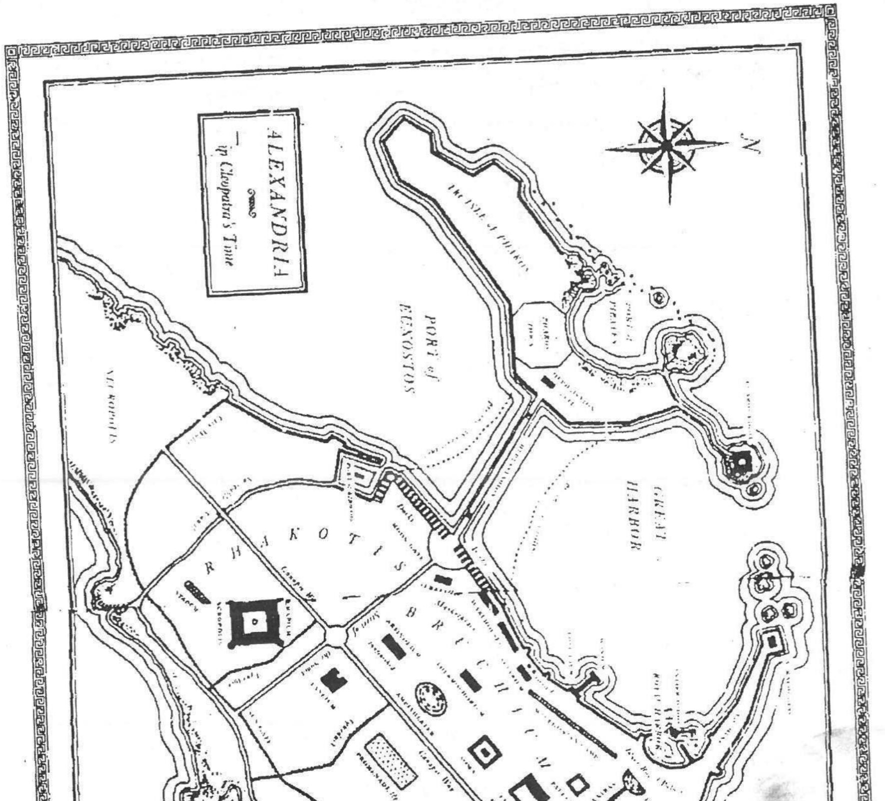
સર્વત્ર ગોળાકાર

હું રાસગરબાના વિશ્વદર્શનમાં રાચનારો છું. રાસ, ગરબા, ગરબી, એટલે કૂંડાળે ફરતાં ગવાતાં ને નચાતાં ગીતો સૌરાષ્ટ્ર-ગુજરાતમાં છે, મારવાડ-રાજસ્થાનમાં છે, કચ્છ-સિંધમાં છે, કૂર્ગોમાં અને સાંથાલોમાં છે.

કૂંડાળું છે સમૂહજીવનનું પ્રતીક, કલાની પરિપૂર્ણ ને બલિષ્ઠ રેખા. ગગનમાં, ક્ષિતિજ પર, સાગરપાળે કે વૃક્ષરાજિની ઘટાએ ઘટાએ, જલે-સ્થલે, પુષ્પે-પાંદડે, દલે દલે, સર્વત્ર ગોળાકાર, વર્તુલ, મરોડ. માનવીઓનાં મન ગોળાકારે મોહ્યાં, કલામાં, કસબમાં, જીવનનું લાલિત્ય ઉચ્ચારનારી દરેક રચનામાં.

ઝવેરચંદ મેઘાણી

[શાંતિ બરફીવાળા સંપાદિત પુસ્તક 'રાસકુંજ' : 1934]


ALEXANDRIA
in Cleopatra's Time
N
PORT of EUNOSTOS
GREAT HARBOR
RHAKOTIS
BRUCHIUM
LAKE MAREOTIS

પ્રકરણ 2

યુક્લિડીયન ભૂમિતિ (Euclidean Geometry)

2.0 પ્રાસ્તાવિક

યુક્લિડની (ઈ.સ. પૂર્વે 330-ઈ.સ. પૂર્વે 270) ભૂમિતિથી આપણે પરિચિત છીએ. યુક્લિડનાં માતાપિતા વિષે કે યુક્લિડ ક્યાં જન્મ્યા હતા તેની માહિતી નથી. તે ગ્રીસમાં જન્મ્યા હોય તેવું પણ બને. શક્યતા છે કે યુક્લિડ એથેન્સમાં પ્લેટોના વિદ્યાર્થીઓ પાસે ગણિત શીખ્યા હોય, કારણ કે જે ગણિતશાસ્ત્રીઓના કામ ઉપર એલિમેન્ટસ્ લખાયાં છે તેમાંના મોટાભાગના એથેન્સમાં રહેતા અને ગણિત શીખવતા. સિકંદરે (મહાન એલેકઝાન્ડર, Alexander - the Great) ફક્ત તેર જ વર્ષના ટૂંકા ગાળામાં (ઈ.સ. પૂર્વે 336-ઈ.સ. પૂર્વે 323) ખૂબ જ મોટું સામ્રાજ્ય સ્થાપ્યું. ભારતનું પંજાબ, અફઘાનિસ્તાન, ઈરાન, ઈજિપ્ત વગેરે જીતી લીધાં. બત્રીસ વર્ષની નાની વયમાં ગુજરી ગયા. સિકંદરના મૃત્યુ વખતે જ તેમના ગ્રીક સેનાપતિ ટોલેમીને ઈજિપ્ત સોંપવામાં આવ્યું અને વખત જતાં તેઓએ ઈજિપ્તના રાજા બનીને રાજ કર્યું અને તેમના વંશજોએ ઈ.સ. પૂર્વે 31 સુધી રાજ કર્યું. સિકંદરના મૃત્યુ પછી વીસ વર્ષ સુધી સિકંદરના વારસદારો અને તેમના ગ્રીક સેનાપતિઓ વચ્ચે સામ્રાજ્ય પચાવી પાડવા હરીફાઈ થઈ અને આખરે સિકંદરનું સામ્રાજ્ય ત્રણ ભાગમાં વહેંચાઈ ગયું. પહેલો ભાગ ઈજિપ્ત, જ્યાં ટોલેમી રાજા બન્યા. ટોલેમીને એલેકઝાન્ડ્રિયામાં (હાલના ઈજિપ્તમાં) પ્લેટોની વિદ્યાપીઠથી સરસ વિદ્યાપીઠ બનાવવી હતી. ગ્રીસના સારામાં સારા વિદ્વાનોને આમંત્રણ આપ્યાં. યુક્લિડે એલેકઝાન્ડ્રિયામાં ગણિત ભણાવવાનું શરૂ કર્યું અને ગણિતની સ્કૂલ સ્થાપી. તેમણે એલિમેન્ટ્સની તેર પુસ્તિકાઓ એલેકઝાન્ડ્રિયામાં લખેલી. ઈજિપ્ત તે સમયે ગ્રીક કોલોની હતી અને ગણિતનો વિકાસ પણ ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓએ કરેલો હોઈ ઈ.સ. પૂર્વે 300 માં આ પુસ્તિકાઓ ગ્રીક ભાષામાં લખાયેલી. રાજા ટોલેમીએ યુક્લિડને પૂછેલું કે, "ભૂમિતિ ભણવાનો એલિમેન્ટ્સથી બીજો કોઈ ટૂંકો રસ્તો ખરો ?" તેના જવાબમાં યુક્લિડે કહ્યું કે, "ભૂમિતિ ભણવા માટે કોઇ રાજમાર્ગ નથી."

યુક્લિડ પાસે કોઈ ભાઈ ભૂમિતિ શીખતા હતા, અને પહેલું પ્રમેય ભણી રહ્યા પછી તેમણે યુક્લિડને પૂછ્યું : "આ ભણવાથી મને શું મળશે ?" તુરત જ યુક્લિડે તેમના નોકરને બોલાવીને કહ્યું : "આ ભાઈને ત્રણ પેન્સ આપો, કારણ કે તેમને ભણવા બદલ

કંઈક મળવું જોઈએ.'' આ દંતકથા છે. લોકશાહીની શરૂઆત ઈ.સ. પૂર્વે 600 માં એથેન્સથી થયેલી અને સાથે સાથે ગુલામો રાખવાની પ્રથા પણ હતી. પુરુષોનું જ મહત્ત્વ એ સમયના સમાજમાં હતું. સ્ત્રીઓ માટે હાલના જેવી કોઈ સ્વતંત્રતા ન હતી. બ્રિટિશરો માટે ભારત, દક્ષિણ આફ્રિકા, કેન્યા વગેરેની જેમ બ્રિટિશ કોલોની હતી તેમ સિંકદરનો જીતેલો પ્રદેશ ગ્રીક કૉલોનીમાં ફેરવાઇ ગયો અને આ કૉલોનીઓમાં ગ્રીક લોકો તેમના રીતરિવાજ પ્રમાણે જ રહેતા.

2.1 એલિમેન્ટ્સ

એલિમેન્ટ્સની તેર પુસ્તિકાઓમાં 1 થી 6 પુસ્તિકાઓ ભૂમિતિ, 7 થી 11 મૂલ પૂર્ણાંક અને 11 થી 13 ઘનભૂમિતિ પર છે. યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સની શરૂઆત વ્યાખ્યાઓ (Definitions), ગૃહીત સિદ્ધાંતો (Postulates) અને સામાન્ય અભિપ્રાયો (Common Notions) થી કરે છે. આ પછી વિધાનો (Propositions) આપે છે, જેને હાલમાં આપણે પ્રમેયો (Theorems) કહીએ છીએ. યુક્લિડની લખવાની રીતનો ખ્યાલ આવે તે માટે "ધી થર્ટીન બુક્સ ઓફ યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સ (The thirteen Books of Euclid Elements)'' સર ટી. એચ. હીથ (Sir T. H. Heath) ના પુસ્તકમાંથી ભાષાંતર કરેલું છે. કુલ 23 વ્યાખ્યાઓ છે. જરૂર મુજબની અને શરૂઆતની થોડીક વ્યાખ્યાઓ નીચે મુજબ છે. (આ ભાષાંતર છે.)

(1) A point is that which has no part.
બિંદુને કોઈ ભાગ નથી.

(2) A line is breathless length.
રેખા પહોળાઈ વગરની લંબાઈ છે.

(3) રેખાને છેડે બિંદુઓ છે.

(4) સુરેખા એ રેખા છે કે તેની ઉપરના બિંદુઓ સમાન રીતે (evenly) ગોઠવાયેલાં છે.

(5) સપાટી (surface) એ છે કે જેને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ છે.

(15) વર્તુળ એ એક રેખાથી ઘેરાયેલી સમતલ આકૃતિ છે કે જેમાં આકૃતિમાં રહેલા એક બિંદુમાંથી આ રેખા ઉપર દોરેલી બધી જ રેખાઓ એકબીજાની બરાબર હોય છે.

છેલ્લે,

(23) સમાંતર રેખાઓ એ છે કે જે એક જ સમતલમાં આવેલી છે અને બંને દિશામાં અનંત સુધી લંબાવતાં કોઈપણ દિશામાં એકબીજાને મળતી નથી.

ત્રેવીસ વ્યાખ્યાઓ પછી યુક્લિડ નીચેના પાંચ ગૃહીત સિદ્ધાંતો (Postulates) આપે છેઃ (આ ભાષાંતર છે.)

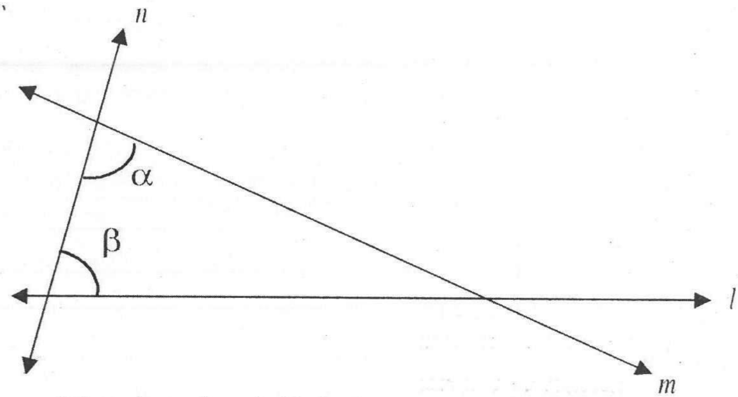
(1) કોઈ બિંદુથી બીજા કોઈ બિંદુ સુધી સુરેખા દોરી શકાય.

(2) સતત રીતે મર્યાદિત સુરેખા તૈયાર થઈ શકે.

(3) કોઈપણ કેન્દ્ર અને અંતર લઈને વર્તુળ દોરી શકાય.

(4) બધા જ કાટખૂણાઓ એકબીજાને સરખા છે.

(5) બે સુરેખા ઉપર પડતી સુરેખા જો કોઈ બાજુએ એવા ખૂણા બનાવતી હોય કે જેમનો સરવાળો 180^0 થી ઓછો હોય તો તે બાજુએ આ બંને સુરેખાઓને અનંત સુધી લંબાવવામાં આવે તો તેઓ મળે છે.



રેખા n એ રેખાઓ l અને m ને છેદે છે. જો આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણેના ખૂણા α અને β નો સરવાળો 180^0 થી ઓછો થાય તો રેખા l અને m આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે છેદે.

આકૃતિ 2.1.1

આ પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત સદીઓ સુધી વાદવિવાદનું કારણ રહ્યો છે. તે વિશે આગળ જોઈશું.

યુક્લિડની પ્રસ્તાવના નીચેના પાંચ સામાન્ય અભિપ્રાયો (Common Notions) સાથે પૂરી થાય છે. (આ ભાષાંતર છે.)

(1) વસ્તુઓ એક જ વસ્તુને સરખી હોય તો તે વસ્તુઓ એકબીજાને સરખી છે.

(2) જો સરખામાં સરખું ઉમેરાય તો કુલ સરખું છે.

(3) જો સરખામાંથી સરખું બાદ કરીએ તો શેષ સરખી છે.

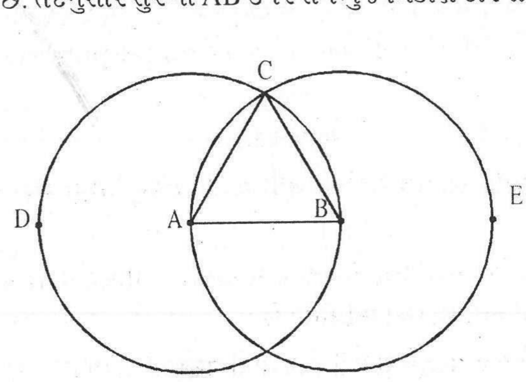
(4) વસ્તુઓ જે એકબીજાને બરાબર મળતી આવે તે એકબીજાને સરખી છે.

(5) આખું ભાગ કરતાં વધારે છે.

યુક્લિડે વ્યાખ્યાઓ, ગૃહીત સિદ્ધાંતો, સામાન્ય અભિપ્રાયો અને તર્કશાસ્ત્રનો ઉપયોગ કરીને ભૂમિતિની આકૃતિઓનો સંબંધ સાબિત કર્યો. આ સંબંધોને યુક્લિડ વિધાનો (Propositions) કહે છે, જ્યારે આપણે એને પ્રમેયો (Theorems) કહીએ છીએ. આ વિધાનોની સાબિતી માટેનાં દરેક પગલાં સ્પષ્ટ રીતે પુરવાર કરેલાં છે. ભૂમિતિનાં કોઈ કોઈ પ્રમેયો (વિધાનો) ગધેડાને પણ ખબર પડે તેવાં છે, જ્યારે ઘણાં કલ્પનામાં પણ આવે તેવાં નથી. ગધેડાને ત્રિકોણ આકારના વાડામાં ગમે તે ખૂણે રાખો અને બીજા કોઈપણ ખૂણે ઘાસ રાખો. ગધેડો બે બાજુઓના લાંબા રસ્તે જવાના બદલે સીધી એક જ બાજુએથી ઘાસ પાસે પહોંચી જશે. ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે છે. ભૂમિતિનું આ વિધાન (પ્રમેય) છે. જ્યારે પાયથાગોરસના પ્રમેયના પરિણામનો ખ્યાલ સેંકડો વર્ષ સુધી માનવજાતને આવ્યો ન હતો. આ પ્રમેય સાબિતી વગર માનવું અઘરું છે. પાયથાગોરસનું પ્રમેય 47 મું વિધાન છે જ્યારે પાયથાગોરસના પ્રમેયનું વિરોધી પ્રમેય 48 મું વિધાન છે. આવાં તો ઘણાં વિધાનો (પ્રમેયો) છે.

યુક્લિડની લખવાની રીતના પરિચય માટે તેનું સૌથી પહેલું વિધાન (પ્રમેય) જોઈશું. આ વિધાન રચનાના સ્વરૂપમાં છે. (આ ભાષાંતર છે.)

વિધાન 1 : આપેલી મર્યાદિત સુરેખા ઉપર સમભુજ ત્રિકોણ દોરવો. મર્યાદિત સુરેખા AB આપેલી છે. તદનુસાર સુરેખા AB ઉપર સમભુજ ત્રિકોણ દોરવાનો છે.



આકૃતિ 2.1.2

કેન્દ્ર A અને અંતર AB લઈને વર્તુળ BCD દોરો. (Post. 3). ફરીથી કેન્દ્ર B અને અંતર BA લઈને વર્તુળ ACE દોરો. (Post. 3). C બિંદુ કે જ્યાં બંને વર્તુળો એકબીજાને છેદે છે ત્યાંથી બિંદુઓ A અને B ને સુરેખાઓ CA અને CB થી જોડો. (Post. 1).

હવે બિંદુ A વર્તુળ BCD નું કેન્દ્ર હોવાથી AC બરાબર AB છે. (Def. 15). ફરીથી, બિંદુ B વર્તુળ CAE નું કેન્દ્ર હોવાથી BC બરાબર BA છે. (Def. 15). પણ CA બરાબર AB છે તે પુરવાર કર્યું. આથી દરેક સુરેખાઓ CA, CB બરાબર AB છે, અને વસ્તુઓ એક જ વસ્તુને એકબીજાને સમાન છે. (C.N.1). આથી CA બરાબર CB પણ છે.

આથી ત્રણ સુરેખાઓ CA, AB અને BC એકબીજાના બરાબર છે. આથી ત્રિકોણ ABC સમભુજ છે, અને તે આપેલી મર્યાદિત સુરેખા AB ઉપર રચેલો છે.

જે કરવાનું હતું તે થઈ ગયું.

વ્યાખ્યાઓ, ગૃહીત સિદ્ધાંતો, સામાન્ય અભિપ્રાયો પ્રસ્તાવનામાં આપીને અને આનો ઉપયોગ સાબિતીઓમાં દરેક પગલે બતાવીને સુંદર શરૂઆત કરી છે. આપણી આધુનિક પદ્ધતિ પણ આ જ છે. એલિમેન્ટ્સ જાણે કે આજની પદ્ધતિ પ્રમાણે લખાયું હોય તેમ લાગે છે. ઉત્તમ પુસ્તકોની ખાસિયત છે કે ગમે ત્યારે આધુનિક લાગે !! પચીસસો વર્ષ પહેલાં લખાયેલી આવી સુંદર પુસ્તિકાઓના લેખક માટે ખૂબ જ ઊંચુ માન ઊપજ્યા વગર ન રહે. વિધાન (પ્રમેય) યુક્લિડ તેની રીતે કહે છે. પહેલાં સામાન્ય શબ્દોમાં જણાવે છે અને બીજી વખતે ચોક્કસ રીતે બિંદુઓ, રેખાઓ અને ખૂણાઓ વગેરે લઈને જણાવે છે. સ્પષ્ટતા અને સંયુક્ત રીતે દલીલોને આગળ ધપાવવાને કારણે ઘણી સદીઓ સુધી આ પુસ્તિકાઓ આદર્શ પાઠ્યપુસ્તિકાઓ તરીકે રહી છે.

આ સાબિતીમાં દરેક પગલું ગૃહીત સિદ્ધાંત, વ્યાખ્યાઓ કે સામાન્ય અભિપ્રાયના કારણે છે. પણ ... આ સાબિતીમાં ખરેખર C બિંદુનું અસ્તિત્વ છે કે જ્યાં વર્તુળો એકબીજાને છેદતાં હોય ? જો બે વર્તુળો C બિંદુએ છેદતાં સાબિત થઈ ન શકે તો વર્તુળોને છેદવાનું ગૃહીત સિદ્ધાંત તરીકે લેવું જોઇએ.

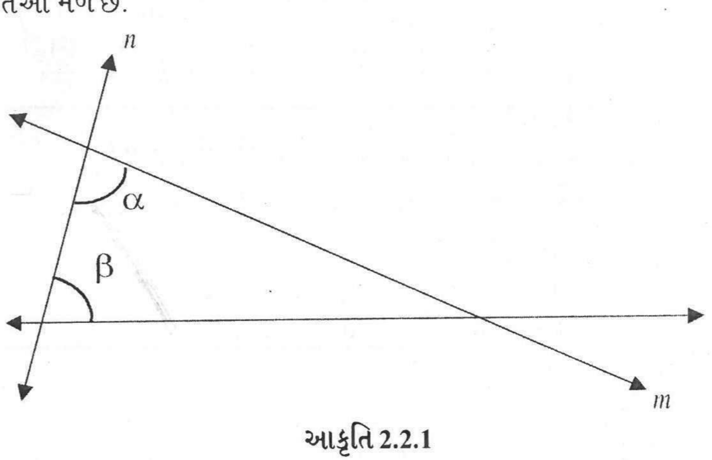
યુક્લિડ લંબાઈ AB બરાબર લંબાઈ BA કોઇ જગ્યાએ અગાઉ જણાવ્યા સિવાય માની લે છે.

આ યુક્લિડની ટીકા નથી, પણ ગણિતની સાબિતી માટે છેલ્લા બે હજાર વર્ષમાં બદલાયેલો અભિપ્રાય છે.

યુક્લિડના ગૃહીત સિદ્ધાંતો (Postulates) આધુનિક દ્રષ્ટિબિંદુ માટે અપૂરતા હોઇ તેને બરાબર કરવા જતાં ગણિતમાં ફરીથી નવો પ્રાણ આવ્યો. આ માટે ડેવિડ હિલબર્ટે (David Hilbert), જ્યૉર્જ બરખોફે (George Birkhoff) અને એસ. એમ. એસ. જી.એ (School Mathematics Study Group) સંતોષકારક રીતે પૂરતા ગૃહીત સિદ્ધાંતો અલગ અલગ રીતે વિકસાવ્યા કે જેથી યુક્લિડના ભૂમિતિના પ્રમેયોની સાબિતી સંતોષકારક રીતે આપી શકાય. જૂના જમાનામાં સામાન્ય રીતે કોઈપણ જાતની કેળવણી માટે એલિમેન્ટ્સની શરૂઆતની પુસ્તિકાઓ ભણવી જરૂરી હતી. તે જમાનામાં વિદ્યાર્થીઓને વિધાન (પ્રમેય) માટે કઇ પુસ્તિકા અને તેનો નંબર તે યાદ રાખવું પડતું, જેમકે 'યુક્લિડ 1.17 થી' નો અર્થ યુક્લિડની પુસ્તિકા 1 ના વિધાન (પ્રમેય) 17 થી. ભૂમિતિના આવા શિક્ષણમાં સુધારો કરવા અને એલિમેન્ટ્સના વિકલ્પ માટે Mathematical Association of Great Britain સ્થપાયેલું. આ પછી ભૂમિતિનાં હજારો પુસ્તકો એલિમેન્ટ્સના બદલે પાઠ્યપુસ્તકો તરીકે આવ્યાં.

2.2 પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત

બે સુરેખાને કોઈ સુરેખા કાપે કે જેથી એક બાજુએ અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o થી ઓછો હોય તો તે બાજુએ આ બંને સુરેખાઓને લંબાવવામાં આવે તો તેઓ મળે છે.



આકૃતિ 2.2.1

આ પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત છે. એક જ સમતલમાં આવેલી બે સુરેખાઓ એકબીજાને મળે છે કે એકબીજાથી દૂર જાય છે કે એકબીજાને સમાંતર છે તેની કસોટી

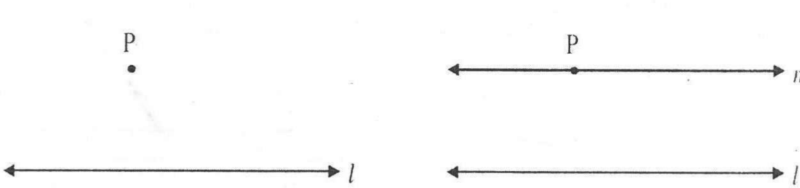
કરે છે. પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતે ફક્ત ગણિતની નહિ, પણ સારાયે વિજ્ઞાનની પ્રગતિમાં ખૂબ જ ફાળો આપ્યો છે. યુક્લિડના સમયમાં પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત અને સમાંતર રેખાઓ તદ્દન નવાં હશે.

બીજા બધા ગૃહીત સિદ્ધાંતોની સરખામણીમાં પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત યુક્લિડે ગૂંચવણભરી રીતે વર્ણવ્યો છે. આનું શું કારણ હશે ? આપણને આનો કોઇ જવાબ મળતો નથી. એટલું જરૂરથી કહી શકાય કે યુક્લિડને આ ગૃહીત સિદ્ધાંતથી પૂરો સંતોષ ન હોઈને, તેને નાછૂટકે જ વાપર્યો છે. પહેલાં 28 પ્રમેયોમાં આ ગૃહીત સિદ્ધાંત યુક્લિડે વાપર્યો જ નથી. આથી 1 થી 28 પ્રમેયોની ભૂમિતિ નિરપેક્ષ ભૂમિતિ (Absolute Geometry) તરીકે ઓળખાય છે. ઘણા બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓને આ ગૃહીત સિદ્ધાંતે ખૂબ જ વિચારતા કરી દીધા. પહેલો પ્રશ્ન આ સિદ્ધાંતની જરૂર ખરી ? જો આ ગૃહીત સિદ્ધાંતની જરૂર હોય તો આને બીજી કોઈ સરળ રીતે દર્શાવી શકાય ?

આ ગૃહીત સિદ્ધાંતની જરૂર નથી તે સાબિત કરવા માટે આ પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત 1 થી 4 ગૃહીત સિદ્ધાંતોથી મેળવી શકાય તેમ સાબિત કરવું જોઈએ. આ સાબિત કરવા ગણિતશાસ્ત્રીઓએ બે હજાર વર્ષ સુધી મરણિયા પ્રયાસ કર્યા, પણ સફળ થઈ ન શક્યા અને આખરે સાબિત થયું કે આ ગૃહીત સિદ્ધાંત અન્યોથી સ્વતંત્ર છે.

બીજી બાજુએ આ પાંચમા સિદ્ધાંતને બીજી સરળ રીતે દર્શાવવાનો પહેલો પ્રયત્ન પ્રોકલસે (Proclus), એલિમેન્ટ્સ લખાયા પછી સાતસો વર્ષે કર્યો, જે હાલ પ્લેફેર (Playfair) ગૃહીત સિદ્ધાંત તરીકે ઓળખાય છે.

પ્લેફેરનો સિદ્ધાંત : રેખા l ઉપર ન હોય તેવા કોઈપણ બિંદુ P માંથી રેખા l ને સમાંતર અનન્ય રેખા m દોરી શકાય.



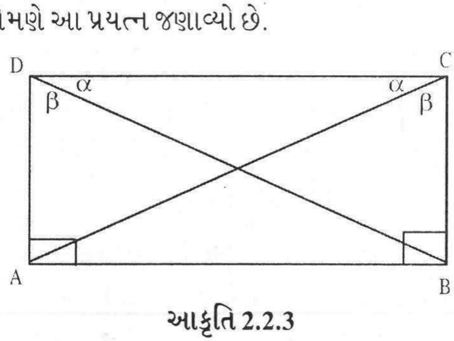
આકૃતિ 2.2.2

પ્લેફેરનો સિદ્ધાંત અને યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત સમાનાર્થી છે, એટલે કે પ્લેફેરનાં સિદ્ધાંતમાંથી યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત મેળવી શકાય અને યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતમાંથી પ્લેફેરનો સિદ્ધાંત મેળવી શકાય. જો બિંદુ P

માંથી રેખા l ને સમાંતર રેખા દોરી ન શકાય અથવા તો P બિંદુમાંથી રેખા l ને એક કરતાં વધારે સમાંતર રેખાઓ દોરી શકાય તો યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતનો ભંગ થયો તેમ ગણી શકાય.

યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત યુક્લિડના પહેલા ચાર ગૃહીત સિદ્ધાંતમાંથી મેળવવાનો પહેલો પ્રયત્ન ટોલેમીએ બીજી સદીમાં કરેલો, ત્યારબાદ પ્રોકલસે પણ પાંચમી સદીમાં કર્યો. બગદાદના વિદ્વાન થાબીટ ઈબ્ન ક્યુરાહે (Thabit Ibn Quarrah) નવમી સદીમાં કર્યો. અરે, જાણીતા કવિ, તત્ત્વજ્ઞાની, ગણિતશાસ્ત્રી અને ખગોળશાસ્ત્રી ઓમર ખય્યામે (Omar Khayyam) પણ કરેલો. લગભગ બધા જ એક જ પ્રકારની ભૂલ કરતા. જ્યારે ગૉસ (Gauss) ઈ.સ. 1795 માં ગોટિન્ગનમાં વિદ્યાર્થી હતા ત્યારે તેમને યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતમાં રસ હતો. ગૉસના પ્રોફેસર અબ્રાહમ કેસ્ટનર (Abraham Kastner) યુક્લિડના ગૃહીત સિદ્ધાંતોના ઈતિહાસ ઉપર સાહિત્ય ભેગું કરતા હતા અને તેમનો વિદ્યાર્થી જ્યૉર્જ ક્લુગેલ (George Kluegel) યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત, યુક્લિડના પહેલા ચાર ગૃહીત સિદ્ધાંતો ઉપર આધાર રાખે છે તે સાબિત કરવાના અઠ્ઠાવીસ પ્રયત્નો નિષ્ફળ થવાનાં કારણો ઉપર મહાનિબંધ લખતા હતા. છતાં જે માટે ગૉસને શંકા હતી તે માટે કેસ્ટનર કે દુનિયા તૈયાર ન હતી. યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતના વિકલ્પે બીજું પણ હોઈ શકે અથવા યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત સર્વત્ર સાચો ન પણ હોઈ શકે. આના જવાબમાં કેસ્ટનરે જણાવ્યુ કે, તરંગી માણસો જ યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતના સાચાપણામાં શંકા રાખે.

આ બધા પ્રયત્નોમાં નોંધવા જેવા બે પ્રયત્નો જોઈશું. ઈ.સ. 1733 માં ઈટાલીના રોમન કેથોલિક સોસાયટીના સભ્ય અને પાદરી ગિરોલેમો સેકચેરિ (Girolamo Saccheri) જ્યારે પેવિઆમાં (Pavia) ગણિતના અધ્યાપક હતા ત્યારે તેમણે 'યુક્લિડ ફ્રીડ ઓફ એવરી ફ્લૉ (Euclid Freed of Every Flaw)' નામની નાની પુસ્તિકા લખી અને તેમાં તેમણે આ પ્રયત્ન જણાવ્યો છે.



આકૃતિ 2.2.3

ચતુષ્કોણ ABCD માં $AD = BC$ અને $\angle DAB = \angle ABC = 90^o$ છે. આ ચતુષ્કોણ આકૃતિ 2.2.3 માં આપેલો છે અને સેકચેરિ ચતુષ્કોણ તરીકે ઓળખાય છે. AC અને BD ને જોડો. ΔABD અને ΔACB એકરૂપ હોઈને $AC = BD$ અને $\angle ADB = \angle ACB = \beta$ થશે. ત્રણે બાજુઓ $AD = BC$, $AC = BD$ અને $CD = CD$ હોઈને ΔADC અને ΔBDC એકરૂપ થશે. આથી $\angle BDC = \angle ACD = \alpha$ થશે. આથી $\angle ADC = \angle BCD$ છે. આ ખૂણાઓ માટે ત્રણ શક્યતાઓ છે.

(1) $\angle ADC = \angle BCD < 90^o$ (અતિવલયી ભૂમિતિ) (Hyperbolic Geometry)

(2) $\angle ADC = \angle BCD = 90^o$, યુક્લિડીય ભૂમિતિ (Euclidian Geometry)

(3) $\angle ADC = \angle BCD > 90^o$, ઉપવલયી ભૂમિતિ (Elliptic Gemetry)

સેકચેરિનો ખ્યાલ

(1) $\angle ADC = \angle BCD < 90^o$ અને (2) $\angle ADC = \angle BCD > 90^o$ લેવાથી પરસ્પર વિરોધી પરિણામો મળે છે તેમ સાબિત કરવાનો હતો, અને આથી $\angle ADC = \angle BCD = 90^o$ થાય. આ રીતે યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત જરૂરી પ્રમેય તરીકે સાબિત થાય. $\angle ADC = \angle BCD < 90^o$ લઈને તેમણે અતિવલયી ભૂમિતિના ઘણાં પ્રમેયો મેળવ્યા પણ તેમનો ખ્યાલ યુક્લિડને સાચો સાબિત કરવાનો હોઈ, દલીલમાં ભૂલ ન જોઈ શકવાના કારણે વિરોધી પરિણામો મેળવ્યાં.

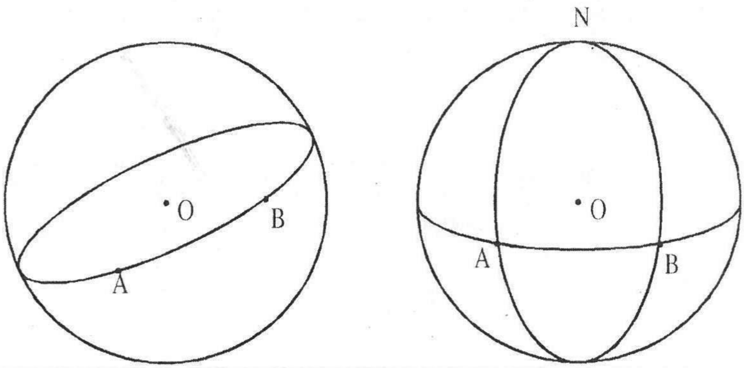
આવો જ પ્રયત્ન લેમ્બર્ટે (Lambert Johann, 1728-1777) ચતુષ્કોણ ABCD માં $\angle A = \angle B = \angle C = 90^o$ લઈને કરેલો. $\angle D < 90^o$ અથવા $\angle D > 90^o$ લઈને આગળ વધ્યા. $\angle D < 90^o$ લઈને સેકચેરિએ મેળવેલાં બધાં પરિણામો મેળવ્યાં અને જે સમતલમાં આવું બને તે સમતલના ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o થી ઓછો થાય તેમ સાબિત કરેલું. તેમને ઝાંખો ખ્યાલ હતો કે ભૂમિતિની સપાટી એવી હોઈ શકે કે જેના ઉપર યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંત વગર બધું જ સાચું હોય પણ યુક્લિડનો પાંચમો સિદ્ધાંત સાચો ન હોય. લેમ્બર્ટને ક્લુગેલના

મહાનિબંધમાં રસ હતો.

લેમ્બર્ટનો જન્મ વિશાળ કુટુંબમાં થયેલો અને જરૂરિયાતના કારણે તેમના પિતાના દરજીના ધંધામાં જોડાયા અને સાથે સાથે ગણિતમાં રસ ચાલુ રાખેલો. લેમ્બર્ટ તેજસ્વી હોવાની સાથે સાથે તરંગી પણ હતા. કઢંગો પોશાક પહેરતા અને એવું માનતા કે કોઈની સાથે વાત કરવાનો રસ્તો સામસામે નથી પણ બંને વચ્ચે કાટખૂણે છે. લિયોનાર્ડ ઓયલરે (Leonard Euler) ખૂબ જ ઉત્સાહથી પ્રુસ્સિઅન એકેડમી ઓફ સાયન્સિસમાં (Prussian Academy of sciences) નિમણૂક માટે લેમ્બર્ટનું નામ સૂચવેલું, પણ રાજા ફ્રેડરીક બીજાએ (Fraderick II) લેમ્બર્ટને મળ્યા પછી નિમણૂકની ના પાડી. રાજાએ લેમ્બર્ટને મળ્યા પછી તેમના મિત્રને કહેલું કે, તેઓ પ્રુસ્સિયાના બુડથલમાં બુડથલ માણસને મળ્યા, પણ પછી લેમ્બર્ટની ઊંડી સમજનો ખ્યાલ આવતાં રાજાએ લેમ્બર્ટ માટેનો અભિપ્રાય બદલ્યો. રસપ્રદ લેમ્બર્ટે બ્રહ્માંડ (Cosmology), તત્ત્વજ્ઞાન અને ગણિતના જ્ઞાનમાં મોટો ફાળો આપ્યો. ઈ.સ. 1766 માં પાંચમાં ગૃહીત સિદ્ધાંત ઉપર 'થિયરિક ડર પેરેલેલિનિયન (Theoric Der Parallelinien)' નામનું પુસ્તક લખેલું, પણ તે સંતોષકારક રીતે પ્રશ્ન ઉકેલી ન શક્યા હોવાથી પ્રસિદ્ધ ન કરેલું. તેમના મૃત્યુ બાદ ઈ.સ. 1788 માં આ પુસ્તક પ્રસિદ્ધ થયું.

આપણો સામાન્ય અનુભવ $\angle ADC = \angle BCD = 90^{\circ}$ ની તરફેણ કરે છે, પણ બીજા રસ્તાઓ આપણે ધારીએ તેટલા ગેરવ્યાજબી નથી. બીજા રસ્તાઓ પણ માનવ અનુભવની નજીક છે.

ધારો કે, પૃથ્વી બરાબર ગોળાકાર છે. આ ગોળાકાર પૃથ્વીના કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતા સમતલો પૃથ્વીની સપાટીને જે મોટા વર્તુળોમાં છેદે છે તેમને પૃથ્વી પરના



આકૃતિ 2.2.4

મહાવૃત્તો કહીએ. ધારો કે, આપણે આ ગોળાકાર ઉપર બિંદુ A થી B બિંદુ જવાનું હોય તો ટૂંકામાં ટૂંકો રસ્તો કયો ? બિંદુ A, B અને O માંથી સમતલ દોરીએ જે ગોળાકાર સપાટીને મહાવૃત્તમાં છેદે છે. આ વર્તુળની નાની ચાપને રસ્તે જઈએ તો તે રસ્તો બિંદુઓ A અને B ને જોડતો ટૂંકામાં ટૂંકો હશે તે સાબિત કરી શકાય. જો બિંદુઓ A અને B વ્યાસના છેડે હોય તો ગમે તે બાજુનું ચાપ લઈ શકાય. વહાણવટીઓ માટે પ્રમાણમાં લાંબાં અંતરો માટે દરિયો સપાટ નથી. મહાવૃત્તોના માર્ગોથી વહાણવટીઓ પરિચિત છે. એ જ રીતે હવાઈજહાજો લૉસ એન્જેલસથી લંડન એ બંને શહેરોને આકૃતિ 2.2.5 માં જોડતી ચાપને રસ્તે ઊડતાં હોય છે. આથી એકલી યુક્લિડની ભૂમિતિ માનવને ઉપયોગી થતી નથી.

આકૃતિ 2.2.5

યુક્લિડની ભૂમિતિમાં બે રેખાઓ સમાંતર ન હોય તો ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદે છે, જ્યારે ગોળાકાર ઉપરનાં ગમે તે બે મહાવૃત્તો એકબીજાને બે બિંદુઓમાં છેદે છે.

આકૃતિ 2.2.4 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પૃથ્વીના ગોળામાં ઉત્તર ધ્રુવ N માંથી વિષુવવૃત્ત ઉપર બે લંબ મહાવૃત્તો દોરો, જે વિષુવવૃત્તને A અને B માં છેદે. આ બંને બિંદુઓ A અને B ને મહાવૃત્તના ચાપથી જોડો. ΔABN ની બાજુઓ સુરેખાને બદલે વર્તુળનું ચાપ છે. આ ત્રિકોણના ખૂણાઓ સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાઓ લઈશું. ΔABN માં ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^{0} થી વધારે છે.

* * *

પ્રકરણ 3

અતિવલયી ભૂમિતિ (Hyperbolic Geometry)

3.0 પ્રાસ્તાવિક

યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત બીજા યુક્લિડના ગૃહીત સિદ્ધાંતોમાંથી મેળવી શકાતો નથી. આ સાબિત કરવાનું માન સ્વતંત્ર રીતે કામ કરતા ત્રણ માણસોને મળે છે : રશિયાના નિકોલાઇ ઇવાનોવિચ લોબાચેવ્સ્કીને (Nicolai Ivanovich Lobachevsky 1793-1856), હંગરીના જેનોસ બોલ્યાઇને (Janos Bolyai 1802-1860) અને જર્મનીના કાર્લ ફ્રેડરીચ ગૉસને (Karl Fredrich Gauss 1777-1855). ઈ.સ. 1829 માં લોબાચેવ્સ્કીએ રશિયન ભાષાના સામયિક કાઝાન મેસેન્જરમાં (Kazan Messen-ger) ઓન ધી પ્રિન્સિપલ્સ ઓફ જ્યોમેટ્રી (On the Principles of Geometry) નામનો લેખ લખ્યો. આ લેખમાં તેમણે સુસંગત સમતલ ભૂમિતિની વાત લખી, કે જેમાં રેખા ઉપર ન હોય તેવા બિંદુમાંથી આ રેખાને ન મળતી અનેક રેખાઓ દોરી શકાય.

તદ્‌ઉપરાંત આ રેખાઓથી બનતા ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 થી ઓછો હોય છે. આ નવા સમતલમાંના (યુક્લિડ સમતલથી ભિન્ન પ્રકારનું) ત્રિકોણોની ત્રિકોણમિતિનાં સૂત્રો મેળવેલાં. તેમણે આ નવી ભૂમિતિને લગતા ઘણાબધા લેખો 25 વર્ષ સુધી લખ્યા. તેઓ સફળ વહીવટીકર્તા હતા. આથી યુનિવર્સિટી ઓફ કાઝાનના પ્રમુખ પણ બનેલા.

બોલ્યાઇએ આના જેવાં જ પરિણામ "Supplement Containing the Absolutely True Scíence of Space, Independent of the Truth Falsity of Euclid's Fifth Postulate (That can never be decided A Priori)" નામના લેખમાં લખ્યાં. જેનોસ બોલ્યાઇના પિતાજી ફાર્કસ્ બોલ્યાઇ (Farkas Bolyai) પણ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. ફાર્કસ્ બોલ્યાઇ ગૉસની સાથે ભણેલા અને ગૉસના મિત્ર પણ હતા. ફાર્કસ્ બોલ્યાઇએ ઇ.સ. 1832 માં યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતને સાબિત કરવાના પ્રયત્નોની મોજણી કરતું પુસ્તક લખેલું અને આ પુસ્તકના પરિશિષ્ટમાં જેનોસ બોલ્યાઇએ ઉપર જણાવેલો લેખ લખેલો. ફાર્કસ્ બોલ્યાઇએ ગૉસને તેમના પુત્રના કામથી વાકેફ કર્યા અને તેના જવાબમાં ગૉસે લખ્યુ કે,

"તમારા પુત્રે લીધેલો રસ્તો, જે પરિણામોએ તે દોરાયો છે તે બધું કામ મારા

ચિંતન કરેલા રસ્તાને લગભગ મળતું આવે છે. હું આ ચિંતન છેલ્લા ત્રીસ અથવા પાંત્રીસ વર્ષથી કરું છું. આથી હું તદ્દન જડ (Stupefied) જેવો બની ગયો છું. જ્યાં સુધી મારા કામને લાગે વળગે છે ત્યાં સુધી મેં બહુ જ ઓછુ લખ્યું છે. હું જીવું ત્યાં સુધી એને પ્રસિદ્ધ કરવાનો ઈરાદો નથી. ખરેખર આપણે જે સવાલોની વાતો કરીએ છીએ તેનો મોટાભાગના લોકોને ખ્યાલ નથી અને આ વિષય ઉપર જેને જણાવ્યું છે તેમાંથી ઘણા ઓછા લોકોને રસ છે. મારા જૂના મિત્રનો પુત્ર મારાથી અસાધારણ રીતે આગળ છે તે જાણીને મને આનંદ થાય છે.”

(R. Bonola, Non-Euclidean Geometry, Dover Publication, New York 1955). જેનોસે આ પછી કંઈ પણ કામ પ્રસિદ્ધ કર્યુ નથી. આ પત્રની શરૂઆતના ભાગે કદાચ તેમને નિરાશ કર્યા હોય. જરૂર, ગૉસ ખરેખર મોટા ગણિતશાસ્ત્રી હતા તેવા મોટા માણસ આ પત્રની શરૂઆતમાં લાગતા નથી. ખરેખર, પત્રની શરૂઆતનો ભાગ ઉમાશંકર જોષીની જાણીતી પંક્તિઓ -

“મોટાઓની અલ્પતા જોઈ થાક્યો
નાનાની મોટાઈ જોઈ જીવું છું.”

- ની યાદ આપી જાય છે.

અત્યારના ગણિતના ઈતિહાસકારોના પુરાવા પ્રમાણે ગૉસે યુક્લિડિયેતર ભૂમિતિની શક્યતાની શોધ સૌથી પહેલાં કરેલી, પણ બોલ્યાઇ અને લોબાચેવ્સ્કીએ 1830 માં લગભગ સાથે જ કામ પ્રસિદ્ધ કર્યુ. આ બંને જણને યુક્લિડની ભૂમિતિ માટેનો બે હજાર વર્ષ સુધી ચાલેલો પૂર્વગ્રહ તોડવાની પ્રતિષ્ઠા મળે છે.

બાર વર્ષની ઉંમરે ગૉસ યુક્લિડ એલિમેન્ટ્સની ટીકા કરતા અને તે પણ પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતની. ગૉસનો પ્રશ્ન પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત સાચો છે કે નહિ તે હતો. અગાઉના ગણિતશાસ્ત્રીઓની જેમ ગૉસે આ ગૃહીત સિદ્ધાંતને સરળ અને ગમે તેવા સ્વરૂપમાં મૂકવા પ્રયત્ન કર્યો નથી. તેમજ બીજા બધા ગૃહીત સિદ્ધાંતમાંથી પાંચમો ગૃહીત મેળવવા પણ પ્રયત્ન કર્યો નથી. પંદર વર્ષે તેમણે મનથી સ્વીકારી લીધેલું કે, તર્કની રીતે સુસંગત ભૂમિતિ હોઇ શકે કે જેમાં યુક્લિડનો પાંચમો ગૃહીત સિદ્ધાંત સાચો ન પણ હોય. ઈ.સ. 1813-16 જ્યારે ગૉસ પ્રોફેસર તરીકે ગાણિતિક ખગોળશાસ્ત્ર (Mathematical Astronomy) ભણાવતા હતા ત્યારે યુક્લિડના સમયથી રાહ જોવાતી હતી તેવી મહત્ત્વની અતિવલયી ભૂમિતિમાં (Hyperbolic Geometry) ત્રિકોણના ભાગોને લગતાં સમીકરણો મેળવેલાં. ઈ.સ. 1824 માં બધી થિયરી તૈયાર કરેલી અને ટોરીનસને (F.A. Taurinus) લખેલું :

"(ત્રિકોણના) ત્રણે ખૂણાનો સરવાળો 180^0 થી ઓછો છે તેમ ધારવાથી આપણી (યુક્લિડીય) ભૂમિતિથી તદ્દન જુદી ભૂમિતિ મળે છે અને તે ભૂમિતિ સુસંગત છે અને મેં તે સંતોષકારક રીતે વિકસાવી છે." ... ગૉસે આ કામ કોઈ સામયિકમાં પ્રસિદ્ધ કર્યું નથી અને ટોરીનસ અને બીજા મિત્રોને જાહેર ન કરવા જણાવતા. આમ કેમ ? ક્રિટિક ઓફ પ્યોર રીઝન માં ઈમ્મેન્યુઅલ કેન્ટ (Immanual Kant) યુક્લિડિયન અંતરીક્ષને વિચારો માટે અનિવાર્ય કહે છે. કેન્ટનો પ્રભાવ વિશાળ હતો અને તેમના અનુયાયીઓનો વર્ગ પણ મોટો હતો. વિજ્ઞાનનો ઈતિહાસ કહે છે કે, દ્રઢ ખ્યાલો અચળ ખ્યાલો બને છે. પુરાણા સમયમાં પૃથ્વી ગોળ છે તે કહેવું, કે તેના વિષે લખવું એ પાદરીઓનો ભારે ખોફ વહોરવાની તૈયારી વગર ન બનતું. ગૉસના ઉછેરના કારણે આ બધાની સામે પડવાની હિંમત ગૉસ ન કરી શકે તે સમજાય તેવી વાત છે.

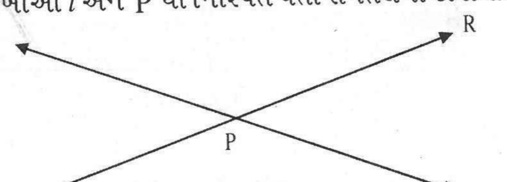
3.1 સમાંતર રેખાઓ

હવે આપણે અતિવલયી ભૂમિતિનાં અગત્યનાં શરૂઆતનાં કેટલાંક પ્રમેયો જોઈશું. એ નોંધી લઈએ કે, યુક્લિડના એલિમેન્ટ્સમાં (Elements) પાંચમી પૂર્વધારણા દાખલ કરતા પહેલાં જે 28 પ્રમેયો સાબિત કરેલાં હતાં તે નિરપેક્ષ ભૂમિતિનાં છે. આ બધાં પ્રમેયો યુક્લિડીય તેમજ યુક્લિડિયેતર ભૂમિતિમાં પણ સાચાં છે. આવાં પ્રમેયો પૈકી એક પ્રમેયનો ઉલ્લેખ કરીને શરૂ કરીએ.

પ્રમેય (પાશ (Pasch)) 3.1.1. : ત્રિકોણના કોઈ શિરોબિંદુમાંથી કોઈ કિરણ ત્રિકોણની અંદરના ભાગમાં જતું હોય તો તે ત્રિકોણની સામી બાજુને છેદશે જ.

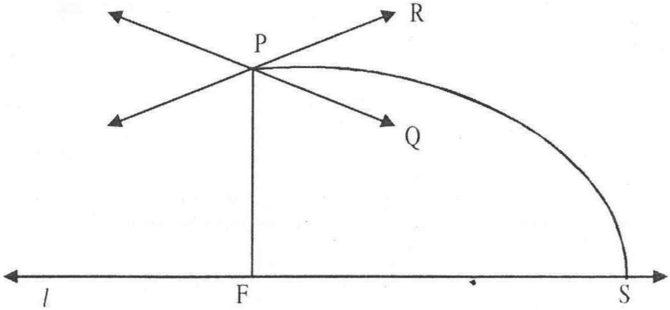
આ પ્રમેય પાશ (Pasch) નો સિદ્ધાંત પણ કહેવાય છે. અતિવલયી ભૂમિતિમાં સમાંતરની પૂર્વધારણાને સ્થાને નીચેની પૂર્વધારણા લેવાય છે.

પૂર્વધારણા : જો બિંદુ P એ રેખા l ઉપર ન હોય તો બિંદુ P માંથી l ને સમાંતર એક કરતાં વધારે રેખાઓ l અને P થી નિશ્ચિત થતા સમતલમાં દોરી શકાય છે.



આકૃતિ 3.1.1

પ્રમેય 3.1.2 : સુરેખા l ઉપર ન હોય તેવા બિંદુ P માંથી સુરેખા l ને સમાંતર અસંખ્ય સુરેખાઓ છે.



આકૃતિ 3.1.2

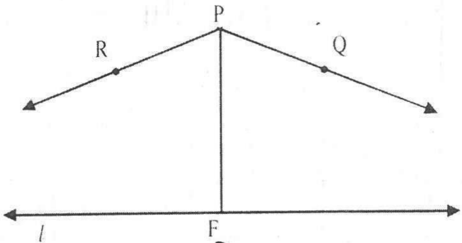
આપેલ : સુરેખા l ઉપર ન હોય તેવા બિંદુ P માંથી સુરેખા l ને સમાંતર PQ અને PR સુરેખાઓ છે.

રચના : બિંદુ P માંથી સુરેખા l ને PF લંબ દોરો.

સાબિતી : PQ અને PR વચ્ચે અનંત સુરેખાઓ છે. ધારો કે, સુરેખાઓ PQ અને PR વચ્ચેની સુરેખા PS સુરેખા l ને S બિંદુએ છેદે છે. પાશના સિદ્ધાંત પ્રમાણે ΔPFS માં સુરેખા PQ શિરોબિંદુ P માંથી પસાર થતી હોઈ સુરેખા l ને છેદે છે. સુરેખા PQ સુરેખા l ને સમાંતર હોઈ આ શક્ય નથી. આથી વિરોધી હકીકત સાબિત કરી. આનો અર્થ સુરેખા PS સુરેખા l ને છેદતી નથી. આ રીતે સુરેખા PQ અને સુરેખા PR વચ્ચેની અનંત સુરેખાઓ સુરેખા l ને છેદતી નથી.

Q.E.D.

બિંદુ P માંથી પસાર થતી સુરેખાઓને બે ભાગમાં વહેંચી શકાય. એક ભાગની બધી જ સુરેખાઓ સુરેખા l ને છેદે છે અને બીજા ભાગની સુરેખાઓ સુરેખા l ને છેદતી નથી. આ વિભાજન સુરેખાઓ PQ અને PR કરે છે. સુરેખા PQ સુરેખા l ને ન છેદતી સૌથી પહેલી રેખા દર્શાવેલ દિશામાં છે. તે જ રીતે સુરેખા PR સુરેખા l ને ન છેદતી સૌથી પહેલી રેખા દર્શાવેલ દિશામાં છે.

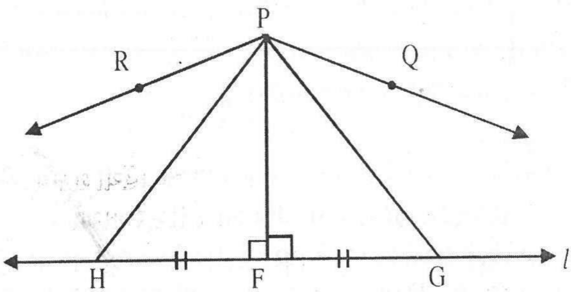


આકૃતિ 3.1.3

વ્યાખ્યા : અતિવલયી ભૂમિતિમાં સુરેખા ઉપર ન આવેલા બિંદુમાંથી આપેલી સુરેખાને બંને દિશાની સૌથી પહેલી ન છેદતી સુરેખાઓને આપેલી સુરેખાને સમાંતર સુરેખાઓ કહેવામાં આવે છે. બાકીની બંને વચ્ચેની સુરેખાઓને ન છેદતી સુરેખાઓ કહેવામાં આવે છે.

આ વ્યાખ્યા પ્રમાણે સુરેખા PQ સુરેખા l ને જમણી બાજુની સમાંતર સુરેખા અને સુરેખા PR સુરેખા l ને ડાબી બાજુની સમાંતર સુરેખા કહેવાય છે. સુરેખા PQ અને સુરેખા PR વચ્ચેની સુરેખાઓ l સુરેખાને ન છેદતી સુરેખાઓ કહેવાય છે. બિંદુ P માંથી સુરેખા l ઉપર લંબ દોરો. $\angle RPF$ અને $\angle QPF$ એ PF અંતર માટે સમાંતર ખૂણાઓ તરીકે ઓળખાય છે.

પ્રમેય 3.1.3 : એક જ અંતરના સમાંતર ખૂણાઓ સરખા અને કાટખૂણથી નાના હોય છે.

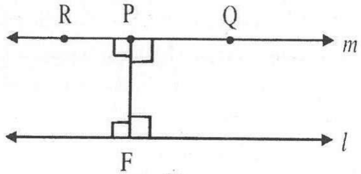


આકૃતિ 3.1.4

બિંદુ P સુરેખા l ઉપર નથી. સુરેખાઓ PQ અને PR સુરેખા l ને જણાવેલ દિશામાં સમાંતર રેખાઓ છે. PF સુરેખા l ને લંબ છે. $\angle FPR$ અને $\angle FPQ$ સમાંતર ખૂણાઓ છે.

સાબિતી : ધારો કે, $\angle FPR < \angle FPQ$. $\angle FPG$ એ રીતે દોરીએ કે જેથી $\angle FPG = \angle FPR$ થાય. સુરેખા l ઉપર આકૃતિ 3.1.4 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે FH = FG લઈએ અને PH જોડીએ. ΔFPH અને ΔFPG એકરૂપ હોઈને $\angle FPH = \angle FPG = \angle FPR$ થાય જે અશક્ય છે. કારણકે PR સુરેખા l ને સમાંતર છે. આથી આપણી ધારણા $\angle RPF < \angle QPF$ ખોટી છે, એજ રીતે $\angle QPF < \angle RPF$ ખોટું છે. આથી $\angle RPF = \angle QPF$ છે.

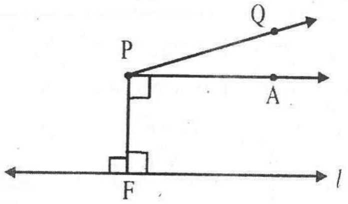
(1) ધારો કે, $\angle FPR = \angle FPQ = 90^o$ છે.



આકૃતિ 3.1.5

આકૃતિ 3.1.5 માં સુરેખા QR સુરેખા l ને સમાંતર છે. સુરેખા QR ફક્ત એક જ સુરેખા છે જ્યારે PQ અને PR બે સુરેખાઓ l સુરેખાનો સમાંતર આપેલી. આથી $\angle FPR = \angle FPQ = 90^o$ ન થાય.

(2) ધારો કે, $\angle FPR = \angle FPQ > 90^o$ છે.



આકૃતિ 3.1.6

આકૃતિ 3.1.6 માં સુરેખા PQ અને સુરેખા l ની વચ્ચે સુરેખા PA પણ સુરેખા l ને સમાંતર થશે જે આપેલ સુરેખા PQ સુરેખા l ને સમાંતર છે. તેનાથી વિરોધી બને છે. આથી $\angle FPR = \angle FPQ > 90^o$ શક્ય નથી. સમાંતર ખૂણાઓ

$\angle FPR = \angle FPQ \geq 90^o$ શક્ય ન હોઈને $\angle FPR = \angle FPQ < 90^o$ છે.

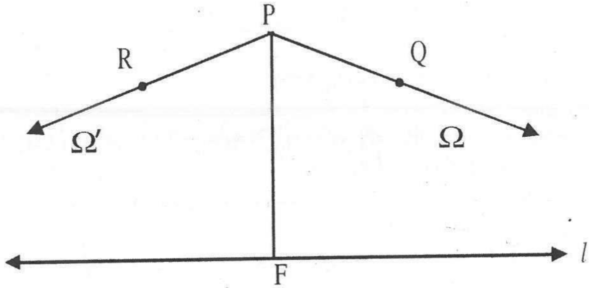
Q.E.D.

આ વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંતના કારણે સમાંતર ખૂણાઓ 90^o થી ઓછા છે જ્યારે યુક્લિડના સમાંતર ખૂણાઓ 90^o છે.

3.2 ઓમેગા ત્રિકોણો

અતિવલયી ભૂમિતિમાં બે સમાંતર રેખાઓમાં કોઈપણ બિંદુ સામાન્ય નથી, પણ બંને સમાંતર રેખાઓ કાલ્પનિક બિંદુઓમાં મળે છે તેમ કહીશું.

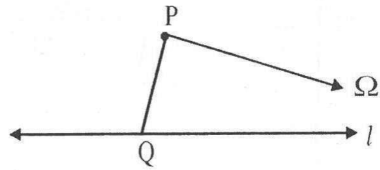
વ્યાખ્યા : અતિવલયી ભૂમિતિમાં બે સમાંતર રેખાઓ કાલ્પનિક બિંદુઓમાં છેદે છે.



આકૃતિ 3.2.1

બિંદુ P સુરેખા l ઉપર નથી. P માંથી દોરેલી જમણી બાજુની સુરેખા PQ સુરેખા l ને સમાંતર છે અને આકૃતિ 3.2.1 માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાલ્પનિક બિંદુ Ω માં છેદે છે. તે જ પ્રમાણે બિંદુ P માંથી ડાબી બાજુની સુરેખા PR સુરેખા l ને સમાંતર છે અને કાલ્પનિક બિંદુ Ω′ માં છેદે છે. Ω અને Ω′ ભિન્ન કાલ્પનિક બિંદુઓ છે.

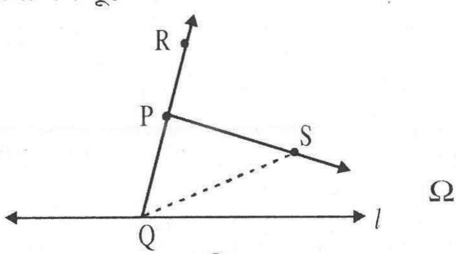
જેનું એક શિરોબિંદુ કોઈ કાલ્પનિક બિંદુ હોય તેવા ત્રિકોણને ઓમેગા ત્રિકોણ કહેવાય છે. આકૃતિ 3.2.2 માં ઓમેગા ત્રિકોણ QPΩ છે. સામાન્ય સમજ પ્રમાણે તે ત્રિકોણ લાગતો નથી, પણ તેના ગુણધર્મો સામાન્ય ત્રિકોણ જેવા જ છે.



આકૃતિ 3.2.2

પ્રમેય 3.2.1 : પાશનો ગૃહીત સિદ્ધાંત ઓમેગા ત્રિકોણ માટે પણ સાચો છે, તદુપરાંત ઓમેગા ત્રિકોણના કોઈપણ બિંદુ માટે સાચો છે.

પ્રમેય 3.2.2 : કોઈપણ ઓમેગા ત્રિકોણ $QP\Omega$ માં QP ને લંબાવતાં જે બહારનો ખૂણો બને તે અંદરના બંને ખૂણાઓ કરતાં મોટો છે.



આકૃતિ 3.2.3

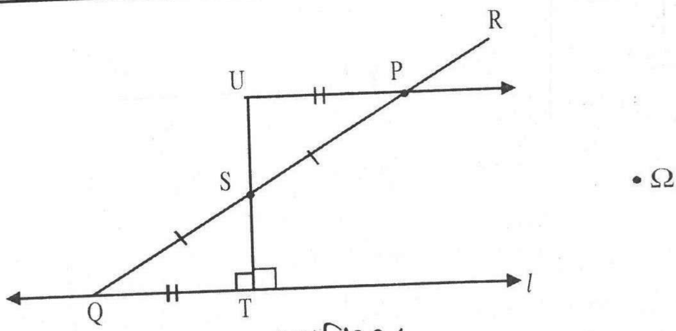
સાબિત કરવાનું : $\angle RP\Omega > \angle PQ\Omega$, $\angle RP\Omega > \angle P\Omega Q$

સાબિતિ : ધારો કે, $\angle RP\Omega < \angle PQ\Omega$ છે. રેખા $P\Omega$ ઉપર S બિંદુ લો, કે જેથી $\angle RP\Omega = \angle PQS$ થાય.

આકૃતિ 3.2.3માં ΔPQS માં $\angle RPS > \angle PQS = \angle RP\Omega$. આ શક્ય નથી.

આથી $\angle RP\Omega < \angle PQ\Omega$ નથી.

ધારો કે, $\angle RP\Omega = \angle PQ\Omega$ છે.

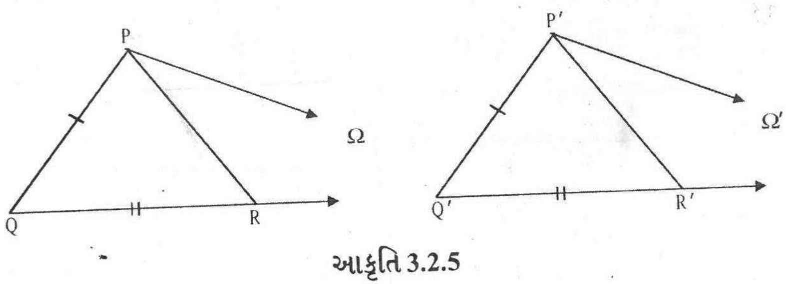


આકૃતિ 3.2.4

PQ નું મધ્યબિંદુ S લઈને આકૃતિ 3.2.4માં બતાવ્યા પ્રમાણે ST, QΩ ને લંબ દોરો. PΩ સુરેખા પર PU = QT લઈને US જોડો. $\angle RP\Omega = \angle PQ\Omega = \angle UPS$ હોઈ, ΔUPS, ΔQST સમરૂપ છે. આથી $\angle USP = \angle QST$ થાય. આથી UST સુરેખાં છે અને $\angle SUP = \angle STQ = 90^o$. UT અંતર માટે UΩ અને TΩ નો સમાંતર ખૂણો $\angle TU\Omega$, 90^o થી ઓછો હોવો જોઈએ; જ્યારે $\angle TU\Omega = \angle SUP = 90^o$. આથી $\angle RP\Omega \neq \angle PQ\Omega$ છે. આથી $\angle RP\Omega > \angle PQ\Omega$. આ જ રીતે $\angle RP\Omega > \angle P\Omega Q$ સાબિત થઈ શકે.

Q.E.D.

પ્રમેય 3.2.3: ઓમેગા ત્રિકોણો QPΩ અને Q′P′Ω માં જો PQ = P′Q′ હોય અને $\angle Q = \angle Q'$ અથવા $\angle P = \angle P'$ હોય તો બંને ત્રિકોણો એકરૂપ હોય.



આકૃતિ 3.2.5

આપેલ : PQ = P′Q′, $\angle PQ\Omega = \angle P'Q'\Omega'$.

સાબિત કરવાનું : $\Delta PQ\Omega \equiv \Delta P'Q'\Omega'$

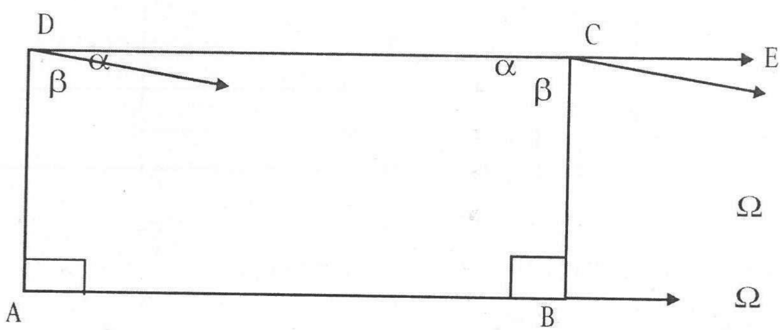
સાબિતિ : ધારો કે, $\angle QP\Omega > \angle Q'P'\Omega'$ છે. આથી $Q\Omega$ ઉપર બિંદુ R એ રીતે લઈએ, કે જેથી $\angle QPR = \angle Q'P'\Omega'$ થાય. આકૃતિ 3.2.5માં બતાવ્યા પ્રમાણે $Q'\Omega'$ ઉપર R' એ રીતે લઈએ કે જેથી $QR = Q'R'$ થાય.

$\Delta PQR \equiv \Delta P'Q'R'$ હોઈને $\angle QPR = \angle Q'P'R' = \angle Q'P'\Omega'$ છે, જે શક્ય નથી. આથી $\angle QP\Omega > \angle Q'P'\Omega'$ શક્ય નથી. આ જ રીતે સાબિત કરી શકાય કે $\angle QP\Omega < \angle Q'P'\Omega'$ શક્ય નથી. આથી $\angle QP\Omega = \angle Q'P'\Omega'$ હોઈ $\Delta PQR \equiv \Delta P'Q'\Omega'$.

આ જ રીતે જ્યારે $\angle QP\Omega = \angle Q'P'\Omega'$ હોય ત્યારે $\Delta QP\Omega \equiv \Delta Q'P'\Omega'$.

Q.E.D.

પ્રમેય 3.2.4: સેકચેરિ ચતુષ્કોણમાં $\angle ADC = \angle BCD < 90^o$ છે.



આકૃતિ 3.2.6

સાબિતિ : બિંદુઓ C અને D માંથી AB ને સમાંતર રેખાઓ દોરો, જે રેખા AB ને આકૃતિ 3.2.6માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કાલ્પનિક બિંદુ Ω માં મળશે.

Δ^s $AD\Omega$ અને $BC\Omega$ માં $AD = BC$,

$\angle DA\Omega = \angle CB\Omega$ હોઈને $\Delta AD\Omega \equiv \Delta BC\Omega$

$\therefore \angle AD\Omega = \angle BC\Omega$

$\Delta CD\Omega$ માં, $\angle EC\Omega$ બહારનો ખૂણો હોઈને $\angle CD\Omega < \angle EC\Omega$.

આપણે આગળ સાબિત કર્યું, કે $\angle ADC = \angle BCD$ છે.

$$\therefore \angle AD\Omega + \angle CD\Omega = \angle BC\Omega + \angle CD\Omega$$
$$< \angle BC\Omega + \angle EC\Omega$$

$\therefore \angle ADC < \angle BCE$

$\angle ADC = \angle BCD$ હોઈ, $\angle BCD < \angle BCE$ છે.

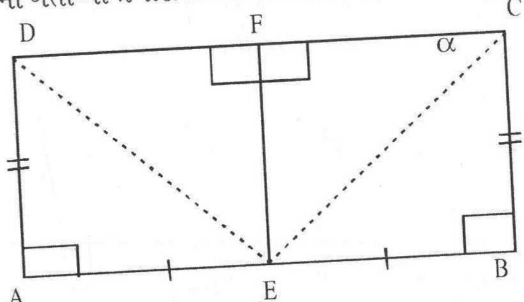
$\angle BCD + \angle BCE = 180^o$ હોઈ $\angle BCD < 90^o$

$\therefore \angle ADC = \angle BCD < 90^o$ Q.E.D.

પ્રમેય 3.2.5: લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણમાં ચોથો ખૂણો 90^o થી ઓછો હોય છે.

સાબિતિ : સેકચેરિ ચતુષ્કોણ ABCD માં AD = BC અને $\angle A = \angle B = 90^o$ છે.

આકૃતિ 3.2.7માં બતાવ્યા પ્રમાણે AB અને CD ના



આકૃતિ 3.2.7

મધ્યબિંદુઓ E અને F ને જોડો. DE અને CE ને જોડો.

$\Delta ADE \equiv \Delta BCE$, આથી DE = CE.

$\therefore \Delta EDF \equiv \Delta ECF$

$\therefore \angle EFD \equiv \angle EFC = 90^o$.

સરળતાથી સાબિત કરી શકાય કે, $\angle AEF = \angle BEF = 90^o$.

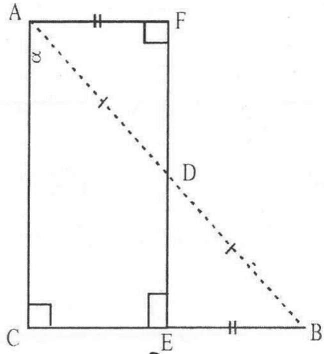
આથી ચતુષ્કોણો AEFD અને EBCF લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણો થશે. પ્રમેય 3.2.4ના કારણે સેકચેરિ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ $\angle ADF = \angle BCF < 90^o$ છે. આથી લેમ્બર્ટ

ચતુષ્કોણનો ચોથો ખૂણો અતિપરવલયીક ભુમિતિમાં 90^{o} થી નાનો છે.

Q.E.D.

3.3 ત્રિકોણો

પ્રમેય 3.3.1 : કાટખૂણ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^{o} થી ઓછો હોય છે.



આકૃતિ 3.3.1

સાબિતિ : કાટખૂણ ત્રિકોણ ABC ના કર્ણ AB ના મધ્યબિંદુ D માંથી DE આકૃતિ 3.3.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે BC ને લંબ દોરો.

$\angle FAD = \angle DBC$ થાય એ રીતે $\angle FAD$ દોરો કે જેથી $AF = BE$ થાય.

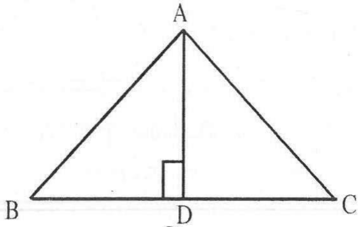
$\Delta AFD \equiv \Delta DEB$ હોઈને $\angle EDB = \angle FDA$ થાય અને

$\angle DFA = \angle DEB = 90^{o}$ થાય. આથી EF સુરેખાનું D મધ્યબિંદુ થાય.

આથી ચતુષ્કોણ CEFA લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણ છે. પ્રમેય 3.2.5ના કારણે

$\angle CAF = \angle CAB + \angle BAF = \angle CAB + \angle CBA < 90^{o}$ થાય. Q.E.D.

પ્રમેય 3.3.2: ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^{o} થી ઓછો હોય છે.



આકૃતિ 3.3.2

સાબિતિ : આકૃતિ 3.3.2માં બતાવ્યા પ્રમાણે ΔABCમાં BCને AD લંબ દોરો. પ્રમેય 3.3.1ના કારણે કાટખૂણ ત્રિકોણ ABD માં $\angle DBA + \angle BAD < 90^{o}$ અને કાટખૂણ ત્રિકોણ DAC માં $\angle DAC + \angle DCA < 90^{o}$.

$\therefore \angle DBA + \angle BAD + \angle DAC + \angle DCA < 180^{o}$

$\therefore \angle CBA + \angle BAC + \angle BCA < 180^{o}$ Q.E.D.

વ્યાખ્યા : $\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$ ને ΔABCની ત્રુટિ કહેવાય છે.

ધારોકે $\angle A + \angle B + \angle C = \frac{5\pi}{6}$ હોય તો ΔABC ની ત્રુટિ $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ થાય.

યુક્લિડિયન ભૂમિતિમાં એકરૂપ ત્રિકોણો સમરૂપ ત્રિકોણો હોય છે, જ્યારે સમરૂપ ત્રિકોણો એકરૂપ હોવા જરૂરી નથી. જ્યારે અતિવલયી ભુમિતિમાં ?

પ્રમેય 3.3.3: જો એક ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ બરાબર હોય તો બંને એકરૂપ ત્રિકોણો છે. (સાબિત કરી જૂઓ)

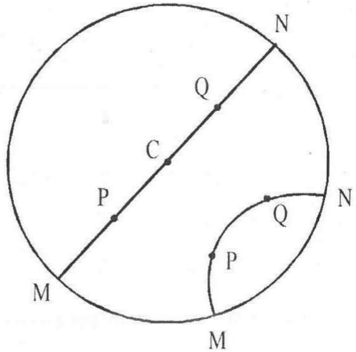
અતિવલયી ભૂમિતિમાં સમરૂપ ત્રિકોણો હોતા જ નથી.

જો P બિંદુ સુરેખા l ઉપર ન હોય તો P બિંદુમાંથી સુરેખા l ને એક કરતાં વધારે સમાંતર રેખાઓ દોરી શકાય. આ ગૃહીત સિદ્ધાંત લેતાં લોબાચેવ્સ્તી, બોલ્યાઇ અને ગૉસે નવું અતિવલયી વિશ્વ શોધી કાઢ્યું. યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતમાં ફક્ત "એક" ના બદલે "એક કરતાં વધારે" લેવાથી યુક્લીડનાં ઘણાં બધાં પ્રમેયો બદલાઇ ગયાં. સૌથી વધારે નજરે પડે તેવું યુક્લિડ ભૂમિતિનું પ્રમેય ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^{o} થાય તે બદલાઈને અતિવલયી ભૂમિતિમાં ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^{o} થી ઓછો થાય તેવું બને છે. જાણે કે ભૂમિતિના ગઢમાં બારીઓના યુક્લિડના કાચ બદલીને અતિવલયીના કાચ નાખ્યા હોય !!

3.4 પોઇન્કેરની સૃષ્ટિ (Poincare Universe)

નવું અતિપરવલયી વિશ્વ જોવાનો કે ઓળખવાનો સરળ રસ્તો શોધવાનું માન યુગેનિયો બેલટ્રામિને (Eugenio Beltrami) મળે છે, અને એનાથીયે વધારે સરળ રસ્તો શોધનાર હેન્રી પોઇન્કેર (Henry Poincare) હતા. સૌથી પહેલાં કેઑસ જોનાર પણ તે હતા. ઘણાંબધાં ક્ષેત્રોમાં અગત્યનું કામ તેમણે કરેલું છે. ગૉસ પછી તે ગણિતના વ્યાપક ક્ષેત્રોમાં કામ કરનાર છેલ્લા ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તદુપરાંત તે સરસ લેખક પણ

હતા. તેમનાં ગણિતને લગતાં પુસ્તકો સામાન્ય પ્રજા જે રીતે નવલકથા કે ડિટેક્ટીવ વાર્તાઓ વાંચતી તે રીતે વાંચતી. ફ્રાંસના પ્રમુખ રેમન્ડ પોઈન્કેર (Raymond Poincare) તેમના સગા કાકાના દીકરા થાય. તેમણે અનંત સમતલને બદલે એક એકમની ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ લીધું જેને આપણે પૉઇન્‌કેરની સૃષ્ટિ કહીશું. વર્તુળની અંદરનાં બિંદુઓ આપણાં બિંદુઓ છે.



આકૃતિ 3.4.1

આ નવા વિશ્વની રેખા બે જાતની છે.

(1) બધા જ વ્યાસ આપણી રેખાઓ છે.

(2) વર્તુળની ચાપ જે પૉઇન્‌કેર વર્તુળને કાટખૂણે કાપે તે પણ આપણી રેખાઓ છે.

આકૃતિઓને એકરૂપ સાબિત કરવા માટે આપણને લંબાઈ અને ખૂણાઓની જરૂર પડે. રેખા ઉપર આવેલાં કોઈપણ બે બિંદુઓ P અને Q વચ્ચેનું અંતર નીચે પ્રમાણે લઈશું.

$$d(\mathrm{P,Q})=\left|\ln\frac{\mathrm{MP/PN}}{\mathrm{MQ/QN}}\right|=\left|\ln\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}\cdot\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{PN}}\right|$$

જ્યાં M, N બિંદુઓએ આપણી રેખા આકૃતિ 3.4.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળને કાટખૂણે છેદે છે અને MP, MQ, QN અને PN બે બિંદુઓને જોડતી યુક્લિડીયન લંબાઇ દર્શાવે છે, તથા ln સંખ્યાઓનું (પ્રાકૃતિક) લૉગેરિધમ છે.

$$d(\mathrm{P,P})=\left|\ln\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}}\cdot\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PN}}\right|=|\ln 1|=0$$

જેમ $\mathrm{Q}\to\mathrm{N}$ તેમ

$$d(\mathrm{P,\ N})=\left|\ln\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}\cdot\frac{\mathrm{NN}}{\mathrm{PN}}\right|\to\infty$$

જેમ P $\to$ M તેમ

$$d(M, Q) = \left|\ln \frac{MM}{MQ} \cdot \frac{QN}{MN}\right| \to \infty$$

આ અંતરો આપણે જોઇએ તે પ્રમાણે છે. કિનારા ઉપરના બિંદુનું અને બીજા કોઈ બિંદુનું અંતર અનંત છે, જે જરૂરી છે.

વર્તુળનાં બે બિંદુઓ P અને Q ગમે ત્યાં આપેલાં હોય, તો

(1) P, Q અને C ત્રણે એક જ રેખા ઉપર હોય, તો P, Q અને C માંથી પસાર થતો વ્યાસ આપણી રેખા થશે.

(2) P, Q અને C ત્રણે સુરેખા ઉપર ન હોય તો આપણે બિંદુઓ P અને Q માંથી ચાપ દોરવી જોઈએ કે જે પૉઇનકેર વર્તુળને લંબ હોય અને ટૂંકામાં ટૂંકી હોય.

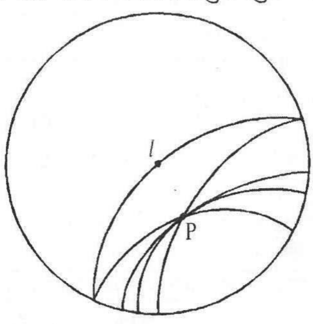
P′ બિંદુ એ રીતે મેળવો કે જેથી $CP' \cdot CP = 1$ થાય.

હવે P, P′ અને Q સુરેખા ઉપર ન હોઈ, આ ત્રણે બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

મેળવી શકાય અને આ વર્તુળ પૉઇન્કેર વર્તુળને કાટખૂણે છેદે છે અને PQ માંથી પસાર થતું ચાપ ટૂંકામાં ટૂંકું હશે તે સાબિત થઈ શકે.

સમાંતર રેખાઓ કોને કહેવી ? ધારો કે, આકૃતિ 3.4.2 માં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખા l આપેલી છે અને રેખા l ઉપર ન હોય તેવુ બિંદુ P આપેલ છે.



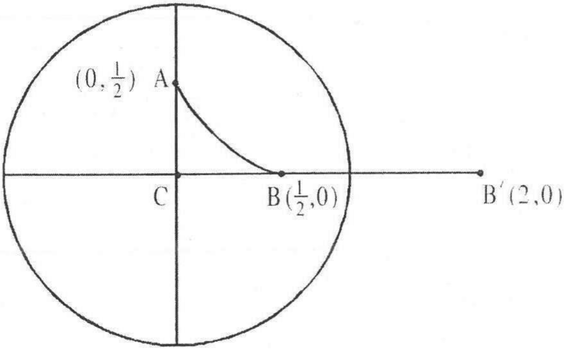
આકૃતિ 3.4.2

P માંથી અનેક રેખાઓ l ને ન છેદનારી દોરી શકાય. જ્યારે બે રેખાઓ દોરી શકાય, કે જે વર્તુળને જ્યાં l છેદે છે ત્યાં છેદે અને P માંથી પસાર થાય. એટલે કે આ રેખાઓ l ને અડકે છે, છેદતી નથી. આ બે રેખાઓ P માંથી પસાર થાય છે અને વર્તુળને રેખા l જ્યાં છેદે છે ત્યાંથી પણ પસાર થાય છે. આ બે રેખાઓ રેખા l ને

સમાંતર રેખાઓ છે. P માંથી પસાર થતી આકૃતિમાં દર્શાવેલી બાકીની રેખાઓ *l* રેખાને ન છેદતી રેખાઓ છે.

જો બે વર્તુળો P બિંદુએ છેદે તો P બિંદુએ આ બંને વર્તુળોને દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના યુક્લિડીયન ખૂણાને આ બંને રેખાઓ (વર્તુળની ચાપો) વચ્ચેનો ખૂણો કહીશું.

આપણે પૉઈન્કેર સૃષ્ટિમાં ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો જોઈએ. સરળતા માટે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આકૃતિ 3.4.3 માં બતાવ્યા પ્રમાણે વ્યાસ ઉપર લઈશું.



આકૃતિ 3.4.3

રેખા AC અને રેખા BC વચ્ચેનો ખૂણો 90^0 છે. બિંદુ $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, Y-અક્ષ ઉપર અને $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ X-અક્ષ ઉપરનાં બિંદુઓ છે. આપણે A અને B માંથી પસાર થતું વર્તુળ શોધવા માટે B′ મેળવવો જોઈએ કે જેથી

$$CB \cdot CB' = 1 \text{ થાય.}$$

B′(2, 0) સરળતાથી મળે. B′(2, 0), $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ અને $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ માંથી પસાર થતા વર્તુળનું સમીકરણ

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{17}{8} \text{ છે.}$$

આ સમીકરણનું x ના સાપેક્ષમાં વિકલન કરતાં

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x-\frac{5}{4}}{y-\frac{5}{4}}$ મળશે. આથી વર્તુળના B બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ

$$m_1 = y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)} = -\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5}$$

રેખા CB નો ઢાળ $m_2 = 0$

$$\therefore \tan\angle ABC = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2 m_1} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \angle ABC = \tan^{-1}\frac{3}{5}$$

આ જ રીતે $\angle CAB = \tan^{-1}\frac{3}{5}$.

આથી

$$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 90^o + 2\tan^{-1}\frac{3}{5} \cong 90^o + 62^o < 180^o$$

થાય.

* * *

આપણે મહાનતાની વધુમાં વધુ સમીપ

ત્યારે પહોંચીએ છીએ,

જ્યારે આપણી નમ્રતા મહાન બને છે.

રવીન્દ્રનાથ ઠાકુર

અનુવાદ : નગીનદાસ પારેખ

પ્રકરણ 4

ઉપવલયી ભૂમિતિ (Elliptic Geometry)

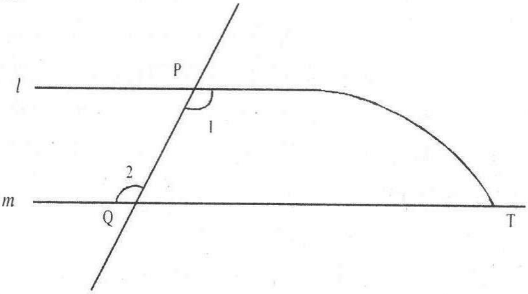
4.0 પ્રાસ્તાવિક

અતિવલયી ભૂમિતિની શોધ બાદ ઘણા દાયકાઓ પછી ઉપવલયી ભૂમિતિની શોધ થઈ. આપણે યુક્લિડના પાંચમા ગૃહીત સિદ્ધાંતના બદલે નીચેનો વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંત લઈએ છીએ.

વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંત : જો બિંદુ P રેખા *l* ઉપર ન હોય તો બિંદુ P માંથી રેખા *l*ને સમાંતર રેખા દોરી ન શકાય.

આ વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંત પ્રમાણે, બધી જ રેખાઓ એકબીજાને છેદે છે, કોઈ રેખાઓ સમાંતર નથી. આપણે ભૂમિતિનું અંદરના એકાંતર ખૂણાનું (Alternate Interior Angle) પ્રમેય તેની સાબિતી સાથે જોઈએ.

પ્રમેય 4.0.1 : જો બે રેખાઓને ત્રાંસી રેખા એ રીતે કાપે કે જેથી અંદરના એકાંતર (alternate) ખૂણાઓ સરખા થાય, તો આ બંને રેખાઓ સમાંતર છે.



આકૃતિ 4.0.1

પક્ષ : રેખાઓ *l* અને *m* ને રેખા PQ એ રીતે કાપે છે કે જેથી $\angle 1 = \angle 2$ થાય.

સાબિતી : ધારો કે, રેખાઓ *l* અને *m* સમાંતર નથી. સમાંતર ન હોવાથી રેખાઓ *l* અને *m*, T બિંદુએ છેદે છે. $\therefore$ Δ PQT માં બહારનો ખૂણો $\angle 2$, અંદરના ખૂણા $\angle 1$ કરતાં વધારે છે, જ્યારે $\angle 1 = \angle 2$ આપેલ છે. આથી આપણી ધારણા *l* અને *m* સમાંતર નથી તે ખોટી છે.

Q.E.D.

કોઈપણ બિંદુ Q માંથી ઓછામાં ઓછી એક સમાંતર સુરેખા *l* દોરી શકાય તેની આ પ્રમેય ખાતરી આપે છે, જે આપણા વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંતથી તદ્દન વિરુદ્ધ છે.

આ પ્રમેય યુક્લિડના પહેલા ચાર ગૃહીત સિદ્ધાંતો ઉપર આધારિત છે. આથી યુક્લિડના પહેલા ચાર ગૃહીત સિદ્ધાંતોમાં ફેરફાર કર્યા સિવાય વિશિષ્ટ ગૃહીત સિદ્ધાંતને અનુકૂળ ભૂમિતિ ઊભી થઈ ન શકે. યુક્લિડના કયા ગૃહીત સિદ્ધાંતમાં ફેરફાર કરવા ? આ પ્રમેય (Alternate Interior Angle Theorem) ત્રિકોણના બહારના ખૂણાના પ્રમેય ઉપર મોટો આધાર રાખે છે અને ત્રિકોણના બહારના ખૂણાનો પ્રમેય એકરૂપ ત્રિકોણો, ખૂણાઓના સરવાળા અને સમતલના રેખા વડે વિભાજન ઉપર આધાર રાખે છે. એકરૂપ ત્રિકોણો અને ખૂણાઓનો સરવાળો ભૂમિતિનું હૃદય ગણાય. આથી કદાચ તેમને બદલવાનું વધારે પડતું ગણાય.

સમતલનું રેખા વડે વિભાજન એ રેખાઓની લંબાઈ અનંત છે તેના ઉપર આધારિત છે. બર્ન્હાર્ડ રિમાન્નને (Bernhard Riemann 1826-1866) ગૉટીન્ગન યુનિવર્સિટીમાં ભણાવવા માટે નોકરી જોઈતી હતી, ત્યારે તેમને શીખવવાની પરીક્ષા માટે ભાષણ આપવું પડતું. આ માટે પહેલી, બીજી અને ત્રીજી પસંદગીના વિષયો આપવા પડતા. સામાન્ય રીતે મોટાભાગના લોકોને તેમની પહેલી પસંદગીનો વિષય મળે. સિલેકશન કમિટિમાં ગૉસ પણ હતા. તેમના જીવનના છેલ્લા દિવસો છે તેમ દાકતરે પણ કહેલું. રિમાન્ને પસંદ કરેલ ત્રીજા વિષયનું ખાસ જ્ઞાન પણ રિમાન્નને ન હતું, ફક્ત તે વિષયમાં રસ હતો. ગૉસે રિમાન્નની પસંદગીમાંથી ત્રીજો વિષય "On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry" પસંદ કર્યો. રિમાન્ને સાત અઠવાડિયાં ખૂબ જ મહેનત કરી અને જૂન 10, 1854 ના રોજ ગોળાને કઈ રીતે દ્વિ-પરિમાણ (two-dimensional) ઉપવલયી અવકાશ કહી શકાય તે બતાવ્યું. પૉઇનકેરની જેમ જ બિંદુ, રેખા અને સમતલનો અર્થ પોતાની રીતે ઘટાવ્યો. સમતલ માટે ગોળાની સપાટી, બિંદુઓ માટે ગોળાની સપાટી પરનાં બિંદુઓ અને રેખાઓ માટે ગોળા ઉપરનાં દીર્ઘ વર્તુળો લીધાં. યુક્લિડીય ભૂમિતિમાં સુરેખાઓ અનંત લંબાઈની હોય છે, જ્યારે ગોળા ઉપરનાં દીર્ઘ વર્તુળોની લંબાઈ અનંત નથી. આથી રિમાન્ને ગૃહીત સિદ્ધાંતમાં થોડોક ફેરફાર સૂચવ્યો. ઉપવલયી ભૂમિતિમાં રેખાઓ અમર્યાદિત લંબાઈની નથી પણ લંબાઈની સીમા નથી. યુક્લિડની ભૂમિતિમાં સમાંતર ન હોય તેવી રેખાઓ ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદે છે. જ્યારે બે દીર્ઘ વર્તુળો ગોળાની સામસામેની બાજુએ બે બિંદુઓમાં છેદે છે. યુક્લિડની ભૂમિતિમાં આપેલાં બે બિંદુઓ જોડી દો. આ

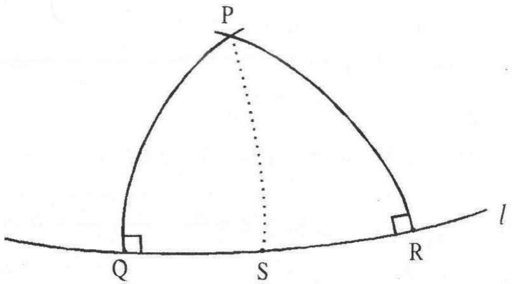
સુરેખા ઉપરનું કોઈપણ બિંદુ આપેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું બિંદુ ગણાય. જ્યારે ગોળા ઉપર આપેલાં બે બિંદુઓને બે બાજુથી દીર્ઘ વર્તુળોની ચાપથી જોડી શકાય. આથી "વચ્ચે હોવું" એમ બરાબર ચોક્કસાઈપૂર્વક કહી ન શકાય. આ પ્રમાણે યોગ્ય સુધારા વધારા ધ્યાનમાં લઈને ઉપવલયી ભૂમિતિ રચી શકાય કે જેમાં સમાંતર રેખાઓ નથી. આ કારણે અતિવલયી ભૂમિતિ અને યુક્લિડીય ભૂમિતિ કરતાં જુદાં પરિણામો મળશે.

4.1 ઉપવલયી ભૂમિતિના ગુણધર્મો

આ પરિણામ અતિવલયી અને યુક્લિડિય ભૂમિતિ કરતાં તદ્દન જુદું છે.

પ્રમેય 4.1.1 : ઉપવલયી ભૂમિતિમાં l કોઈ રેખા હોય, તો ઓછામાં ઓછું એક બિંદુ P હશે કે જે બિંદુ P અને રેખા lના કોઈ પણ બિંદુને જોડતી રેખા lને લંબ છે અને બિંદુ P રેખા lના સર્વે બિંદુથી સરખે અંતરે છે.

સાબિતી :



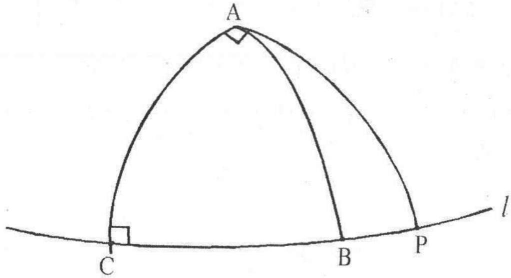
આકૃતિ 4.1.1

રેખા l ઉપર કોઈ પણ બે બિંદુઓ Q અને R લઈએ. Q અને R બિંદુઓએ l રેખાને લંબ દોરો. ઉપવલયી ભૂમિતિમાં સમાંતર રેખાઓ ન હોઈ, આ બંને લંબ કોઈ બિંદુ P એ છેદે છે. P, Q અને R રેખા ઉપર ન હોઈને ત્રિકોણ બનાવે છે અને આ ત્રિકોણમાં $\angle PQR = \angle PRQ$ છે. આથી PQ = PR થશે. રેખા QR નું મધ્યબિંદુ S અને બિંદુ P ને રેખા વડે જોડો. $\Delta PQS \equiv \Delta PSR$ હોઈને $\angle PSQ = \angle PSR = 90^0$ છે, આથી રેખા PS l રેખાને લંબ છે. $\angle PQS = \angle PSQ$ હોઈને $\angle PSQ = \angle PSR = 90^0$ છે. આથી PS = PQ થશે. આથી PQ = PS = PR છે અને Q અને R રેખા l ઉપરનાં કોઈપણ બિંદુઓ હતાં. Q.E.D.

બિંદુ P ને રેખા l નો ધ્રુવ કહેવામાં આવે છે અને બિંદુ P થી રેખા l ઉપરના કોઈપણ બિંદુનું અંતર ધ્રુવ અંતર કહેવાય છે. ઉપરોક્ત સાબિતીમાં અને હવે પછી જ્યાં રેખા કે રેખાખંડ શબ્દ વાપર્યો છે ત્યાં, રેખા ગોળાના પૃષ્ઠ પરની રેખા, એટલે કે ગોળા પરના દીર્ઘ વર્તુળો છે તેમ સમજવાનું છે.

પ્રમેય 4.1.2 : કોઈપણ કાટખૂણ ત્રિકોણમાં, બાકીના બે ખૂણાઓ <, = , > 90^o નો આધાર સામેની બાજુઓ ધ્રુવ અંતર કરતાં ઓછી, સરખી કે વધારે ઉપર આધારિત છે.

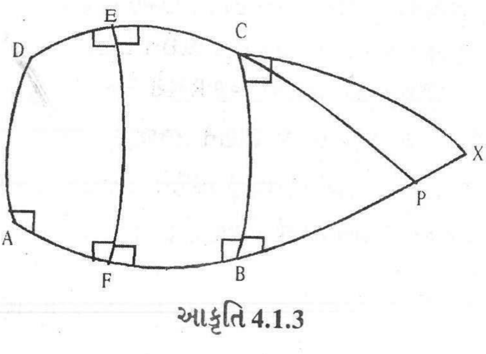
સાબિતી :



આકૃતિ 4.1.2

$\angle ACB = 90^o$ છે. રેખાખંડ AC નાં અંત્ય બિંદુઓ A અને C એ લંબ દોરીને ધ્રુવ બિંદુ P મેળવો. જો P = B હોય તો $\angle CAB = 90^o$ થશે. જો CB < CP હોય તો $\angle CAB < 90^o$ અને જો CB > CP હોય તો $\angle CAB > 90^o$ થશે. Q.E.D.

પ્રમેય 4.1.3 : ઉપવલયીક ભૂમિતિમાં સેકચેરિ ચતુષ્કોણમાં $\angle ADC = \angle BCD > 90^o$ છે.



આકૃતિ 4.1.3

સાબિતી : AD = BC અને $\angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$ આપેલ છે. આપણે સાબિત કર્યું છે કે $\angle ADC = \angle BCD$ છે. CD ના મધ્યબિંદુ E અને AB ના મધ્યબિંદુ F ને જોડો. સાબિત કરી શકાય કે EF, AB અને CD ને લંબ થશે. EC અને FB ને લંબાવતા P બિંદુએ છેદે છે. આથી P બિંદુ રેખા EF નો ધ્રુવ છે. BP < FP હોઈને $\angle BCP < 90^\circ$ છે.

આથી $\angle BCD = \angle ADC > 90^\circ$. Q.E.D.

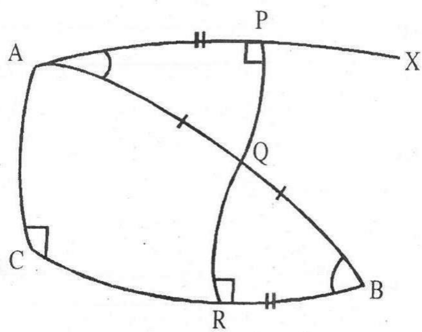
પ્રમેય 4.1.4 : લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણમાં ચોથો ખૂણો 90° થી વધારે છે.

સાબિતી : પ્રમેય 4.1.3 ની આકૃતિમાં EFBC લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણ છે અને $\angle BCE > 90^\circ$ છે.

Q.E.D.

પ્રમેય 4.1.5 : ઉપવલયીક ભૂમિતિમાં કાટખૂણ ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થી વધારે છે.

સાબિતી : ΔABC માં $\angle ACB = 90^\circ$ અને $\angle CAB < 90^\circ$ છે. AB ના મધ્યબિંદુ Q થી CB ને QR લંબ દોરો.



આકૃતિ 4.1.5

AX ને એ રીતે દોરો કે જેથી $\angle XAB = \angle CBA$ થાય. AX ઉપર બિંદુ P એ રીતે લઈએ કે જેથી AP = BR થાય. $\Delta APQ \equiv \Delta RQB$ હોઈને $\angle RQB = \angle PQA$

અને $\angle APQ = 90^o = \angle QRB$ છે. આથી P, Q અને R બિંદુઓ રેખા ઉપર છે અને ACRP લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણ છે. ઉપવલયીક ભૂમિતિના કારણે લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણનો ચોથો ખૂણો $\angle CAP = \angle CAB + \angle BAP$

$$= \angle CAB + \angle CBA > 90^o$$ છે.

આથી $\angle ACB + \angle CAB + \angle CBA > 180^0$ થાય.

Q.E.D.

પ્રમેય 4.1.5 નો ઉપયોગ કરીને નીચેનું પ્રમેય સરળતાથી સાબિત થઈ શકે.

પ્રમેય 4.1.6 : ઉપવલયીક ભૂમિતિમાં ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓનો સરવાળો 180^o થી વધારે છે.

લંબચોરસ અતિવલયી કે ઉપવલયી ભૂમિતિમાં નથી. તે જ રીતે સમરૂપ ત્રિકોણો પણ આ ભૂમિતિઓમાં નથી. જો બે ત્રિકોણોના ખૂણાઓ સરખા હોય, તો આ બંને ભૂમિતિઓમાં ત્રિકોણો એકરૂપ થશે.

4.2 ઉપસંહાર

ત્રણે ભૂમિતિઓ પૂર્વધારણાઓ આધારિત તર્કશાસ્ત્રની દ્રષ્ટિએ સુસંગત, રચનાઓ છે. ભૌતિક દુનિયાનું વર્ણન યુક્લિડિયન ભૂમિતિ ચોકસાઈપૂર્વક કરે છે, જ્યારે સામાન્ય પ્રજાની નજરમાં ઉપવલયી અને અતિવલયી ભૂમિતિઓ દુનિયા સાથે કોઈ લેવા દેવા સિવાય ગણિતશાસ્ત્રીઓની તર્કશાસ્ત્રની ફક્ત રમત જ છે. જરૂરથી એટલું કહી શકાય કે, યુક્લિડની ભૂમિતિ આપણી નાની દુનિયાનું વર્ણન ચોકસાઈપૂર્વક હજારો વર્ષથી કરે છે. ઉત્તર અમેરિકા અને યુરોપમાં ઘણા બધા હવાઈ મુસાફરી કરે છે. ઘણા બધા મુસાફરી કરનારાઓએ અનુભવ્યું છે કે ઉત્તર ધ્રુવ ઉપર જવાથી ઘણા રસ્તાઓ ટૂંકા બની જાય છે. આ ઉપવલયી ભૂમિતિનો સચોટ ઉપયોગ છે. ભૌતિકશાસ્ત્રની દુનિયા માટે જે અનુકૂળ ભૂમિતિ હોય તે આપણે વાપરીએ છીએ. આંઇનસ્ટાઇન જ્યારે ગ્રહોના માર્ગ અને પ્રકાશનાં કિરણોનો અવકાશમાં માર્ગ દર્શાવવા માટે યોગ્ય ભૂમિતિનો વિચાર કરતા હતા ત્યારે, આ ત્રણે ભૂમિતિઓ તેમને આ કામ માટે યોગ્ય ન લાગી. આથી તેમણે રિમાન્નિયન ભૂમિતિ સાપેક્ષવાદ માટે વાપરેલી. આઇનસ્ટાઇનનો સાપેક્ષવાદનો સિદ્ધાંત વિશ્વમાં રહેલ દ્રવ્ય અને ઊર્જા નક્કી થઈ શકે તેમ સૂચવે છે. વિશ્વની મોટા પાયા પરની ભૂમિતિ કઈ હશે? આ વિશ્વની ભૂમિતિ સાપેક્ષવાદ

પ્રમાણે -

(1) જો વિશ્વમાં રહેલ દ્રવ્ય અને ઊર્જા અમુક સંખ્યાથી વધારે હોય તો અતિવલયી હશે.

(2) જો વિશ્વમાં રહેલ દ્રવ્ય અને ઊર્જા અમુક સંખ્યા બરાબર હોય તો તે યુક્લિડની હશે અને

(3) જો વિશ્વમાં રહેલ દ્રવ્ય અને ઊર્જા અમુક સંખ્યાથી ઓછી હોય તો ઉપવલયી હશે

તેમ સૂચવે છે. પૃથ્વીના વાતતાવરણની બહારથી આવતાં સૂક્ષ્મ અંતરકિરણોની પાર્શ્વભૂમિકાના કિરણોત્સર્ગનાં (cosmic microwave background radiation) મોજાંઓથી વૈજ્ઞાનિકો ચોકસાઈથી વિશ્વમાં રહેલ દ્રવ્ય અને ઊર્જા માપી શકે છે. આ માપવામાં ઘણા પ્રકારની ભૂલો હોઈ શકે છે, છતાંયે હાલના પ્રયોગોનાં પરિણામો પ્રમાણે એટલું કહી શકાય કે વિશ્વની મોટા પાયા પરની ભૂમિતિ યુક્લિડની છે. આમાં ભૂલ હોવાની શક્યતા હોવાથી આ આખરી મત નથી. જરૂર થોડાક વખતમાં આપણે વિશ્વની મોટા પાયા પરની ભૂમિતિ ઉપવલયી, યુક્લિડ કે અતિવલયી છે તે ખાતરીપૂર્વક કહી શકીશું.

* * *

For the want of a nail the shoe was lost,
For the want of a shoe the horse was lost,
For the want of a horse the rider was lost,
For the want of a rider the battle was lost,.
For the want of a battle the kingdom was lost -
And all for the want of a hourseshoe - nail.

Benjamin Franklin

(Expanded expert from Poor Richard's Almanack, February 1752)

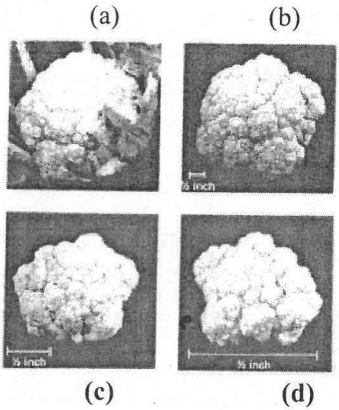
પ્રકરણ 5

ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ (Fractal Geometry)

5.0 પ્રાસ્તાવિક

આપણામાંથી ઘણાબધાએ ફ્રેક્ટલ્સનાં ચિત્રો જોયેલાં છે. કુદરતમાં ઘણીબધી જગ્યાએ ફ્રેક્ટલ્સ જોવા મળે છે. ફૂલકોબીના (Cauliflower) દડાનું ચિત્ર આકૃતિ 5.0.1(a) માં આપ્યું છે. આ ચિત્રના $\frac{1}{2}$ ઈંચના (1.25 સે.મી.) ભાગને વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 5.0.1 (b) માં આપ્યુ છે. ફરીથી આ જ ચિત્રના 1.25 સે.મી.ના ભાગને વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 5.0.1 (c) માં આપ્યું છે. ફરીથી આ જ ચિત્રના 1.25 સે.મી. ના ભાગને વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 5.0.1(d) માં આપ્યું છે. આકૃતિ 5.0.1(a) અને આકૃતિ 5.0.1(d) લગભગ સરખી છે. બીજી રીતે જોઈએ તો, ફૂલકોબીનો ઉપરનો ભાગ જોઈએ, અને તેનો નાનામાં નાનો ભાગ લઈને ઉપરનો ભાગ આખા ભાગ જોડે સરખાવીએ, તો દેખાવે બંને લગભગ સરખા છે. જેના એક નાના ભાગનો આકાર સમગ્ર આકારને સમ-સ્વરૂપ હોય તેવા આકારો માટે બેનોઈટ મેન્ડેલબ્રોટ (Benoit Mandelbrot) નામના ગણિતશાસ્ત્રીએ ઈ.સ. 1975માં ફ્રેક્ટલ શબ્દ વાપર્યો. લેટીન ભાષામાં ફ્રેક્ટસ્ (Fractus)નો અર્થ છે : તૂટેલો પથ્થર. આના ઉપરથી ફ્રેક્ટલ શબ્દ વપરાયેલો. મેન્ડેલબ્રોટ ઘણી વખત ફ્રેક્ટલ્સ ભૂમિતિના પિતા તરીકે ઓળખાય છે. ફ્રેક્ટલ્સ જટીલ ભૌમિતિક આકારો છે. ફ્રેક્ટલના નાનામાં નાના ટુકડામાં પણ મૂળ આકારના લગભગ બધા ગુણધર્મો દેખાય છે. એટલે કે ફ્રેક્ટલ અને તેનો નાનો ભાગ સ્વ-સમાનતા ધરાવે છે. ફ્રેક્ટલનો આ લાક્ષણિક ગુણધર્મ છે.

આપણે જે ભૂમિતિ ભણીએ છીએ તે, આદર્શ આકારો જેવા કે, વર્તુળ, ગોળો, ચોરસ, ઘન, ત્રિકોણ, સુરેખાઓ વગેરેનો અભ્યાસ કરે છે. સામાન્ય રીતે આ આકારો માણસના બનાવેલા છે, કુદરતના નહિ. માનવની આકૃતિ જોઈએ. આ આકૃતિ સંમિત છે. આથી વિશેષ યુક્લિડ ભૂમિતિ કશું કહી શકશે નહિ. ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ કુદરતમાં મળતા અનિયમિત આકારોની ભૂમિતિ છે. તેમાં અનંત બાબતો અને અનંત લંબાઈ પણ છે. જ્યારે સામાન્ય રીતે લીસાપણાની ગેરહાજરી હોય છે.



આકૃતિ-5.0.1 કોલીફ્લાવર

સ્વસમાનતા દરેકમાં નથી. સુરેખાનો નાનો ભાગ આખી સુરેખાને સ્વસમાન છે. સુરેખાના નાના ભાગને લંબાવવાથી આખી સુરેખા બરાબર કરી શકાય છે. જ્યારે વર્તુળનું ચાપ વર્તુળ નથી, આથી ચાપ વર્તુળને સ્વસમાન નથી. એ જ રીતે ત્રિકોણની કોઈ પણ બાજુ ત્રિકોણ ન હોઈ, ત્રિકોણનો કોઈપણ ભાગ ત્રિકોણને સ્વસમાન નથી. વૃક્ષો, વાદળો, પહાડો વગેરેના નાના ભાગ મોટા ભાગના જેવા જ લાગે છે.

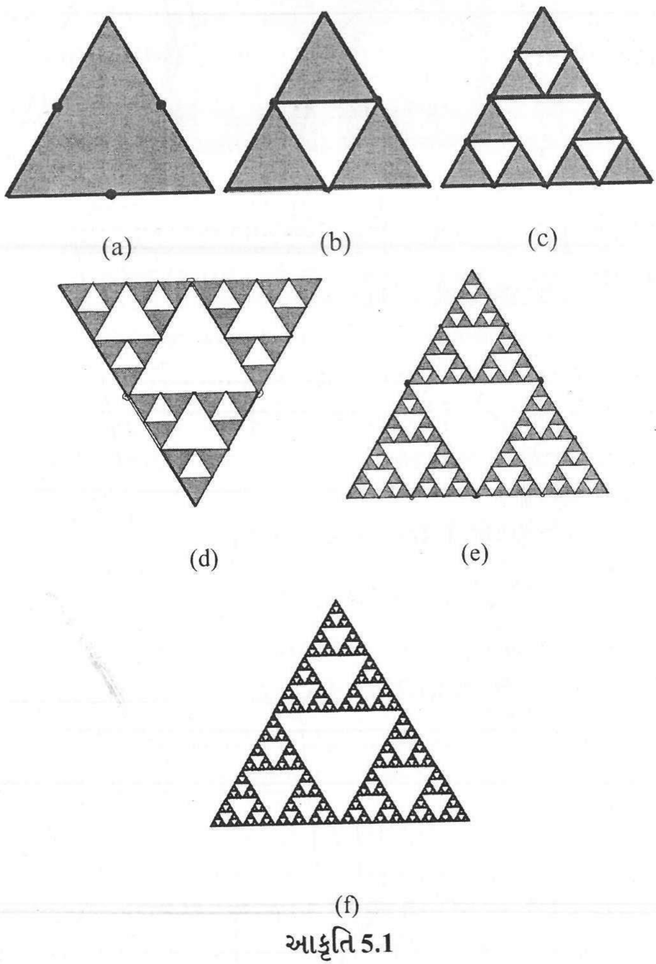
5.1. સિરપિન્સ્કિ ગાસ્કેટ (Sierpinski Gasket)

સિરપિન્સ્કિ ગાસ્કેટ ફ્રેક્ટલનો ગાણિતિક નમૂનો છે. સિરપિન્સ્કિ પોલેન્ડમાં આવેલા લ્વોવ (Lvov) અને વૉર્સો (Warsaw)ના ગણિતના ખૂબ જ જાણીતા અધ્યાપક હતા. તેમના માનમાં ચંદ્ર ઉપરની પ્યાલાકાર ખીણનું (Crater) નામ સિરપિન્સ્કિ ક્રેટર રાખેલું છે.

આકૃતિ 5.1(a) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સમબાજુ ત્રિકોણ લઈએ. ત્રણે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ જોડીને ચાર સમબાજુ ત્રિકોણો મેળવીએ. આ ચાર ત્રિકોણમાંથી વચ્ચેનો ત્રિકોણ કાઢી લઈએ.

આપણી પાસે ત્રણ સમબાજુ ત્રિકોણો રહ્યા તેનો રંગ કાળો છે. કાઢી લીધેલા ત્રિકોણનો સફેદ રંગ છે. આ ત્રિકોણો આકૃતિ 5.1(b) માં દર્શાવ્યા છે. આ ત્રણ સમબાજુ ત્રિકોણોની બાજુઓની લંબાઈ મૂળ ત્રિકોણની બાજુઓથી અડધી છે. આકૃતિ 5.1(b)

ના કાળા રંગથી દર્શાવેલા ત્રિકોણો આકૃતિ 5.1(a) ના ત્રિકોણ સાથે સમ-સ્વરૂપ છે. આ પાયાની રચના છે. હવે આપણે જેમ અગાઉ કરેલું તેમ આકૃતિ 5.1(b) ના ત્રણે ત્રિકોણોના મધ્યબિંદુઓ જોડીને બાર ત્રિકોણો મેળવીએ અને વચ્ચેના ત્રણ ત્રિકોણો કાઢી લઈએ. બાકી રહેલા ત્રિકોણોનો રંગ કાળો છે અને કાઢી લીધેલા ત્રણ ત્રિકોણોનો રંગ સફેદ છે.



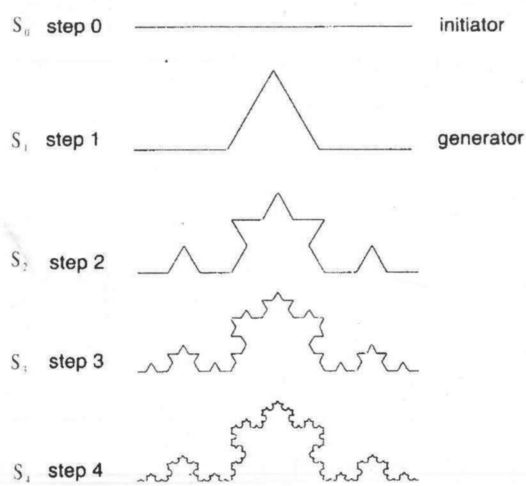
આકૃતિ 5.1

હવે જે રચના (a) માં આપેલ છાયાંકિત ત્રિકોણ પર કરી તે જ રચના (b) ના ત્રણ છાયાંકિત ત્રિકોણો પર કરીએ, તો આકૃતિ 5.1(c) મળશે. જેમાં નવ છાયાંકિત ત્રિકોણો છે. આ નવ છાયાંકિત ત્રિકોણો પર તે જ રચના કરીએ, તો આકૃતિ 5.1(d) મળે અને આ રચનાનાં પુનરાવર્તનો કરતા જ જઈએ. હા, આ પુનરાવર્તનનો સૈદ્ધાંતિક રીતે કોઈ અંત ન આવે. પણ છાયાંકિત ત્રિકોણોની સંખ્યા વધતી જશે. આકૃતિ 5.1(a) માં એક જ છાયાંકિત ત્રિકોણ હતો. હવે આકૃતિઓ 5.1(b), 5.1(c), 5.1(d), 5.1(e) અને 5.1(f) માં અનુક્રમે 3, 9, 27, 81અને 243 આમ ગુણોત્તર શ્રેણીમાં છાયાંકિત ત્રિકોણો મળશે. આ બધા ત્રિકોણો આકૃતિ 5.1(a) માં આપેલ ત્રિકોણો સાથે સમસ્વરૂપ છે. અને દરેક તબક્કે ત્રિકોણોની બાજુની લંબાઈ અડધી થતી જાય છે. n તબક્કે મળતી આકૃતિના સૌથી નાના છાયાંકિત ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈને 2^n વડે ગુણીએ તો 5.1(a) માં દર્શાવેલો ત્રિકોણ મળે. આ રીતે અનંત સુધી આગળ વધતાં સમતલનાં જે બિંદુઓનો ગણ મળે તે સિરપિન્સ્કિ ગાસ્કેટ તરીકે ઓળખાય છે.

આ જ રીતે ચોરસ, પંચકોણ અને બહુકોણમાંથી પણ ફ્રેક્ટલ્સ મેળવી શકાય.

5.2 વૉન કોશ (Von Koch) આલેખ

નીચે આકૃતિ 5.2.1 માં આપેલા વક્રની રચના અને તેનો અભ્યાસ. ઈ.સ. 1904 માં સ્વીડનના ગણિતજ્ઞ હેલ્ગ વૉન કોશે (Helge Von Kosh) કર્યો હતો. આ ગણિતજ્ઞના નામ પરથી આ વક્ર 'વૉન કોશ આલેખ' તરીકે ઓળખાય છે.



આકૃતિ 5.2.1

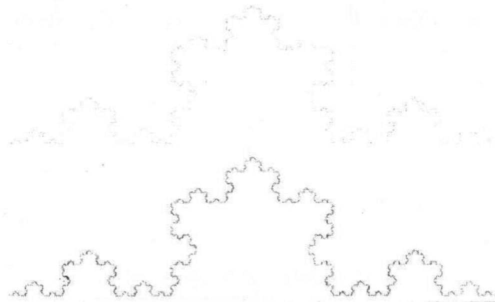
રેખાખંડ S_0 થી શરુઆત કરીએ. આ રેખાખંડને ત્રિભાગો. વચ્ચેના રેખાખંડ પર સમબાજુ ત્રિકોણ રચો. ત્યારબાદ તે રેખાખંડ આકૃતિમાંથી કાઢી નાખો એટલે આકૃતિ S_1 મળે. હવે S_1 માં ચાર રેખાખંડો દેખાય છે. S_0 ના રેખાખંડ પર જે રચના કરી તે જ રચના S_1 ના ચાર રેખાખંડો ઉપર કરીએ, તો આકૃતિ S_2 મળે. S_2 માં $16 (= 4^2)$ રેખાખંડો દેખાય છે. આ દરેક રેખાખંડ પર S_0 પર કરેલી રચના કરીએ, તો આકૃતિ S_3 મળશે. આ પ્રમાણે કરતાં જ જઈએ. દરેક તબક્કે રેખાખંડોની સંખ્યા સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં વધતી જાય છે. અને દરેક તબક્કે રેખાખંડોની લંબાઈ આગળના તબક્કાના રેખાખંડની લંબાઈની $\frac{1}{3}$ થતી જાય છે.

આમ, રેખાખંડોની લંબાઈ l, અને દરેક તબક્કે મળતા બધાં રેખાખંડોની કુલ લંબાઈ L વડે દર્શાવીએ તો નીચેનું ટેબલ 5.2.1 મળે.

ટેબલ 5.2.1

તબક્કો	એક રેખાખંડની લંબાઈ	રેખાખંડોની સંખ્યા	બધાં રેખાખંડોની કુલ લંબાઈ
S_0	$l_0 = 1$	1	$L_0 = 1$
S_1	$l_1 = \frac{1}{3}$	4	$L_1 = \frac{4}{3}$
S_2	$l_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	4^2	$L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$
S_3	$l_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	4^3	$L_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$
S_4	$l_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	4^4	$L_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4$
...	...	...	...
...	...	...	
S_n	$l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	4^n	$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

આકૃતિ 5.2.2માં બે આલેખો આપ્યા છે.



આકૃતિ 5.2.2

નરી આંખે દેખાવ તો બંનેનો એકસરખો જ લાગે છે, પણ આકૃતિમાં ઉપરનો આલેખ પાંચમા તબક્કે મળતો આલેખ છે અને નીચેનો આલેખ 20 મા તબક્કે મળતો આલેખ છે. ઉપરના આલેખમાં દરેક રેખાખંડની લંબાઈ $3^{-5} \simeq 0.004$ એકમ છે, જ્યારે નીચેના આલેખમાં તે લંબાઈ $3^{-20} \simeq (0.004)^4 \simeq 2.868 \times 10^{-10}$ છે. નરી આંખે ખાસ કોઈ તફાવત દેખાતો નથી.

પણ આપણો આશય તો તબક્કાની સંખ્યા અમર્યાદિત રીતે વધારતા જ જઈએ એટલે કે $n \to \infty$ હોય ત્યારે જે આલેખ મળે તે મેળવવાનો છે. આ આલેખ વૉન કોશ વક્ર છે. વૉન કોશ વક્રની લંબાઈ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ છે.

જો $r > 1$ હોય ત્યારે $r^n \to \infty$. તેથી ઉપરોક્ત લંબાઈ અમર્યાદિત રીતે વધતી જ જશે. આખરે આ આલેખના બધાં રેખાખંડો બિંદુવત્ બની જશે. વક્ર પ્રત્યેક બિંદુએ સતત છે, પણ કોઈપણ બિંદુએ વિકલનીય નથી. એટલે કે આ વક્ર પરના કોઈપણ બિંદુએ વક્રને સ્પર્શરેખા દોરી શકાય નહીં.

n તબક્કે મળતી રચના S_n ની પ્રત્યેક લંબાઈને ત્રણ ગણી વિસ્તારતાં S_{n-1} મળે છે. આમ આ વક્ર પણ સ્વ-સ્વરૂપ ફ્રેક્ટલનું ઉદાહરણ છે.

આ ફ્રેક્ટલને ક્ષેત્રફળ છે પણ પરિમિતિ અનંત છે. એટલે કે હદની દોરી બાંધી ન શકાય, પણ અંદરથી રંગી શકાય. ભૂમિતિમાં જોયેલા ચોરસો અને વર્તુળો, જેમને ચોક્કસ અચળ ક્ષેત્રફળ અને અચળ પરિમિતિ હોય છે તેનાથી તદ્દન જુદી જાતનો વૉન કોશ વક્ર છે. આ આલેખનું પરિમાણ (dimension) શું ?

5.3 જુલિયા ગણો (Julia Sets)

મેન્ડેલબ્રોટ ગણનો આલેખ ખૂબ જ સુંદર અને સૂક્ષ્મ હોવાથી દરેકનું ધ્યાન ખેંચે છે, પણ આ ગણની શરૂઆત જુલિયા ગણોને કારણે થઈ હોવાથી જુલિયા ગણો જાણવા જરૂરી છે. જુલિયા ગણોનો અભ્યાસ ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી ગેસ્ટોન જુલિયાએ (Gaston Julia 1893-1978) નાકની ઘણી બધી દુઃખદાયક શસ્ત્રક્રિયા વચ્ચે હોસ્પિટલમાં કરેલો.

પહેલા વિશ્વયુદ્ધ દરમિયાન જુલિયા ફ્રેન્ચ લશ્કરમાં અધિકારી હતા. જર્મનીના રાજા કૈઝર (Kaiser) ની જન્મ તારીખ 25 જાન્યુઆરી હોઈને જર્મન લશ્કરના મુખ્ય મથકે 1000 ફ્રેન્ચ કેદીઓ મેળવીને ઊજવવાનો નિર્ણય કર્યો. 25 જાન્યુઆરી 1915 ના રોજ જર્મન લશ્કરે ફ્રેન્ચ લશ્કરના મોરચા ઉપર હુમલો કર્યો. બંને લશ્કરો વચ્ચે ખૂનખાર લડાઇ થઈ. જર્મન લશ્કરને 1000 ફ્રેન્ચ કેદીઓ તો મળેલા નહિ, પણ બંને બાજુએ મોટી ખુવારી થઈ અને ઘણાબધા ઘવાયા. જુલિયા પણ ખરાબ રીતે ઘવાયા અને તેમના નાક ઉપર ભારે ઇજા થઇ. આના કારણે તેમને મોઢા ઉપર કાળો પટ્ટો રાખવો પડતો. જુલિયાએ પચ્ચીસ વર્ષની વયે 199 પાનાનો ખૂબ જ પ્રતિષ્ઠિત લેખ લખેલો. તેઓ ઇકોલ પોલિટેકનિક (Ecole Polytechnique) પેરિસમાં ગણિતના ખ્યાતનામ અધ્યાપક હતા.

જુલિયા ગણોના આલેખો આપણે જે રીતે વાસ્તવિક વિધેયોના આલેખો મેળવીએ છીએ તેથી તદ્દન જુદી રીતે મેળવાય છે. કમ્પ્યૂટર અને આલેખો દોરવાના સોફ્ટવેરના કારણે જુલિયા ગણોના આલેખો ખૂબ જ આકર્ષક લાગે છે. $y = f(x)$ નો આલેખ મેળવવા માટે વિધેય f ના પ્રદેશમાંથી કોઈપણ સંખ્યા x_1 લઇને ચલ x ને બદલે x_1 મૂકીને $y_1 = f(x_1)$ મેળવીએ. આ રીતે XY-સમતલમાં બિંદુ $P_1(x_1, y_1)$ મળે. આ રીતે મેળવેલાં ઘણાં બિંદુઓ જોડીને વિધેય f નો આલેખ મળે. જ્યારે જુલિયા

ગણોના આલેખો જુદી રીતે મેળવાય છે. કોઈપણ આપેલા વિધેય f માટે સંકર સંખ્યા z_0 લઈને $z_1 = f(z_0)$ મેળવીએ. આ નવી કિંમત z_1 લઈને $z_2 = f(z_1)$ મેળવીએ. આ રીતે $z_n = f(z_{n-1})$ મળે. z_0 નો ભ્રમણગણ $\{z_0, z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$ મળે. જો $n \to \infty$ હોય અને $|z_n| \not\to \infty$, તો z_0 ને આર્ગન્ડ આકૃતિમાં (Argand Diagram) કોઈપણ રંગથી દર્શાવીએ. આ રીતે બધી જ સંકર સંખ્યાઓ લઈને z_n ની કિંમત મેળવી શકાય. જે z_0 ની કિંમતો માટે $|z_n| \not\to \infty$ હોય તેવી બધી કિંમતોનો ગણ મળી શકે.

કોઈપણ વિધેય f આપેલ છે. આર્ગન્ડ આકૃતિની સંખ્યા z_0 લઈને તેનો ભ્રમણગણ $\{z_0, f(z_0), f(f(z_0)), ..., z_n = f(f(...f(z_0)...))\}$ મેળવીએ અને જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $|z_n| \not\to \infty$ હોય તેવી દરેક સંખ્યા z_0 ના ગણને ભરેલો જુલિયા ગણ (Filled Julia Set) J_F કહેવામાં આવે છે, અને આ ભરેલા જુલિયા ગણની સીમાને જુલિયા ગણ J તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

લોજિસ્ટીક સમીકરણ $f(x) = x^2 + c$ માં x અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. આ સમીકરણ પ્રમાણમાં સરળ હોવાથી આ વિધેયના જુલિયા ગણોનો આલેખ મેળવી શકાય. આ જ સમીકરણ $f(z) = z^2 + c$ છે કે જ્યાં c અને z સંકર સંખ્યાઓ છે. આ સમીકરણમાં c ની જુદી જુદી કિંમતો લઈને જુલિયા ગણ J મેળવીએ.

(1) ધારો કે, $c = 0 + i0 = 0$ છે. આથી $f(z) = z^2$ છે. $|z| < 1$ થાય તેવી કોઈ પણ સંખ્યા z_0 લઈએ તો $z_1 = f(z_0) = z_0^2$,

$$z_2 = f(z_1) = f(z_0{}^2) = z_0^4 = z_0{}^{2^2},$$

$$z_3 = f(z_2) = z_0^8 = z_0^{2^3}, ...,$$

$$z_n = f(z_{n-1}) = z_0^{2^n}, ...$$ મળે.

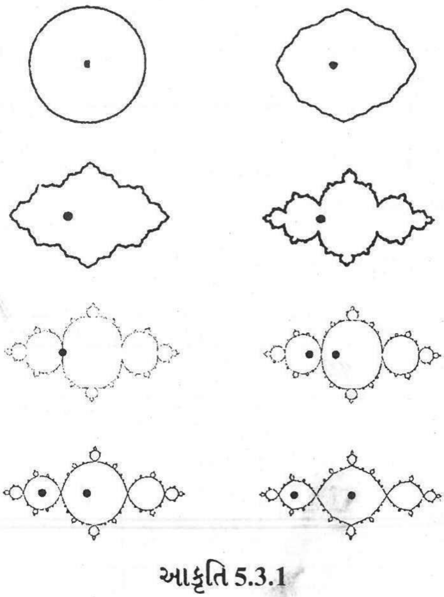
z એવો પસંદ કર્યો છે કે, જેથી $|z_0| < 1$ તેથી $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = 0$ છે.

આથી (0, 0) આકર્ષક બિંદુ છે. $|z_0|=1$ માટે $\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$ છે. આથી $\{z \,||\, z| \le 1\} = J_F$ જે આકૃતિ 5.3.1 માં વર્તુળ છે અને $\{z \,||\, z| = 1\} = J$ જુલિયા ગણ છે. આ વર્તુળનું કેન્દ્ર (0, 0) અને ત્રિજ્યા 1 છે. $|z|>1$ હોય ત્યારે $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ છે. આથી $J_F=\{z \,||\, z|\le 1\}$ માં $|z|>1$ હોય તેવી કોઈપણ સંકર સંખ્યા નથી.

(2) ધારો કે, $c=i=0+i$ છે, આથી $f(z)=z^2+i$ થાય. $z_0=0$ લઈએ, તો $z_1=f(z_0)=i$ થશે, તે જ રીતે $z_2=f(z_1)=f(i)=i^2+i=-1+i$ થશે. આ જ રીતે $z_3=f(z_2)=f(-1+i)=(-1+i)^2+i \;=1-2i-1+i=-i$ થશે. આ જ રીતે $z_4=f(z_3)=f(-i)=(-i)^2+i=-1+i$ થશે. આથી 0 નો ભ્રમણગણ

$$\{0, i, -1+i, -i, -1+i, -i, \ldots\}$$

થશે. આથી $|z_n| \not\to \infty$. આથી ભરેલા જુલિયા ગણ J_F માં છે.



આકૃતિ 5.3.1

આકૃતિ 5.3.1 માં $c = 0, -1/4, -1/2, -0.7, -3/4, -0.8, -0.9$ અને -1 માટેના જુલિયાગણો J ના આલેખો આપેલા છે.

$z_0 = 1$ લઈએ, તો $z_1 = f(1) = 1+i$ થશે, તે જ રીતે

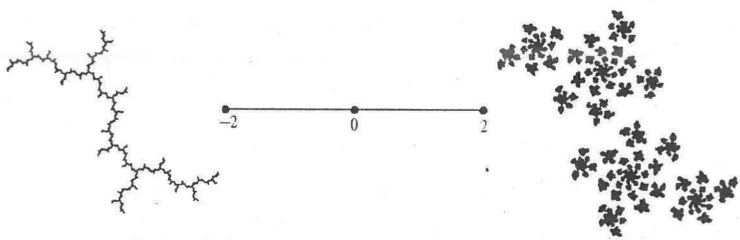
$$z_2 = f(z_1) = f(1+i) = (1+i)^2 + i$$

$$= 1+2i-1+i = 3i \text{ થશે.}$$

તે જ રીતે, $z_3 = f(z_2) = (3i)^2 + i = -9+i$ થશે.

આ જ રીતે, $z_4 = f(z_3) = (-9+i)^2 + i = 81-18i-1+i = 80-17i$ થશે.

આથી, જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $|z_n| \to \infty$ છે. આથી, 1 ભરેલા જુલિયાગણ J_F માં નથી. આ રીતે ગણતાં જે ગણ આવે તે ગણનો આલેખ આકૃતિ 5.3.2(a) માં આપેલ છે.



(a) (b) (c)

Fatou Dust

આકૃતિ 5.3.2

(3) $c = -2$ લઈએ તો $f(z) = z^2 - 2$ થશે. $z_0 = 0$ લઈએ, તો $z_1 = f(z_0) = 0^2 - 2 = -2$ થશે.

તે જ રીતે, $z_2 = f(z_1) = f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$ થશે.

$z_3 = f(z_2) = f(2) = 2^2 - 2 = 2$ થાય.

$z_n = 2$ થશે. આથી, 0 ભરેલા જુલિયાગણ J_F માં છે.

$z_0 = \pm 2$ લઈએ, તો $z_1 = f(z_0) = f(\pm 2) = (\pm 2)^2 - 2 = 2$ થાય.

આ જ રીતે, $z_2 = f(2) = 2^2 - 2 = 2$ થાય. આ જ રીતે, $z_n = 2$ થાય.

આથી -2 અને 2 ભરેલા જુલિયાગણ J_F માં છે.

$z_0 = \pm i$ લઈએ, તો $z_1 = f(z_0) = (\pm i)^2 - 2 = -3$ થાય.

આ જ રીતે, $z_2 = f(z_1) = (-3)^2 - 2 = 7$ થાય.

આથી, $z_3 = f(z_2) = f(7) = 7^2 - 2 = 47$ થાય.

$z_4 = f(47) = 47^2 - 2 = 2207$ થાય.

આથી, જ્યારે $n \to \infty$, ત્યારે $|z_n| \to \infty$ હોઈને J_F માં નથી. આ જ રીતે, $[-2,2]$ ની કોઈપણ કિંમત J_F માં આવેલ છે. આ ગણનો આલેખ $[-2,2]$ રેખાખંડ છે જે આકૃતિ 5.3.2(b) માં આપેલી છે.

(4) ધારો કે, $c = 0.11 + 0.66i$ છે, આથી, $f(z) = z^2 + (0.11 + 0.66i)$ છે.

$z_0 = 0$ લઈએ, તો $z_1 = f(0) = 0.11 + 0.66i$ થશે.

આ જ રીતે $z_2 = f(0.11 + 0.66i) = -0.3135 + 0.8052i$ થશે,

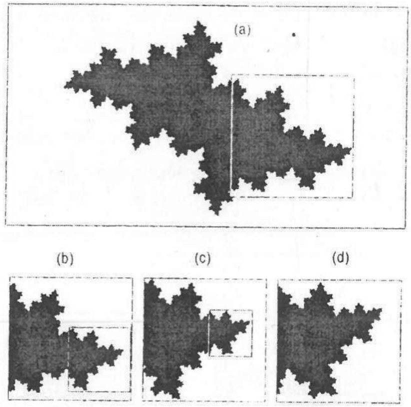
આ જ રીતે ગણતાં

$z_{18} = -0.2911 + 3.0365i$, $z_{19} = -9.0256 - 1.1083i$ અને

$z_{20} = 80.3447 + 20.6669i$ થશે.

આથી, 0 J_F માં આવેલ નથી. આ રીતે ગણતાં જે ગણ આવે તેનો આલેખ આકૃતિ 5.3.2(c) માં આપેલ છે. આ આલેખ આગળના આલેખો કરતાં જુદા પ્રકારનો છે. આ જુદાંજુદાં બિંદુઓનો બનેલો આલેખ છે. આ બધાં બિંદુઓ એકબીજા જોડે જોડાયેલાં નથી. આવા ફ્રેક્ટલને "ફાટુ ડસ્ટ (Fatou Dust)" તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

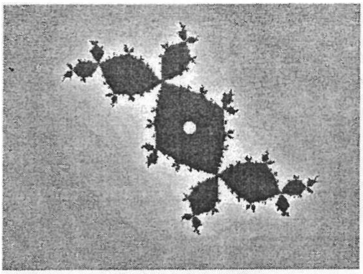
$f(z) = z^2 + (-0.5, 0.5)$ ના ભરેલા જુલિયાગણ J_F નો આલેખ આકૃતિ 5.3.3(a) માં આપેલો છે.



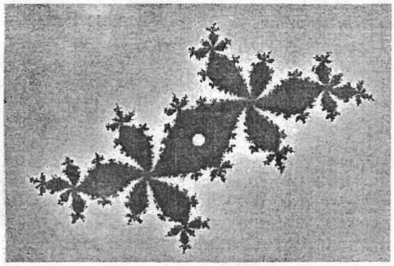
આકૃતિ 5.3.3

આકૃતિ 5.3.3(a) માં બતાવેલા નાના ચોરસને આકૃતિ 5.3.3(b) માં તેના નાના ભાગના ચોરસ સાથે બતાવેલો છે. આકૃતિ 5.3.3(b) ના નાના ભાગને વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 5.3.3(c) માં આપ્યો છે અને આ આકૃતિમાં પણ નાનો ચોરસ આપ્યો છે. આકૃતિ 5.3.3(c) ના નાના ચોરસનો વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 5.3.3(d) માં આપ્યો છે. આકૃતિ 5.3.3(d) ને આકૃતિ 5.3.3(a) ના ચોરસ સાથે સરખાવતાં બંને સ્વસમાન છે. ભરેલા જુલિયાગણો J_F ને કાળા રંગથી આકૃતિ 5.3.3(a), (b), (c) અને (d) માં દર્શાવ્યા છે. આ ભરેલા જુલિયાગણો J_F છે. આકૃતિ 5.3.3(a) ભરેલા જુલિયાગણ J_F - ના નાના ભાગને વિસ્તૃત કરીએ, વિસ્તૃત કરેલા ભાગના નાના ભાગને વિસ્તૃત કરીને જોઈએ તો શરૂઆતના ભાગ જેવો જ લાગે. આ દર્શાવે છે કે ભરેલા જુલિયાગણ J_F ફ્રેક્ટલ છે.

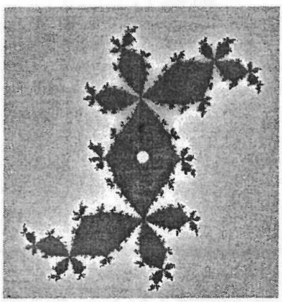
$f(z) = z^2 + c$ માં દરેક c માટે ફ્રેક્ટલ મળે !! આ ફ્રેક્ટલ જુલિયા ફ્રેક્ટલ તરીકે ઓળખાય છે. કમ્પ્યૂટરની મદદથી મેળવેલા, જુદીજુદી c ની કિંમતોના જુલિયા ગણોના આલેખો આકૃતિ 5.3.4 માં આપેલા છે.



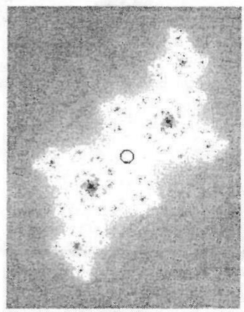
(a) $c = -0.12 + 0.75\,i$



(b) $c = -0.5 - 0.57\,i$



(c) $c = 0.29 - 0.54\,i$



(d) $c = -0.3 + 0.7\,i$

આકૃતિ 5.3.4

કલાકારો આવા આલેખો દોરવાનો પ્રયત્ન કરે, તોપણ દોરવા અઘરા લાગે !! જ્યારે કેઑસનું જેમ્સ ગ્લીકનું (James Gleick) પુસ્તક બહાર પડ્યું ત્યારે અમેરિકામાં જેની પાસે કમ્પ્યૂટર હતાં તેમાંના ઘણાબધા જુલિયાગણોના આલેખો દોરવાનો પ્રયત્ન કરતા.

અમેરિકાની માધ્યમિક શાળાના ઘણાબધા વિદ્યાર્થીઓ આનાથી પરિચિત છે. અને આના કારણે કમ્પ્યૂટર સાયન્સ ભણે છે. આનાથી ભૌતિક શાસ્ત્ર અને ગણિત ભણનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા અમેરિકામાં ઘટતી જાય છે !!

પીટગેન (Pietgen), જર્ગેન્સ (Jurgens) અને સુપના (saupe) "Chaos and Fractals" ના પુસ્તકમાં પણ ઘણાબધા જુલિયા ગણોના આલેખો આપેલા છે. ઇન્ટરનેટની સગવડ હોય તો http://math.bu.edu/DYSYS/dysys.html વેબસાઈટ ઉપરથી પણ રંગીન આલેખો મળશે.

5.4 મેન્ડેલબ્રોટ ગણ (Mandelbrot Set)

અહીં C સંકર સંખ્યાઓનો ગણ છે. વિધેય $F_c(z) = z^2 + c$ માં ચલ z અને

અચળસંખ્યા c સંકર સંખ્યાઓ છે. કોઈપણ અચળ સંખ્યા c અને દરેક $z \in C$ માટે જ્યારે $n \to \infty$ હોય, ત્યારે $F_c^n(z) = F_c(...F_c(F_c(z))...) \not\to \infty$ હોય તેવી દરેક સંકર સંખ્યાઓ z ના ગણને B_c વડે દર્શાવતાં

$B_c = \{z \mid F_c^n(z) \not\to \infty$ જ્યારે $n \to \infty\}$ છે.

B_c ગણનાં બધાં તત્ત્વોની ભ્રમણકક્ષા મર્યાદિત છે. B_c એ જ અગાઉ જણાવેલો ભરેલો જુલિયા ગણ J_F છે. આપણે ઘણા આલેખો આકૃતિઓ 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 માં અને 5.3.4 માં જોયેલા. આ આલેખો બે પ્રકારના છે. જે નીચેના પ્રમેયથી પણ સાબિત થઈ શકે.

પ્રમેય : દરેક સંકર સંખ્યા c માટે B_c જોડાયેલો ગણ છે અથવા B_c ના બધા જ ભાગો સ્વતંત્ર છે.

આ બંને ગણો વચ્ચે કોઈ ગણ નથી તે આશ્ચર્યજનક વાત છે. ક્યા પ્રકારનો ગણ છે તે જાણવા માટે પણ સરળ પ્રમેય છે.

પ્રમેય : જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $F_c^n(0) \not\to \infty$ હોય તો B_c અખંડિત ગણ છે. જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $F_c^n(0) \to \infty$ હોય તો B_c ના બધા જ ભાગો સ્વતંત્ર છે.

અખંડિત ગણો B_c ની અચળ સંખ્યાઓ c ના ગણને મેન્ડેલબ્રોટ ગણ M તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. એટલે કે $M = \{c \mid$ જ્યારે $n \to \infty$ હોય, ત્યારે $F_c^n(0) \not\to \infty$ હોય$\}$.

આપણે M ગણમાં આવેલી c ની કિંમતો મેળવીને M ગણની આકૃતિ મેળવવી છે.
ધારો કે, $|c| > 2$ છે. જો $|z| \geq c$ હોય, તો

$$|F_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c|$$

$$\geq |z^2| - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + l)|z|$$

કારણ કે, $|z| > 2$ અને $l > 0$ છે. આથી, $|F_c(F_c(z))| \geq (1+l)^2 |z|$. આ રીતે ગણતાં $|F_c^n(z)| \geq (1+l)^n |z|$ મળે. આથી, જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $|F_c^n(z)| \to \infty$ હોઈ, આ કિંમતો M માં ન હોઈ શકે. આથી M માં આવેલી c ની કિંમતો $|c| \leq 2$ છે.

(1) ધારો કે, $c=1$ છે.

આથી, $F_1(z)=z^2+1$ થશે. $F_1(0)=1$,

$$F_1^2(0)=F_1(F_1(0))=F_1(1)=1^2+1=2 \text{ થાય.}$$

આ જ રીતે ગણતાં,

$$F_1^3(0)=F_1(F_1^2(0))=F_1(2)=2^2+1=5,$$

$$F_1^4(0)=F_1(F_1^3(0))=F_1(5)=5^2+1=26 \text{ થાય.}$$

આ કિંમતો ટેબલ 5.4.1 માં પણ આપી છે.

ટેબલ 5.4.1

n	$F_1^n(0)$	$F_1^{n+1}(0)=F_1(F_1^n(0))$
1	1	$F_1^2(0)=F_1(F_1(0))=F_1(1)=2$
2	2	$F_1^3(0)=F_1(F_1^2(0))=F_1(2)=5$
3	5	$F_1^4(0)=F_1(F_1^3(0))=F_1(5)=26$
4	26	$F_1^5(0)=F_1(F_1^4(0))=F_1(26)=677$

આથી જોઈ શકાશે કે જ્યારે $n\to\infty$ હોય, ત્યારે $F_1^n(0)\to\infty$ છે. આથી $c=1$, M ગણમાં નથી.

(2) ધારો કે, $c=0$ છે. આથી $F_0(z)=z^2$ થાય.

$F_0(0)=0$ છે અને $F_0^2(0)=F_0(F_0(01)=F_0(0)=0$.

આ જ રીતે, $F_0^3(0)=F_0^4(0)=\dots=F_0^n(0)=0$. આથી, જ્યારે $n\to\infty$ હોય, ત્યારે $F_0^n(0)\not\to\infty$ છે. આથી $c=0$, M ગણમાં છે. આ બિંદુ $(0,0)$ ને કાળા ટપકાથી દર્શાવીએ.

(3) ધારો કે, $c=-1$ છે. આથી $F_{-1}(z)=z^2-1$ છે અને $F_{-1}(0)=-1$,

$F_{-1}^2(0)=F_{-1}(F_{-1}(0))=F_{-1}(-1)=0$ છે.

ટેબલ 5.4.3 માં $n=4$ સુધીની કિંમતો આપેલી છે.

ટેબલ 5.4.3

n	$F_{-1}^{\ n}(0)$	$F_{-1}^{\ n+1}(0)$
1	-1	$F_{-1}^{\ 2}(0)=F_{-1}(F_{-1}(0))=F_{-1}(-1)=0$
2	0	$F_{-1}^{\ 3}(0)=F_{-1}(F_{-1}^{\ 2}(0))=F_{-1}(0)=-1$
3	-1	0
4	0	-1

$F_{-1}^{n}(0)$ ની કિંમતો -1 અને 0 વચ્ચે ફર્યા કરે છે. આથી, જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારેં $F_{-1}^{n}(0) \not\to \infty$ છે. તેથી $c=-1$, M ગણમાં છે અને બિંદુ $(-1, 0)$ ને કાળા ટપકાથી દર્શાવીએ. આ બે કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે, આથી આનો આવર્ત 2 છે.

(4) ધારો કે, $c=i$ છે, આથી $F_i(z)=z^2+i$ છે અને $F_i(0)=i$ થાય.

$c=i$ માટે $F_i^2(0)=(F_i(F_i(0))=F_i(i)=i^2+i=i-1$

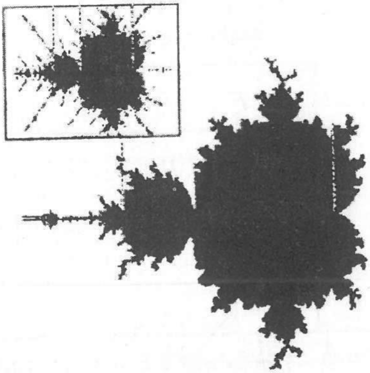
$F_i^3(0)=(F_i(F_i^2(0))=F_i(i-1)=(i-1)^2+i=-i$

$F_i^4(0)=i-1,\ F_i^5(0)=-i$ .... મળશે.

$F_{-i}^{n}(0)$ ની કિંમતો $-i$ અને $-1+i$ વચ્ચે ફર્યા કરે છે, આથી, આનો આવર્ત બે છે. જ્યારે, $-1+i$ હોય, ત્યારે $F_i^n(0) \not\to \infty$ છે. એટલા માટે $c=i$, M ગણમાં છે અને આ બિંદુ $(0,1)$ ને કાળા ટપકાથી દર્શાવીએ.

$c=-1$ માટે $F_{-1}^{n}(0) \not\to \infty$ ની કિમતો બે કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. જ્યારે $c=-1.3$ માટે $F_{-1.3}^{n}(0)$ ની કિંમતો ચાર કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. અને $c=-1.38$ માટે $F_{-1.38}^{n}(0)$ ની કિંમતો આઠ કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે.

$c=1$ અને $2i$, M ગણમાં નથી.આપણે $|c|\le 2$ હોય તે જ કિંમતો તપાસવાની છે. આ માટેનો કોમ્પ્યૂટરનો પ્રોગ્રામ સરળતાથી લખી શકાય. આ રીતે કોમ્પ્યૂટરની મદદથી મેળવેલી c ની કિંમતો કાળા ટપકાથી દર્શાવીને મેળવેલો મેન્ડેલબ્રોટ ગણનો આલેખ આકૃતિ 5.4.1 માં આપેલો છે.

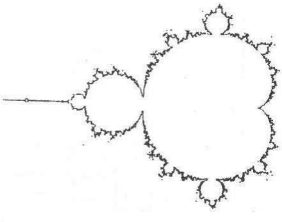


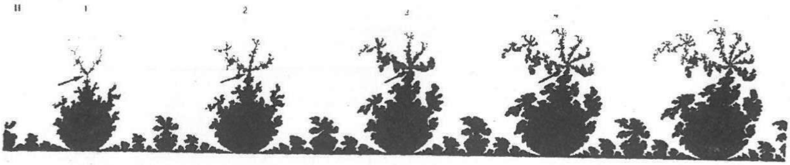
આકૃતિ 5.4.1

સૌથી પહેલાં કોમ્પ્યૂટરની મદદથી દોરાયેલા મેન્ડેલબ્રોટ ગણના આલેખની આકૃતિ પણ ડાબી બાજુ ઉપરના ખૂણામાં આપી છે. આકૃતિ 5.4.1માં સૌથી મોટો ભાગ હૃદય જેવો છે અને તેની ધાર ઉપર ઘણાબધા, નાનામોટા શણગારો છે, અને આ બધા શણગારોના આકારો પણ જુદા જુદા છે.

આકૃતિ 5.4.2 માં થોડીક ધારના શણગારો મોટા કરીને આપ્યા છે. આ શણગારોના આકારો જુદા જુદા છે. દરેક શણગારને મુખ્ય ધ્વનિજાળ (Antena) છે અને ધ્વનિજાળને જુદાજુદા હાથાઓ છે. આ હાથાઓની સંખ્યા ગાંઠના આવર્ત બરાબર છે.

c	ગાંઠનો આવર્ત
$-0.12 + 0.75i$	3
$-0.5 + 0.56i$	5
$0.28 + 0.54i$	4
$0.38 + 0.333i$	5
$-0.62 + 0.43i$	7
$-0.36 + 0.62i$	8
$-0.67 + 0.34i$	9
$0.39 + 0.22i$	6





આકૃતિ 5.4.2

મેન્ડેલબ્રોટ ગણની આકૃતિમાં પહેલી નજરે હૃદય જેવો મોટો ભાગ આવે છે. આ વક્રનું નામ Cardioid છે જેને આપણે હૃદયાલેખ કહીશું. અને પછી તેની ધાર ઉપર આવેલા અનેક શણગારો દેખાય છે. હૃદયાલેખ x-અક્ષને -0.75 થી 0.25 સુધી છેદે છે.

F ના સ્થિર બિંદુઓ માટે $F(z) = z^2 + c = z$ હોય, આથી $z^2 - z + c = 0$ આ સ્થિરબિંદુઓનું સમીકરણ છે. આ સમીકરણના ઉકેલો

$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ અને $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ છે.

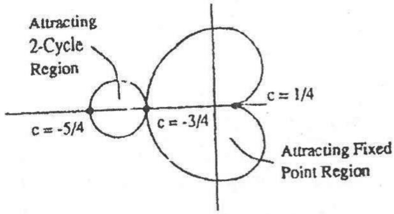
આ સ્થિરબિંદુઓ આકર્ષક હોવા માટે $|F'(z)| = |2z| < 1$ હોય. આનો અર્થ એ છે કે, સીમાની z કિંમતો 1/2 ત્રિજ્યાના વર્તુળ ઉપર આવેલી છે. આ વર્તુળને

$z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ વડે દર્શાવીએ તો

$c = z - z^2 = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$ હૃદયાલેખનું સમીકરણ છે. આ સમીકરણમાં $c = x + iy$ અને

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ મૂકતાં $x = \dfrac{\cos\theta}{2} - \dfrac{\cos 2\theta}{4}$, $y = \dfrac{\sin\theta}{2} - \dfrac{\sin 2\theta}{4}$ મળે.

આ હૃદયાલેખના પ્રાચલ (perametric) સમીકરણો છે. આ હૃદયાલેખ આકૃતિ 5.4.3માં આપેલ છે.

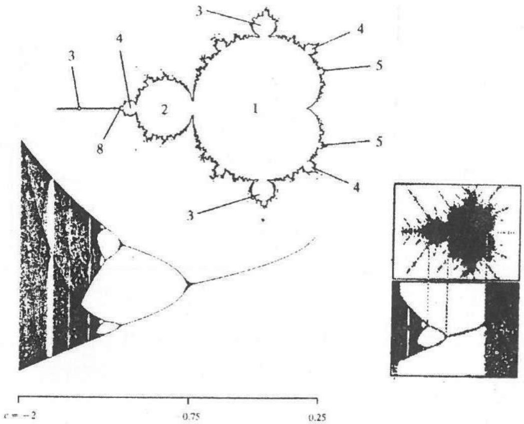


The regions C_1 and C_2

આકૃતિ 5.4.3

$F(F(z)) = z$ સમીકરણનાં બીજો આકર્ષક હોવાની જરૂરિયાત માટે $|c+1| < \frac{1}{4}$ હોવું જરૂરી સાબિત કરી શકાય. આ $c=-1$ કેન્દ્ર અને $\frac{1}{4}$ ત્રિજ્યાના વર્તુળના અંદરના ભાગનાં દરેક સ્થિર બિંદુ માટે બે આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓ મળશે. આ વર્તુળ પણ આકૃતિ 5.4.3માં દર્શાવેલું છે.

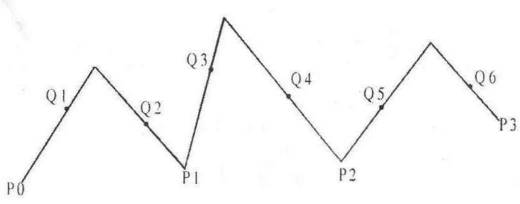
વાસ્તવિક સંખ્યાઓના વિધેયોની ભ્રમણકક્ષાઓ આપણે પ્રકરણ 9 અને 10 માં આપી છે. વાસ્તવિક સંખ્યાઓના વિધેય $f(x) = x^2 + c$, $-2 \le c \le \frac{1}{2}$ ની ભ્રમણકક્ષાના આલેખ અને સંકરસંખ્યાઓના વિધેય $f(z) = z^2 + c$ ના મેન્ડેલબ્રોટ ગણના આલેખ વચ્ચે સંબંધ છે. આથી આકૃતિ 5.4.4માં બંને આલેખો ઉપર નીચે આપ્યા છે. મેન્ડેલબ્રોટનો મુખ્ય ભાગ $n=1$ અને ભ્રમણ કક્ષાના આલેખમાં $-0.75 \le c \le \frac{1}{2}$, $y = f(x)$ ની ફક્ત એક જ કિંમત છે. હૃદયાલેખને જોડેલો ભાગ, જેનો આવર્ત $n=2$ છે તેની નીચે ભ્રમણકક્ષાના આલેખમાં $y = f(x)$ ની બે કિંમતો છે. તે જ પ્રમાણે $n=4$ અને 8 કિંમતો $y = f(x)$ ની અનુક્રમે ચાર અને આઠ કિંમતો છે. એ જ પ્રમાણે મેન્ડેલબ્રોટ આલેખનો નાનો ભાગ જેનો આવર્ત $n=3$ છે તેની બરાબર નીચે $y = f(x)$ ની પણ ત્રણ કિંમતો છે. આ ભાગમાંના ચોરસ □ વડે દર્શાવેલા ભાગને વિસ્તારતાં આપણને બંને આલેખોમાં આલેખોનાં નાનાં સ્વરૂપો મળે છે, જે આકૃતિ 5.4.4માં જમણી બાજુ દર્શાવ્યાં છે.



આકૃતિ 5.4.4

5.5 પરિમાણ (Dimension)

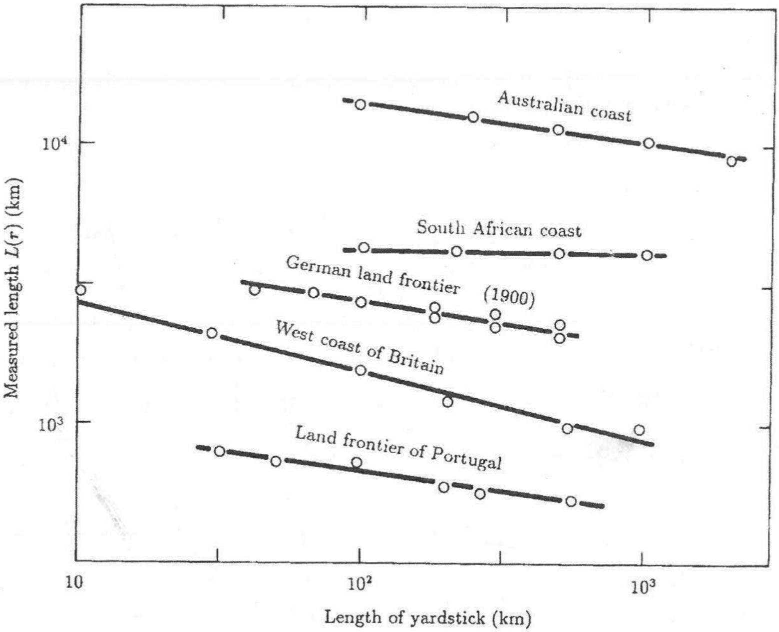
મેન્ડેલબ્રોટને બ્રિટનના ગણિતશાસ્ત્રી રિચાર્ડસન (Richardson)નું 1961 નું "બ્રિટનના દરિયાકિનારાની લંબાઈ કેટલી?" સંશોધનપેપર ખૂબ જ અસર કરી ગયું. દરિયાકિનારે બાંધેલા રસ્તા ઉપર ગાડી ચલાવીને માપો અને દરિયાકિનારે ચાલીને દરિયા કિનારો માપો. આ બંને વચ્ચે મોટો ફેર આવે છે. સામાન્ય રીતે દરિયાકિનારાઓ નકશાથી મપાય છે. જુદીજુદી માપવાની માપપટ્ટીથી જુદીજુદી કિંમતો મળે તે સમજવા માટે આકૃતિ 5.5.1 માં આપેલા વક્રને કંપાસથી માપીએ. કંપાસ ઉપર ડગલાની લંબાઇ l લઇએ. કંપાસનો એક છેડો P_0 ઉપર મૂકીને કંપાસ ફેરવીએ, જેથી પેન્સીલવાળો છેડો આલેખને છેદે અને આ છેદતા બિંદુને P_1 કહીએ.



આકૃતિ 5.5.1

બિંદુ P_1 ઉપર એક છેડો મૂકીને કંપાસનો પેન્સિલવાળો ભાગ ફેરવીએ, જેથી આલેખને છેદે અને આ છેદતા બિંદુને P_2 કહીએ. અને આ જ રીતે આગળ વધતાં બિંદુ P_3 એ પહોંચીએ. આ આલેખની લંબાઈ આશરે $3l$ થશે. જ્યાં $l = P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3$ છે. હવે ડગલાની લંબાઈ અડધી એટલે કે $l/2$ લઈએ અને આ વક્રને ફરીથી માપીએ. આ રીતે માપતા P_0Q_1, Q_1Q_2, ..., Q_5Q_6 મળે. આ રીતે માપતાં અગાઉ કરતાં Q_6P_3 વધારાની લંબાઈ મળી. આથી ડગલાની લંબાઈ $l/2$ લેતાં આલેખની લંબાઈ $3l$ કરતાં વધારે મળી.

આકૃતિ 5.5.2 માં બ્રિટનના પશ્ચિમ કિનારાની લંબાઈ માપપટ્ટી $\delta = 100$ km લઈને માપતાં કિનારાની લંબાઈ 1700 km આપેલી છે જ્યારે માપપટ્ટી $\delta = 10$ km લઈને માપતાં કિનારાની લંબાઈ $L = 3020$ km આપેલી છે.



આકૃતિ 5.5.2

આ જ રીતે ઓસ્ટ્રેલિયા, દક્ષિણ આફ્રિકાના કિનારાઓની લંબાઈ L પણ જુદી જુદી

માપપટ્ટી δ લઈને માપતાં આપેલી છે. દક્ષિણ આફ્રિકા વગર બીજી બધી લંબાઈ L જેમ જેમ માપપટ્ટી δ ની કિંમત ઘટાડતા જઈએ તેમ તેમ કોઈ અચળ સંખ્યાએ પહોંચવાને બદલે વધતી જાય છે. હકીકતમાં L ની કિંમત નીચેના સૂત્રથી મેળવી શકાય છે.

$$L = a\delta^{1-D}$$

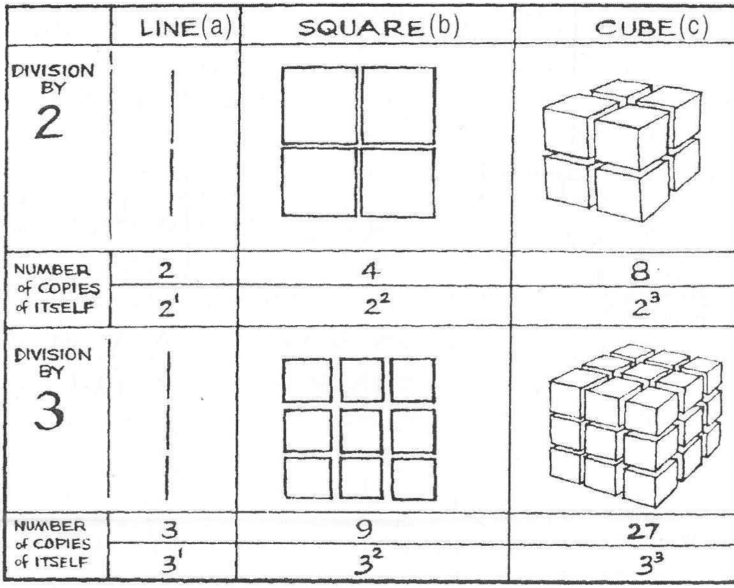
જ્યાં a જરૂરી પગલાં અને D અચળ છે.

આકૃતિ 5.5.2 ઉપરથી D ની કિંમત ગણી શકાય છે. બ્રિટનના પશ્ચિમ કિનારા માટે D ની કિંમત આશરે 1.26 છે. આ 1.26 માં 1 સુંવાળાપણું દર્શાવે છે જ્યારે 26 વાંકાચૂંકાપણું દર્શાવે છે. એ જ રીતે દક્ષિણ આફ્રિકા માટે કિંમત $D \approx 1$ છે.

દરિયાકિનારાની લંબાઈ, વોન કોશ આલેખની લંબાઈ કે ફ્રેક્ટલની લંબાઈ મેળવવી સરળ ન હોવાથી આ બધાને સમજવા માટે પરિમાણની સંકલ્પના વાપરી શકાય. સામાન્ય રીતે આપણે બિંદુને 0, રેખાને 1, ચોરસને 2 અને ઘનને 3 પરિમાણના ગણીએ છીએ. આપેલ ગણના બે સ્વતંત્ર ભાગ કરવા માટે જરૂરી નાનામાં નાનો ગણ મેળવીએ. આ મેળવેલા નાનામાં નાના ગણના પરિમાણમાં 1 ઉમેરીને મેળવેલી સંખ્યાને આપેલા ગણનું પરિમાણ કહેવામાં આવે છે. રેખાખંડને બિંદુથી બે સ્વતંત્ર ભાગમાં વહેંચી શકાય. બિંદુનું પરિમાણ 0 ગણીએ છીએ . આથી રેખાખંડનું પરિમાણ $0 + 1 = 1$ છે. તે જ રીતે કોઈપણ સમતલ ને સુરેખા બે સ્વતંત્ર ભાગમાં વહેંચે છે, આથી સમતલનું પરિમાણ $1 + 1 = 2$ છે. એ જ રીતે ઘનને સમતલ બે સ્વતંત્ર ભાગમાં વહેંચે છે, આથી ઘનનું પરિમાણ $2 + 1 = 3$ છે.

સ્વસ્વરૂપ આકૃતિઓને પરિમાણ આપવા માટે આપણે રેખાખંડ, ચોરસ અને ઘનને પરિમાણ કઈ રીતે આપી શકીએ તે જોઈએ. રેખાખંડને બે સરખા ભાગમાં વહેંચી શકાય,. બંને રેખાખંડો જ છે. આ નાના રેખાખંડને બમણો કરીએ, એટલે કે s -માપથી વિસ્તૃત કરીએ, તો આપણને જૂનો રેખાખંડ મળે છે. આકૃતિ 5.5.3(a) માં આપેલું છે. આકૃતિ 5.5.3(b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલા ચોરસને ચાર એકસરખા ચોરસમાં વહેંચી શકાય. નાનામાં નાનો ભાગ પણ ચોરસ છે. આ નાના ભાગને બંને દિશામાં બમણો કરીએ એટલે કે s -માપ (2) થી વિસ્તૃત કરીએ તો આપણને જૂનો ચોરસ મળે છે. ઘનના એકસરખા આઠ ઘન ટુકડાઓ થઈ શકે. નાનામાં નાનો ભાગ પણ ઘન છે. આ નાના ભાગને દરેક દિશામાં બમણો કરીએ એટલે કે s -માપથી વિસ્તારીએ તો આપણને જૂનો ઘન મળે. આ

રીતે s -માપ 4, 5, ... વગેરે પણ લઈને વિચારી શકાય.



આકૃતિ 5.5.3

ધારો કે, કોઈ પણ સ્વસ્વરૂપ α -ગણ હોય અને તેના સ્વસ્વરૂપ નાના સ્વતંત્ર સ્વસ્વરૂપ ભાગને s -માપથી વિસ્તૃત કરીને સ્વસ્વરૂપ α ગણ મેળવી શકાય , તો $N = s^d$ થાય. રેખા માટે $2 = 2^1$ છે, ચોરસ માટે $4 = 2^2$ છે જ્યારે ઘન માટે $8 = 2^3$ થાય. આ d ને α -ગણના પરિમાણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. એટલે કે રેખાનું પરિમાણ 1, ચોરસનું પરિમાણ 2 અને ઘનનું પરિમાણ 3 છે. આ d નું પૂર્ણાંક હોવું જરૂરી નથી.

આથી $d = \dfrac{\ln N}{\ln s}$ થાય.

વોન કોશ વક્રનું પરિમાણ મેળવીએ. આકૃતિ 5.2.1. માં s_0 વોન કોશ વક્રની શરૂઆત છે. s_1 માં $N = 4$ સ્વતંત્ર ભાગ છે. નાનામાં નાના સ્વતંત્ર વોન કોશ વક્રને ત્રણ ગણો વિસ્તૃત કરીએ એટલે કે s -માપ (3) થી વિસ્તૃત કરીએ તો જૂનો વોન કોશ

વક્ર s_0 મળે. આથી $s = 3$ થાય અને $d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$ થાય. એટલે કે વોન કોશ વક્રનું પરિમાણ 1.26 છે જે બ્રિટનના પશ્ચિમ કિનારાના $D \approx 1.26$ બરાબર છે.

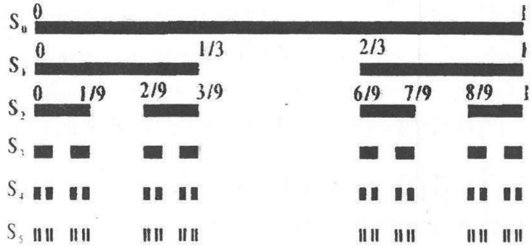
5.6 કેન્ટર ગણ (Cantor Set)

ફ્રેક્ટલના ઘણા બધા ગુણધર્મો ધરાવતો અગત્યનો ગણ જોઈએ. આ ગણનો અભ્યાસ ઓક્સફર્ડના ગણિતના અધ્યાપક હેન્રી સ્મીથે (Henry Smith) કરેલો, પણ અગણ્ય (uncountable) સંખ્યાઓ દર્શાવવા માટે સૌથી પહેલો ઉપયોગ કેન્ટરે કરેલો. આથી આ ગણ કેન્ટર ગણના નામથી પ્રચલિત છે.

એક યુનિટ લંબાઈનો રેખાખંડ $S_0 = [0, 1]$ લઈએ. આ રેખાખંડનો વચ્ચેનો ત્રીજો ભાગ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ગણમાંથી દૂર કરીએ અને જે વધે તેને $S_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ થી દર્શાવીએ. S_1 માં આપણને બે સંવૃત અંતરાલો (Closed Intervals) $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ અને $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ મળ્યા. આ બંને અંતરાલોમાં ફરીથી વચ્ચેના ત્રીજા ભાગો કાઢી લેતાં ચાર સંવૃત અંતરાલો મળશે. આકૃતિ 5.6.1 માં દર્શાવ્યું છે તે પ્રમાણે આ ગણને

$$S_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}\right]$$

થી દર્શાવીએ. આ જ રીતે ફરીથી S_2 ના સંવૃત અંતરાલોમાંથી વચ્ચેનો ત્રીજો ભાગ કાઢી લેતાં S_3 ગણ મળશે. જેમાં આઠ (2^3) સંવૃત અંતરાલો છે જે આકૃતિ 5.6.1 માં પણ જોઈ શકાશે. આ જ રીતે આ ક્રિયા અનંત સુધી કર્યે જતાં જે ગણ $C = S_\infty$ મળે તે ગણ કેન્ટરગણ છે. આ ગણના દરેક ભાગમાં ભાતભાતનાં કાણાં છે. C ના કોઈપણ ભાગને અનેક વખત વિસ્તૃત કરતાં બિંદુઓ ભાતભાતના અંતરે આવેલાં જોવા મળશે. આનો કોઈ અંત નથી, આ ફ્રેક્ટલની નિશાની છે.



આકૃતિ 5.6.1

ધારોકે L_n એ S_n ગણની લંબાઈ છે.

આપણી પાસે $L_0 = 1, L_1 = \frac{2}{3}, L_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right), ..., L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ છે. જ્યારે $n \to \infty$ હોય ત્યારે $L_n \to 0$ છે. આથી કેન્ટરગણની લંબાઈ શૂન્ય છે, આના કારણે કદાચ એમ લાગે કે, કેન્ટર ગણ નાનો છે. હકીકતમાં અગણ્ય બિંદુઓ આ ગણમાં છે. આ આપણે પરિમાણ ઉપરથી પણ જોઈ શકીએ. S_1 માં $N = 2$ છે અને s-scale માં $s = 3$ છે.

આથી પરિમાણ $d = \dfrac{\ln N}{\ln s} = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63$ છે.

* * *

એટલું સમજું છું

હું તો એટલું સમજું કે આપણા ઉપર અનેક લોકોના ઉપકાર છે. માતા-પિતા, ભાઈ-મિત્ર, શિક્ષક-માર્ગદર્શક વગેરે તેમજ આપણા માટે અનાજ-કાપડ આદિ પેદા કરનાર, મકાન ચણનાર એવા અનેક લોકોની સેવા નાનપણથી આપણને મળતી રહી છે. તો મારેય મારાથી બનતી બીજાઓની સેવા કરવી જોઈએ. તેથી કાંઈ એ લોકોના ઉપકારનો બદલો વળી રહેવાનો છે, એમ નથી. તેમ છતાંય કોશિશ તો કરવી રહી.

વિનોબા ભાવે

પ્રકરણ 6

દ્વિઘાતી અને ત્રિઘાતી સમીકરણો
(Quadratic and Cubic Equations)

6.0 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતમાં થયેલી ક્રાન્તિઓથી વાચકોને પરિચિત કરવાના આશયથી પ્રકરણ 6, 7 અને 8માં બીજગણિતમાં શું થયું છે તે જોઈશું. બીજગણિત નામ જ 'બીજ શોધવાનુ ગણિત' સૂચવે છે. આપણે બીજગણિતમાં સમીકરણોના ઉકેલો મેળવીએ છીએ. જેમકે, એકઘાતી સમીકરણ

$$x + 8 = 5$$

ના ઉકેલ માટે x ને એકબાજુ રાખતાં,

$$x = -8 + 5 = -3$$

મળશે. જો xની કિંમત ઋણ સંખ્યા ન હોઈ શકે તો આ એકઘાતી સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી ન શકાય તેમ કહેવું પડે. તે જ પ્રમાણે,

$$5x + 3 = 12$$

નો ઉકેલ $x = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$ છે. જો x ની કિંમત માણસ દર્શાવતી હોય, તો આ ઉકેલ ન ચાલે, પણ જો xની કિંમત રૂપિયા દર્શાવતી હોય તો આ ઉકેલ ચાલે. આથી ઉકેલનો આધાર ક્ષેત્ર (પૂર્ણાંક, અપૂર્ણાંક, વાસ્તવિક કે સંકર) ઉપર આધારિત છે. આજથી હજાર વર્ષ પહેલાં ઋણસંખ્યાઓ વિચિત્ર સંખ્યાઓ ગણાતી. દશમી સદીમાં મોટા વિદ્વાન રાજાઓ માટે ઋણ સંખ્યાઓ સ્વીકારવી અઘરી હતી. આખરે સંખ્યાઓ ગણવા માટે છે : એક ગાય, બે ગાયો, બત્રીસ ગાયો વગેરે સમજી શકાય, પણ ઋણ પચીસ ગાયો ? ગાંડા થયા લાગો છો !! અરે ડાયોફન્ટસ્ (Diophantus) જેવા પણ $4x + 6 = 2$ નો ઉકેલ $x = -1$ ને હાસ્યાસ્પદ ગણતા!! $x^2 - 2 = 0$ ના ઉકેલો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ છે. જો પૂર્ણાંકમાં જવાબ જોઈતો હોય તો આ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી ન શકાય, પણ જો વાસ્તવિક સંખ્યામાં ઉકેલ જોઈતા હોય તો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ ઉકેલો છે. એ જ રીતે, $x^2 + 1 = 0$ ના ઉકેલો $i = \sqrt{-1}$ અને $-i$ છે, જે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ નથી, પણ

સંકર સંખ્યાઓ છે. આથી, સમીકરણનો ઉકેલ જાણવા માટે ક્ષેત્ર જાણવું જરૂરી છે. ક્ષેત્ર જાણ્યા વગર સમીકરણનો ઉકેલ મળશે કે નહિ તે કહેવાનો કોઈ અર્થ નથી.

ગુજરાતીમાં બીજગણિત એટલે બીજ શોધવાનું ગણિત. નવમી સદીમાં બગદાદમાં ગણિત શીખવતા અલ ખોવારીઝ્મિ (Al-Khovarizmi) ના અરેબીક ભાષામાં લખેલા પુસ્તકના શીર્ષક અલ-જેબ્ર અલમુકાબલા (Al-jebr w`almuqabala) માંથી એલજિબ્રા શબ્દ આવે છે. અલ-જેબ્રનો અર્થ સમીકરણની એક બાજુથી બીજી બાજુ રકમ ફેરવવી અને મુકાબલાનો અર્થ છેવટની પદાવલીનું સાદું રૂપ આપવું. મધ્યયુગમાં સ્પેનમાં અલ-જેબ્ર શબ્દ દાખલ થયો અને તે સ્પેનમાં ઓલજીબ્રીસ્તા (Algebrista) બન્યો. ગ્રીક યુગ પહેલાં એટલે કે યુક્લિડના સમય પહેલાં એકઘાતી સમીકરણ $ax+b=0$ અને દ્વિઘાતી સમીકરણ $ax^2+bx+c=0$ નાં બીજ શોધવાની રીતો પ્રચલિત હતી. જ્યારે ત્રિઘાતી સમીકરણ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ નાં બીજોનાં સૂત્રો સોળમી સદીમાં શોધાયાં. અહીંયાં a, b, c, d અને e અચળ સંખ્યાઓ છે. પ્રકરણ 6, 7, અને 8માં આપણે a, b, c, d, e વગેરે અચળ સંખ્યાઓ માટે વાપરીશું.

6.1 દ્વિઘાતી સમીકરણ

ધારો કે, આપણે $ax^2+bx+c=0$ નાં બીજ જોઈએ છે. અહિં $a \neq 0$, b અને c વાસ્તવિક અચળ સંખ્યાઓ છે. $a \neq 0$ ન હોઈ દરેક રકમને a વડે ભાગતાં

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ મળે.

ડાબી બાજુને પૂર્ણ વર્ગ બનાવવા, બંને બાજુએ $\frac{b^2}{4a^2}$ ઉમેરતાં

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \text{ મળે.}$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ અને } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (6.1.1)$$

મળે.

6.2 ઉદાહરણ : $5x^2+8x-1=0$ ના ઉકેલો (6.1.1) નો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

$ax^2+bx+c=0$ સાથે સરખાવતાં $a=5, b=8$ અને $c=-1$ મળે.

આથી, $b^2-4ac=64+20=84$ થાય.

આથી, $x=\frac{-8+\sqrt{84}}{10}\approx 0.1165$ અને $x=\frac{-8-\sqrt{84}}{10}\approx -1.7165$ મળે.

6.3 ત્રિઘાતી સમીકરણ

યુરોપ અને ખાસ તો ઇટાલીમાં ચૌદથી સોળમા સૈકાને રેનેસાં (Renaissance) એટલે કે પુનઃ જાગૃતિનો સમય ગણાય છે. જેમાં લોકો ઘણાં સાહસો કરતા અને સાહિત્ય, વિજ્ઞાન અને વેપારમાં આગળ હતા. જેવો હાલનો અમેરિકાનો સમય છે તેવો જ સમય ઇટાલીનો હતો. આ સમય દરમિયાન ઈ.સ. 1500 માં નિક્કોલો ફોન્ટાનાનો (Niccolo Fontana) જન્મ થયો. ઈ.સ. 1512માં ફ્રેન્ચ લોકોએ ઇટાલીના ભાગ બ્રેસ્સિયાનો (Brescia) કબજો લીધો. નિક્કોલો અને તેના પિતાએ ખ્રિસ્તી દેવળમાં (Church) આશરો લીધો, પણ સૈનિકોએ આ દેવળમાંનાં નિર્દોષ માણસોની કતલ કરી. નિક્કોલોના પિતાજીની પણ કતલ થઈ અને નિક્કોલાના શરીર ઉપર અને મોઢા ઉપર પણ તીક્ષ્ણ હથિયારોના ઘણા ઘા પડ્યા. બધાએ તેને મરેલો માનીને છોડી દીધો. રાતના ચોરીછૂપીથી નિક્કોલોની મા આ દેવળમાં આવી અને નિક્કોલોને લઈ ગઈ. માની મહેનત અને કુદરતની કૃપાએ તે જીવી ગયા. પણ, તેમણે જે કંઈ દેવળમાં જોયેલું, તેને કારણે તોતડાતું બોલતા. આપણે ઘણી વખત આવા માણસોને તોતડા કહીએ છીએ. ઇટાલિયન ભાષામાં ટાર્ટાગ્લીઆ (Tartaglia) એટલે તોતડો. નિક્કોલોએ ટાર્ટાગ્લીઆ નામ સ્વીકારી લીધું.

તે સમયમાં ઉચ્ચ અને પૈસાદાર વર્ગ માટે જ વ્યવસ્થિત રીતે ભણવાનું હતું. ટાર્ટાગ્લીઆએ જાતે જ ગણિતનો અભ્યાસ કર્યો અને તે સમયના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી

બન્યા. તેમણે યુક્લિડ અને આર્કિમિડિઝનાં પુસ્તકોનું ઇટાલીયન ભાષામાં ભાષાંતર કર્યું. અત્યારની જેમ સંશોધનનાં પરિણામો સામયિકોમાં (Journal) પ્રસિદ્ધ કરવાનો તે સમયે રિવાજ ન હતો. તે સમયે શોધો ખાનગી રખાતી અને વિરોધીઓ સામે મુશ્કેલ સવાલોના ઉકેલોની હરીફાઈમાં વપરાતી. ઈ.સ. 1535માં ટાર્ટાગ્લીઆએ $x^3 + ax^2 = b$ નાં બીજ શોધવાની રીત શોધી કાઢી અને એ જાહેરાત કરી. આ સમય દરમિયાન ગણિતના જાણીતા પ્રોફેસર સિપિઓ ડેલ ફેરોએ (Scipio del Ferro) $x^3 + ax = b$ નાં બીજ શોધવાની રીત શોધેલી અને તેમના વિદ્યાર્થી એન્ટોનિયો ફિયોરને (Antonio Fier) તેમણે એ શીખવેલી. આથી એન્ટોનિયો ફિયોર અને ટાર્ટાગ્લીઆ વચ્ચે હરીફાઈ થઈ. ટાર્ટાગ્લીઆએ કોઈપણ પ્રકારના ત્રિઘાતી સમીકરણનાં બીજ શોધી શકાય તે રીતે તેમની રીતને વિસ્તારેલી. બંને હરીફોએ વિરોધી માટે 30 પ્રશ્નો તૈયાર કર્યા. જે વધારેમાં વધારે પ્રશ્નોના સાચા જવાબ આપે તે, તટસ્થ વકીલના જોડે બંને જણે સરખી મૂકેલી બધી રકમ લઈ જાય. ટાર્ટાગ્લીઆએ ફિયોરના બધા સવાલોના જવાબ બે કલાકથી ઓછા સમયમાં આપ્યા, જ્યારે ફિયોર ટાર્ટાગ્લીઆના એક પણ સવાલનો જવાબ આપી ન શક્યા. ટાર્ટાગ્લીઆએ તેમની રીત કોઈને પણ જાણવા ન દીધી, પણ ગિરોલેમો કાર્ડાનોએ (Girolamo Cardano) ટાર્ટાગ્લીઆને સ્પેનીશ લશ્કરના તોપખાના વિભાગમાં સલાહકાર તરીકે નિમણૂક કરાવવાની લાલચ આપી. ટાર્ટાગ્લીઆ લાલચ ઠુકરાવી ન શક્યા. ટાર્ટાગ્લીઆએ કાર્ડાનોને ત્રિઘાતી સમીકરણના ઉકેલની રીત એ શરતે શીખવેલી કે કાર્ડાનોએ બીજા કોઈનેય આ રીત ન જણાવવી.

ગિરોલેમો કાર્ડાનો તે જમાનામાં ખૂબ જ શક્તિશાળી માણસ હતા. કાર્ડાનો પેવિયા (Pavia) શહેરના ધારાશાસ્ત્રીના ગેરકાયદેસરના પુત્ર હતા. તેમણે દાકતર, ગણિતશાસ્ત્રી અને જ્યોતિષશાસ્ત્રી તરીકે નામના મેળવેલી, પણ સાથે સાથે તે જુગારી, દુષ્ટ અને પાખંડી પણ હતા. શરૂઆતમાં દાકતર તરીકે ની પ્રેક્ટિસ બરાબર ન ચાલતાં ગરીબો માટે બાંધેલા ઘરમાં રહેવા જવું પડેલું.આ સમય દરમિયાન મિત્રોની મદદથી ગણિતના અધ્યાપક થયેલા. મિલાન (Milan) શહેરના સેનેટરના પુત્રને સાજો કર્યા પછી તેમની પ્રેક્ટિસ બરાબર ચાલતી. તેઓ દાકતરી કોલેજના રેકટર પણ બન્યા અને તે સમયના પ્રસિદ્ધ માણસોના દાકતર હતા. તીવ્ર ચેપી રોગના તાવનું સૌથી પહેલું વસ્તુલક્ષી વર્ણન તેમણે કરેલું. તે તેજસ્વી દાકતર હતા. કાર્ડાનો પાકા જુગારી હોઈને સંભાવનાનો નિયમ જોઈને મુગ્ધ બનેલા. જ્યોતિષશાસ્ત્રમાં પણ ગણિત વાપરતા.

તેમની આગાહીઓ જાણવા માટે લોકો પડાપડી કરતા. તેમનું ખૂબ જ અગત્યનું કામ આર્સ મેગ્ના (Ars Magna (The Great Art)) નામનું પુસ્તક લખવાનું હતું. આ પુસ્તકમાં તે સમય સુધીનું બીજગણિતનું લગભગ બધું જ કામ શામ, દામ અને દંડથી મેળવીને લખેલું.

કાર્ડાનોએ ટાર્ટાગ્લીઆની ત્રિઘાતી સમીકરણના ઉકેલની રીત કોઈને ન જણાવવાની શરતે જાણેલી તે પણ આર્સ મેગ્નામાં જણાવેલી. કાર્ડાનોએ સાથે સાથે આ રીતનો બધો જ યશ ટાર્ટાગ્લીઆને આપેલો, પણ કાર્ડાનોએ વચનનો ભંગ કર્યો હતો. આથી બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓમાં મોટો વિવાદ અને મારામારી થયેલી. નસીબજોગે ટાર્ટાગ્લીઆ જીવતા નાસી છૂટ્યા પણ બ્રેસ્સિયાની અધ્યાયકની જગ્યા ખોવી પડી. હાલમાં ટાર્ટાગ્લીઆની રીત કાર્ડાનોની રીત તરીકે ઓળખાય છે તે જોઈએ.

ધારો કે, આપણે સમીકરણ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ જોઈએ છે. અહીંયાં a, b અને c વાસ્તવિક અચળ સંખ્યાઓ છે. આ સમીકરણને સરળ બનાવવા x^2 ની રકમ દૂર કરવી જોઈએ. આના માટે $x = y + \alpha$, જ્યાં α અચળ વાસ્તવિક સંખ્યા છે, મૂકીને સાદું રૂપ આપીએ તો,

$$y^3 + (3\alpha + a).y^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)y + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$$

મળશે. આમાં y^2 ની રકમ ન જોઈતી હોઈ, તેના ગુણકને શૂન્ય કરવા માટે $\alpha = -a/3$ લઈએ. આ સમીકરણમાં $\alpha = -a/3$ મૂકતાં આપણને

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0 \qquad (6.3.1)$$

મળશે. આ સમીકરણમાં $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ અને $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c$ ...(6.3.2)

મૂકતાં આપણને y^2 વગરનું સમીકરણ

$$y^3 + py + q = 0 \qquad ...(6.3.3)$$

મળે.

આ સમીકરણ આપેલા શરૂઆતના સમીકરણ કરતાં સરળ છે. આપણે બીજ $y = u + v$ ધારીએ તો વધારે પડતું ન ગણાય. આથી $y = u + v$ (6.3.3)માં મૂકીને

સાદું રૂપ આપતાં આપણને

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$$

મળે. આપણે u અને v નાં સરળ સમીકરણો મેળવવા પ્રયત્ન કરીએ છીએ. આથી જો $3uv + p = 0$ લઈએ, તો આપણને u અને v નાં બે સમીકરણો.

$$u^3 + v^3 = -q \text{ અને } uv = -p/3 \qquad ...(6.3.4)$$

મળે. પહેલા સમીકરણમાં બીજા સમીકરણમાંથી મેળવેલી v ની કિંમત $v = -\dfrac{p}{3u}$

મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં આપણને u^3 નું દ્વિઘાતી સમીકરણ

$$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \text{ મળે.}$$

u^3 ના આ દ્વિઘાતી સમીકરણમાંથી

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

મળે. p અને q ની કિંમતો મૂકતાં u ની કિંમતો મળે. સરળતા માટે

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ અને } B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ મૂકતાં}$$

આપણને $u^3 = A$ અને $v^3 = -q - u^3 = -q - A = B$ મળે.

$$u^3 - A = u^3 - (\sqrt[3]{A})^3 = 0$$

$$\therefore (u - \sqrt[3]{A})(u^2 + u\sqrt[3]{A} + (\sqrt[3]{A})^2) = 0$$

$$\therefore u - \sqrt[3]{A} = 0 \text{ અને } u^2 + u\sqrt[3]{A} + (\sqrt[3]{A})^2 = 0$$

$$\therefore u = \sqrt[3]{A} \text{ અને } u = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{A} \text{ મળે.}$$

$$w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ મૂકતાં } w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{ મળશે.}$$

આથી $u = \sqrt[3]{A}$, $w\sqrt[3]{A}$ અને $w^2\sqrt[3]{A}$ મળશે.

$v^3 = B$ હોઈને એ જ રીતે $v = \sqrt[3]{B}$, $w\sqrt[3]{B}$ અને $w^2(\sqrt[3]{B})$ મળશે.
આથી y ની ત્રણ ભિન્ન કિંમતો

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

$$y_2 = w(\sqrt[3]{A}) + w^2(\sqrt[3]{B}) \text{ અને}$$

$$y_3 = w^2(\sqrt[3]{A}) + w(\sqrt[3]{B}) \qquad ...(6.3.5)$$

મળશે. આ ઉપરથી $x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$, $x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$ અને $x_3 = y_3 - \frac{a}{3}$ થાય.

6.4 ઉદાહરણ :

(1) $x^3 - 6x^2 - 6 = 0$ ના ઉકેલો કાર્ડાનોની રીતથી મેળવો.

$\alpha = -\frac{a}{3} = \frac{6}{3} = 2$ થાય. આથી $x = y + \alpha = y + 2$ મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં મૂળ સમીકરણ $y^3 - 12y - 22 = 0$ બને.

આપણે કાર્ડાનોની રીતથી ઉકેલો મેળવવાના હોઈ $y = u + v$ મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં

$$u^3 + v^3 + (3uv - 12)(u + v) - 22 = 0 \text{ મળશે.}$$

આ સમીકરણમાં $3uv - 12 = 0$ લેતાં, આપણને u અને v નાં બે સમીકરણો

$$u^3 + v^3 = 22,\ uv = 4 \text{ મળે.}$$

$v = \frac{4}{u}$, $u^3 + v^3 = 22$ માં મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં $u^6 - 22u^3 + 64 = 0$ મળે.

આથી $u^3 = 11 \pm \sqrt{57}$, $v^3 = 22 - u^3 = 11 \mp \sqrt{57}$

આથી $A = 11 + \sqrt{57}$ અને $B = 11 - \sqrt{57}$ મળે.

(6.3.5)માં આ કિંમતો મૂકતાં

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 4.1581$$

$$y_2 = w(\sqrt[3]{A}) + w^2(\sqrt[3]{B}) = -2.079 + 0.9838i$$

$$y_3 = w^2(\sqrt[3]{A}) + w(\sqrt[3]{B}) = -2.079 - 0.9838i$$

$$\therefore x_1 = y_1 + 2 = 6.1581,\ x_2 = y_2 + 2 = -0.079 + 0.9838i$$

$$x_3 = y_3 + 2 = -0.079 - 0.9838i$$

આથી $x = 6.1581,\ -0.079 + 0.9838i$ અને $-0.079 - 0.9838i$ ઉકેલો છે.

કાર્ડાનોના પુત્રને, તેની બેવફા પત્નીને ઝેર આપીને મારી નાખવા બદલ ઈ.સ. 1560માં મોતની સજા થઈ. એનાં દશ વર્ષ પછી સનાતન માન્યતા વિરુદ્ધ ઈશુ ખ્રિસ્તના જન્માક્ષર પ્રસિદ્ધ કરવા બદલ કાર્ડાનોને ઘણા મહિના જેલમાં રહેવુ પડ્યું. આખરે કાર્ડાનોએ ખાનગીમાં એમ સ્વીકાર્યું કે તેમણે જન્માક્ષર પ્રસિદ્ધ કરવા ન જોઈએ, ત્યારે તેમને જેલમાંથી છોડ્યા. તેજસ્વી કાર્ડાનોને યુનિવર્સિટીની જગ્યા છોડવી પડી અને સાથે સાથે પુસ્તકો પ્રસિદ્ધ કરવાનો હક પણ ગયો. નસીબજોગે, પોપે કાર્ડાનોને જીવ્યા ત્યાં સુધી થોડુંક પેન્શન આપ્યું.

* * *

એટલે વીસમી વખત

"છોકરાંઓને એકની એક વાત વીસ વખત કહેતાં તમને કંટાળો નથી આવતો?" એવો સવાલ એક શિક્ષકને કોઈએ કર્યો.

તેણે જવાબ આપ્યો : "ઓગણીસ વખત કહેલું નકામું ન જાય, એટલા માટે વીસમી વખત કહું છું."

કેળવણી એક લડત છે. શિક્ષકોનો પક્ષ હારી બેસશે, તો જગતની શક્તિ નામશેષ થઈ જશે. એક જ રસ્તો છે : ફરી ફરી સમજાવો, ફરી ફરી જાગૃત કરો, અકથ્ય ધીરજ ધરો.

કાકા કાલેલકર

પ્રકરણ 7

ચતુર્ઘાતી સમીકરણો
(Biquadratic Equations)

7.1 ચતુર્ઘાતી સમીકરણ

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ચતુર્ઘાતી સમીકરણના ઉકેલની રીત પણ આ સમૂહના માણસે જ શોધેલી. કાર્ડાનોના ત્યાં ઘરકામ માટે નાનપણથી નોકરી કરતા લુડોવિકો ફેરારિએ (Ludovico Ferrari) એ શોધેલી. કાર્ડાનોને ત્યાં નોકરી કરતાં કરતાં ફેરારિ લેટીન, ગ્રીક અને ગણિત શીખેલા. ટાર્ટાગ્લીઆ જોડેની હરીફાઈમાં જીતવાથી તેમને માન્ટુઆ (Mantua) રાજ્યના રિજન્ટના (Regent) હાથ નીચે કરવેરા આકારણી વિભાગમાં દેખરેખ રાખનાર તરીકે નોકરી મળી. પણ સ્વભાવ ઉપર કાબૂ ન રાખતાં રિજન્ટ જોડે બાખડી પડ્યા અને નોકરી ખોઈ. ફક્ત 43 વર્ષે ફેરારિ ગુજરી ગયા. લોકવાયકા છે કે, ફેરારિને તેમની બહેને ઝેર આપેલું. ફેરારિની શોધેલી રીત પણ કાર્ડાનોના પુસ્તક આર્સ મેગ્નામાં (Ars Magna) આપેલી છે.

આપેલા સમીકરણમાં બે પદોનો ઉપયોગ કરીને પૂર્ણ વર્ગ કરવા $\frac{a^2x^2}{4}$ બંને બાજુએ ઉમેરીને આપેલું સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = \frac{a^2x^2}{4} - bx^2 - cx - d$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = x^2\left(\frac{a^2}{4} - b\right) - cx - d$$

જો, જમણીબાજુ પૂર્ણ વર્ગ હોય તો સરળતાપૂર્વક બીજો મળે. સામાન્ય રીતે તેવું ન બને.

ફેરારિની રીતનો મુખ્ય આશય બંને બાજુએ $y\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{y^2}{4}$ ઉમેરીને y ની કિંમત એવી પસંદ કરવી કે જેથી જમણી બાજુ પૂર્ણવર્ગ બને. આથી,

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+y\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{y^2}{4}=x^2\left(\frac{a^2}{4}-b\right)-cx-d$$

$$+y\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)+\frac{y^2}{4}$$

$$=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\frac{y^2}{4}-d.$$

આ સમીકરણમાં $A=\frac{a^2}{4}-b+y, B=\frac{ay}{2}-c$ અને $C=\frac{y^2}{4}-d$ મૂકતાં

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=Ax^2+Bx+C$$ મળે.

જમણી બાજુ પૂર્ણવર્ગ હોવા માટે $B^2-4AC=0$ હોવું જોઈએ. A, B અને C ની કિંમતો $B^2-4AC=0$ માં મૂકતાં

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0$$ મળે.

આ સમીકરણનું સાદું રૂપ આપતાં

$$y^3-by^2+y(ac-4d)+(4bd-c^2-a^2d)=0$$ મળે.

આ ત્રિઘાતી સમીકરણનું ગમે તે એક બીજ આપણે કાર્ડાનોની રીતે મેળવી શકીએ. y ની આ કિંમતનો ઉપયોગ કરીને આપણે e અને f ની કિંમતો મેળવી શકીએ, કે જેથી

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2 = Ax^2+bx+c=(ex+f)^2 \text{ થાય.}$$

આમાંથી આપણને બે દ્વિઘાતી સમીકરણો

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}=ex+f \quad \text{અને} \quad x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}=-(ex+f)$$

મળે. e, f અને y ની કિંમતો a, b, c અને d માં મૂકતાં આપણને આ બંને દ્વિઘાતી સમીકરણોનાં બીજ a, b, c અને d માં મળશે.

7.2 ઉદાહરણ $x^4+12x-5=0$ ના ઉકેલો ફેરારિની રીતથી મેળવો.

$$x^4+12x-5=0 \qquad \therefore\ x^4=-12x+5$$

બંને બાજુએ $x^2y+\frac{y^2}{4}$ ઉમેરતાં, ડાબી બાજુ પૂર્ણવર્ગ મળશે.

$$\therefore\ x^4+x^2y+\frac{y^2}{4}=x^2y-12x+\frac{y^2}{4}+5$$

$$\therefore\ \left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2 = Ax^2+Bx+C=yx^2-12x+\left(\frac{y^2}{4}+5\right)$$

આથી $A=y$, $B=-12$ અને $C=\frac{y^2}{4}+5$ છે.

જમણી બાજુ પૂર્ણવર્ગ બનાવવા માટે

$$B^2-4AC=(-12)^2-4y\left(\frac{y^2}{4}+5\right)=144-y^3-20y=0$$

$\therefore\ y^3+20y-144=0$ નો ગમે તે ઉકેલ લઈએ તો પૂર્ણવર્ગ મળે. એક ઉકેલ $y=4$

છે. $y = 4$ મૂકતાં

$$(x^2 + 2)^2 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \text{ થાય.}$$

આથી $x^2 + 2 = 2x - 3$ અને $x^2 + 2 = -(2x - 3)$ થાય.

$\therefore\ x^2 - 2x + 5 = 0$ અને $x^2 + 2x - 1 = 0$ દ્વિઘાતી સમીકરણો મળે.

$\therefore\ x = 1 + 2i,\ 1 - 2i$ અને $x = -1 + \sqrt{2},\ -1 - \sqrt{2}$

આથી $x = 1 + 2i,\ 1 - 2i,\ -1 + \sqrt{2}$ અને $-1 - \sqrt{2}$ ઉકેલ મળે.

* * *

અહીંથી ચાલ્યા જાઓ !

આપ સૌની બેઠકો સમાપ્ત કરવાનો આ યોગ્ય અવસર છે. કારણકે, આ પવિત્ર સ્થળનું આપ ભારે અપમાન કરી રહ્યા છો. આપનામાં બધા જ દુર્ગુણો મોજૂદ છે. આપ સૌ સમસ્ત પ્રજાના દુશ્મન છો. નાનકડી રકમ માટે આપ ઈશ્વરને પણ વેચી દેશો અને સાધારણ સ્વાર્થ માટે જનતાને વેચી દેશો. આપમાંથી કોણે પોતાના આત્માનો સોદો લાંચથી નથી કર્યો ?

આ પવિત્ર સ્થાનને અપવિત્ર કરનાર વેશ્યાઓ જેવા છો આપ. ભગવાનના આ પવિત્ર મંદિરને આપે ચોરોના આશ્રયસ્થાનમાં પલટાવી નાખ્યું છે. જનતાએ પોતાના કષ્ટના નિવારણ માટે આપણને અહીં મોકલ્યા હતા. પરંતુ આપ તો એ જનતાને જ સૌથી વધુ કષ્ટ આપનારા થઈ ગયા છો.

એટલે જલદી કરો, ભગવાનને ખાતર અહીંથી ચાલ્યા જાઓ અને પાર્લામેન્ટના દરવાજા બંધ કરો !

1665 માં સંસદને બરખાસ્ત કરતી વેળાના પ્રજાસત્તાક (કોમનવેલ્થ) મંત્રીમંડળના વડા ઓલિવર ક્રોમવેલના ભાષણનો થોડોક ભાગ છે.

પ્રકરણ 8

પંચઘાતી સમીકરણો

(Quintic or Fifth Degree Equations)

8.0 પ્રાસ્તાવિક

ઈ.સ. 1500 થી ઈ.સ. 1600 સુધીમાં બીજગણિતમાં થયેલાં અગત્યનાં સંશોધનોના કારણે બીજગણિત, ગણિતની અગત્યની શાખા ગણાવવા માંડી. દ્વિઘાતી, ત્રિઘાતી અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણોનાં બીજનાં સૂત્રો જે સરળતાથી વાપરીને બીજ મેળવી શકાય છે તે જોઈને લગભગ બસો વર્ષ સુધી નાના-મોટા, જુવાન-વૃદ્ધ, જાણીતા-અજાણ્યા, દરેક પ્રકારના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ પંચઘાતી સમીકરણનાં બીજ મેળવવા માટેનાં સૂત્રો મેળવવા માટે ખૂબ જ મરણિયા પ્રયાસો કર્યા.

લિયોનાર્ડ ઑઈલરે (Leonhard Euler) પણ પંચઘાતી સમીકરણનો ઉકેલ શોધવા પ્રયત્ન કરેલો, પણ સફળ ન થયા. તેમણે $x^5 - 5px^3 + 5p^2x - q = 0$, જ્યાં p અને q અચળ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે એના બીજ સૂત્રથી મેળવેલાં. સેમ્યુલ બ્રિન્ગે (Samual Bring) પંચઘાતી સમીકરણ $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ ને $x^5 + px + q = 0$ ના સરળ સ્વરૂપમાં મેળવેલું, પણ તે ભુલાઈ ગયું અને ફરીથી ઓગણીસમી સદીમાં જ્યોર્જ બર્ચ જેરાર્ડ (George Birch Jerrard) ફરીથી મેળવેલું. આ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવો સહેલો નથી.

$ax^2 + bx + c = 0$ ના ઉકેલો x_1 અને x_2 હોય તો

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

બન્ને બાજુએ સરખાવતાં,

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$x_1 x_2 = c/a$ મળે.

$$x = \frac{1}{2}\left[-\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right] = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}\right].$$

આ સૂત્રમાં x_1 ની જગ્યાએ x_2 લખીએ અને x_2 ની જગ્યાએ x_1 લખીએ તો પણ સૂત્ર બદલાતું નથી. આ વિચાર વેન્ડરમોન્ડે (Vandermonde 1735-96) અને વેરિન્ગે (Wariag 1736-98) પંચઘાતી કે ગમે તે ઘાતના સમીકરણનો સૂત્રને સમમિતિ સ્વરૂપમાં દર્શાવવાનો પ્રશ્ન ઊભો કર્યો.

જોસેફ-લુઈસ લાગ્રાન્જે (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813) તેમના પુસ્તક Reflection On the Resolution of Algebraic Equationsમાં ઘણાબધાનું કામ ઝીણવટપૂર્વક તપાસીને દ્વિઘાતી, ત્રિઘાતી અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણોના ઉકેલો એક સમાન કાર્યવિધિથી પણ મેળવી શકાય તેમ બતાવ્યુ છે. આ રીતથી દ્વિઘાતી, ત્રિઘાતી અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણોના ઉકેલ એક ઘાત ઓછી કરીને મેળવેલા સમીકરણોના ઉકેલથી મળે છે, જ્યારે પંચઘાતી સમીકરણના ઉકેલ માટે આ રીત અપનાવી ત્યારે મેળવેલા સમીકરણની એક ઘાત ઓછી થવાને બદલે એક ઘાત વધી, એટલે કે છ ઘાતી સમીકરણ બન્યું, આથી લેગ્રાન્જે નવો રસ્તો વિચારેલો અને સમીકરણના ગુણધર્મનો આધાર ઉકેલોના ક્રમશયના સમમિતિ સ્વરૂપ ઉપર રાખે છે તે શોધેલું.

પાઓલો રૂફ્ફિની (Paolo Ruffini 1765-1822) વેલેન્ટાનો, ઇટાલી (Valentano, Italy) ના જાણીતા ડૉ. બાસિલિયા રૂફ્ફિનીનો (Basileo Ruffini) પુત્ર હતા. તેઓ ઈ.સ. 1788માં ગણિત, વૈદકશાસ્ત્ર (medicine), સાહિત્ય અને તત્ત્વજ્ઞાન ભણીને સ્નાતક થયેલા. તેમણે દાકતર તરીકેની પ્રેક્ટિસ અને ગણિત ભણાવવાનું સાથે ચાલુ રાખેલું. તેઓએ સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર કે n - મૂળ જેવી સાદી ક્રિયાઓ વાપરીને પંચઘાતી સમીકરણના ઉકેલનું સૂત્ર મેળવી ન શકાય તેવું સાબિત કરેલું. ‘Teoria generale delle equazioni (General Theory of Equations)’ 516 પાનાનાં ઈ.સ. 1799માં પ્રસિદ્ધ થયેલા પુસ્તકમાં આ સાબિતી આપેલી, પણ ગણિતશાસ્ત્રીઓની દુનિયા એ સ્વીકારવા તૈયાર ન હતી.

આ સાબિતી તેમણે લેગ્રાન્જ અને રૉયલ સોસાયટી ઑફ લંડનને મોકલી આપી, પણ, કોઈ તે સાબિતી સ્વીકારવા તૈયાર ન હતું. ખરું કારણ ગણિતશાસ્ત્રીઓના મગજમાં તે બેસતું ન હતું. રૂફિફનીના સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેમની સાબિતીમાં ભૂલ જોઈ ન શકેલા અને સાથે સાથે સ્વીકારવા પણ તૈયાર ન હતા. રૂફિફનીને ગણિતશાસ્ત્રીઓના મગજમાં ક્રાન્તિકારી વિચાર લાવનાર જરૂરથી ગણી શકાય. આ પછીના ગણિતશાસ્ત્રીઓ પંચઘાતી સમીકરણનું સૂત્ર મેળવવાને બદલે સૂત્ર ન મળે તે સાબિત કરવા પ્રયત્ન કરવા લાગ્યા. રૂફિફનીએ ત્રિઘાતી અને ચતુર્ઘાતી સમીકરણોના ઉકેલો વચ્ચેનો સંબંધ અને ઉકેલોના ક્રમશયને એક પગલું આગળ લઈ ગયા, જે અરૂપ ઍલ્જિબ્રાની શરૂઆત દર્શાવે છે.

સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર કે n-મૂળ જેવી ક્રિયાઓથી પંચઘાતી સમીકરણના ઉકેલોનું સૂત્ર મેળવી ન શકાય તે રુફિફનીએ ખરેખર સાબિત કરેલું ? મળેલી માહિતી પ્રમાણે રૂફિફનીની સાબિતીમાં જે તેમણે ધારેલું તે તેમણે સાબિત કરવું જોઈએ તે તેમના ધ્યાન બહાર ગયેલું. આથી તેમણે સાબિત કર્યું તેમ ન કહી શકાય. રૂફિફનીએ તેમના દરદીઓની બરાબર કાળજી નહિ લઈ શકાય તે કારણે ગણિતવિભાગના વડા થવાની ના પાડેલી.

નિલ્સ એબેલે (Niels Abel) 21 વર્ષની ઉંમરે ભારે જહેમત લઈને અસંશયાત્મક રીતે સાબિત કર્યું કે, પાંચ કે પાંચથી વધારે ઘાતવાળાં સમીકરણોનાં બીજ મેળવવા માટેનાં સૂત્રોનું અસ્તિત્વ નથી. એબેલે Reduction ad absurdumની રીતથી એ સાબિત કર્યું છે. એબેલે ધાર્યું કે પંચઘાતી સમીકરણનું સૂત્ર છે અને સાબિત કર્યું કે આ ધારણાથી વિરોધાભાસ ઊભો થાય છે. પિટર પેસિકના (Peter Pesic)ના પુસ્તક એબેલ્સ પ્રૂફ (Abels Proof) માં સાબિતી આપેલી છે. ઈ.સ. 1826માં Journal for Pure and Applied Mathematics માં આ સાબિતિ પ્રસિદ્ધ થયેલી. આ સનસનાટીભરી શોધથી બીજગણિતના પ્રાચીન યુગનો અંત આવ્યો. ત્યાર પછીનાં વર્ષોમાં બીજગણિતે તદ્દન નવીન દિશા પકડી.

એબેલના સમય દરમ્યાન યુરોપમાં ગણિતશાસ્ત્રીઓ તદ્દન નવી જ જાતના ઍલ્જિબ્રાનો અભ્યાસ કરતા હતા. આ સમય દરમ્યાન શ્રેણિક ઍલ્જિબ્રા (Matrix Algebra), બૂલીય ઍલ્જિબ્રા (Boolean Algebra) શોધાયાં. ઘણીબધી જાતના ઍલ્જિબ્રામાં ઘણા બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓ કામ કરતા હતા, અને દરેકને લાગવા માંડ્યુ કે ઍલ્જિબ્રા ફક્ત સમીકરણોના ઉકેલ નથી. આ બધા ઍલ્જિબ્રામાં મળતું શું

આવે છે ? આ બધાનાં વિશિષ્ટ લક્ષણ શું છે કે જેથી આપણે આ બધાને ઍલ્જિબ્રા કહીએ છીએ? દરેક ઍલ્જિબ્રામાં ગણ હોય છે અને ગણના બે ઘટકોને જોડવા સંયોગનિયમ (દ્વિક્રિયા) હોય છે અને આ સંયોગનિયમથી બે ઘટકોને જોડ્યા પછી મળતો ઘટક ગણમાં હોય છે. ઍલ્જિબ્રાના આધારભૂત માળખામાં (Algebraic Structure) કોઈપણ એક ગણ અને આ ગણના બે ઘટકોને જોડવા માટેનો સંયોગ નિયમ હોય છે. દાખલા તરીકે, બધા રંગોનો ગણ લઈએ અને બે રંગોનું મિશ્રણ કરવાને સંયોગનિયમ ગણીએ. આ મિશ્રણ કરીને મળેલો નવો રંગ આપણા ગણમાં છે. આ પણ ઍલ્જિબ્રાનું આધારભૂત માળખું જ ગણાય. આને ગણિત જોડે કોઈ લેવા દેવા નથી.

પ્રાચીનકાળથી પ્રસ્થાપિત (પૂર્વધારણાના) સિદ્ધાંતની (Axiomatic Method) શોધ ખૂબ જ ધ્યાન ખેંચે તેવી અને મૂંઝવે તેવી છે. અચાનક જ ઈ.સ. પૂર્વે 300માં યુક્લિડે એલિમેન્ટ્સમાં (Euclid Elements) સામાન્ય અનુભવથી નક્કી કરેલા ફક્ત દશ પ્રસ્થાપિત સિદ્ધાંતમાંથી કોઈ સરળ તો કોઈ અઘરાં એવાં 465 પ્રમેયો આપ્યાં. આ પ્રસ્થાપિત સિદ્ધાંતની રીત કોઈપણ શંકા વગર ગ્રીક સંસ્કૃતિની ખૂબ જ અગત્યની શોધ ગણાય. એની છાપ એટલી મોટી છે કે, સદીઓની સદીઓ વીતી છતાં ગણિતશાસ્ત્રીઓ એનું અનુકરણ કરતા રહ્યા અને હાલમાં પણ કરે છે. આ અનુકરણ એટલા સુધી કે દકાર્ત (Descartes) અને લીબનિઝ (Leibniz) નું માનવના બધા જ્ઞાનને પૂર્વધારણામાં મૂકવાનું સ્વપ્ન હતું. આખરે ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઓછામાં ઓછી પૂર્વધારણાઓ શોધી કાઢી કે જેથી બધા જ ઍલ્જિબ્રામાં સત્ય હોય તેવા ઍલ્જિબ્રાના નિયમો આ પૂર્વધારણાઓથી સાબિત થઈ શકે. ભૂમિતિની પૂર્વધારણાઓ કે જેનાથી આપણે પ્રમેયો સાબિત કરીએ છીએ તેને સમાંતર જ ઍલ્જિબ્રાની પૂર્વધારણાઓ છે. ઍલ્જિબ્રામાં પૂર્વધારણા અને અરૂપ (Abstract) તરફની ચળવળ આશરે ઈ.સ. 1830 થી શરૂ થઈ અને લગભગ સો વર્ષ પછી, એટલે કે આશરે ઈ.સ. 1930માં પૂરી થઈ. આ ચળવળમાં ખ્યાતનામ ગણિતશાસ્ત્રીઓના વિચારોએ ભાગ ભજવ્યો, પણ લાંબાગાળાની અને ઘેરી છાપ એવરિસ્ત ગાલોઓ (Evariste Galois) નામના ફ્રેન્ચ યુવાનની છે.

ગણિતના ઈતિહાસમાં એવરિસ્ત ગાલોઆની વાત અતિશય સંવેદનાભરી અને કરુણ છે. સંવેદનશીલ અને અસાધારણ આવડતવાળા ગાલોઆ દ્વન્દ્વયુદ્ધમાં ફક્ત વીસ વર્ષની વયે માર્યા ગયેલા. એમની ટૂંકી જિંદગી કરુણતા અને હતાશાભરી હતી. ગાલોઆ જ્યારે અઢાર વર્ષના હતા ત્યારે તેમના પિતાજીએ આપઘાત કરેલો.

તેમને જિંદગીમાં યોગ્ય દોરવણી આપનાર કોઈ ન હતું. આપણા હોશિયાર વિદ્યાર્થીઓ ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ટેકનોલોજીમાં (Indian Institute of Technology) દાખલ થવા પ્રયત્ન કરે તેમ ગાલોઆએ ફ્રાન્સના જાણીતા ઈકોલ પોલિટેકનિકમાં (Ecole Polytechnique) દાખલ થવાનો પ્રયત્ન કરેલો, પણ કદાચ પરીક્ષામાં મૌલિક અને રાબેતા મુજબના ન હોય તેવા જવાબ આપવાના કારણે સફળ ન થયા. ઍલ્જિબ્રાની શોધનાં પેપરો કુશીને (Cauchy) આપ્યાં. કુશીએ ખોઈ નાખ્યાં, ફ્રેન્ચ એકેડેમી ઑફ સાયન્સને ગણિતના માટે બધાં શોધનાં પેપરો આપ્યાં. એકેડેમી ઑફ સાયન્સના મંત્રી જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી અને ભૌતિકશાસ્ત્રી ફોરિયર (Fourier) હતા. ફોરિયર એ પેપરો વાંચે તે પહેલાં મૃત્યુ પામ્યા અને બધા કાગળો ખોવાઈ ગયા. પોસોનને (Poisson) જ્યારે આપ્યાં ત્યારે તેમને રસ ન હોઈ બરાબર ન વાંચ્યાં.

ઈકોલ નોર્મલ (Ecole Normale) ગણિતના સંશોધન માટે જાણીતી સંસ્થા હતી. તેમાં ગાલોઆ દાખલ થયા, પણ રાજા અને વહીવટદારો વિરૂદ્ધ લખવા માટે તેમને કાઢી મૂકયા. રાજાની વિરૂદ્ધ વર્તન અને વિદ્યાર્થીઓને રાજાની વિરૂદ્ધ ચળવળમાં ભાગ લેવા માટે પ્રેરવા માટે બે વખત જેલમાં જવું પડ્યું. આવી જિંદગીમાં પણ તેમને પહાડ જેવું વિશાળ મૌલિક કામ કરવાનો સમય મળ્યો તે માનવું અઘરું છે.

ગાલોઆએ તે વખત નવા શોધાયેલા ક્રમચયી સમૂહ (Permutation Group) અને સમીકરણનાં બીજનાં સૂત્રો વચ્ચેનો સંબંધ બતાવ્યો. આ સંબંધ બતાવતાં છક કરી નાખે તેવા મૌલિક (Original) અને શક્તિશાળી વિચારો, વ્યાખ્યાઓ અને પ્રમેયો આપ્યાં. આ વ્યાખ્યાઓ અને પ્રમેયો આજનું ઍલ્જિબ્રા છે. તે સમયે આપણે જાણીએ છીએ તે સ્વરૂપમાં ઍલ્જિબ્રામાં પૂર્વધારણાઓ ન હોઈ ગાલોઆએ તે દિશામાં કામ કર્યું નથી. જેમ આઇન્સ્ટાઇને સાપેક્ષવાદનાં સમીકરણ જાદુગર જેમ ખાલી કોથળામાંથી કબૂતર કાઢે તેમ કાઢ્યાં તે જ રીતે ગાલોઆએ સમીકરણના બીજનાં સૂત્ર માટે ક્રમચયી સમૂહો કાઢ્યા. ફેર એટલો કે ગાલોઆ ક્રાન્તિકારી છોકરો હતો. ઈ.સ. 1832માં જ્યારે તે વીસ વર્ષના હતા ત્યારે રાજાના ટેકેદારે દ્વન્દ્વયુદ્ધ માટે આહ્‌વાન આપ્યું. દેશપ્રેમના કારણે એ નકારી ન શક્યા. કોઈક બીજાં કારણો આપે છે. કયા કારણથી દ્વન્દ્વયુદ્ધ થયું તે જાણી શકાયું નથી, પણ એટલું નક્કી કે પિસ્તોલની ગોળીના ઘાથી આદર્શવાદી, તેજસ્વી અને બળવાખોર ગાલોઆનો અંત આવ્યો. ગણિતના સારા નસીબે દ્વંન્દ્વયુદ્ધની આગલી રાતે તેમણે મેળવેલા ગણિતનાં પરિણામો લખીને મિત્રને સોંપેલાં. ગણિતની દુનિયા તેમણે મેળવેલાં પરિણામો માટે તે સમયે તૈયાર ન હતી. આખરે તેમનાં પરિણામો ગાલોઆના નિધન પછી પંદર વર્ષે પ્રસિદ્ધ થયાં.

8.1 ગાલોઆ સમૂહો અને ક્ષેત્રો

પંચઘાતી સમીકરણના બીજનાં સૂત્ર કેમ નથી તે સમજવા માટે સમૂહ અને ક્ષેત્ર વિષે જાણવું જરૂરી હોઈ પરિશિષ્ટમાં સમૂહ અને ક્ષેત્રનાં અહીંયાં જરૂરી પરિણામો આપ્યાં છે. વિસ્તારિત ક્ષેત્રો અને ઉપસમૂહોના સંબંધો જાણવા જરૂરી હોઈ આપણે ઉદાહરણથી સંબંધો સમજીશું. અહીંયાં ચોક્કસ, સાચા અને સારા ગણિતના ભોગે ઓછામાં ઓછા ફક્ત જરૂરી સમૂહ અને ક્ષેત્રનાં પરિણામ વાપરીને સમજી શકાય તે રીતે અગત્યનાં પરિણામ ઘણી વખત સાબિતી વગર આપવા બદલ માફ કરશો.

સંમેય કે અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ Q અને દ્વિક્રિયાઓના નિયમો + અને • માટે ક્ષેત્ર છે. એ જ પ્રમાણે ગણ $Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a, b\in Q\}$ પણ દ્વિક્રિયાઓના નિયમો + અને • માટે ક્ષેત્ર છે. જો $b=0$ લઈએ તો આપણને ગણ Q મળે. આથી Q ને વિસ્તારતાં $Q(\sqrt{2})$ મળે. ચારઘાતી પદાવલી

$$p(x)=(x^2-2)(x^2-5)=x^4-7x^2+10$$

ના ગુણકો (coeffecients) સંમેય છે, જ્યારે આ પદાવલીનાં બીજ $\pm\sqrt{2}$ અને $\pm\sqrt{5}$ સંમેય નથી. આથી, આપણે સંમેયના ક્ષેત્રને વિસ્તારવું જોઈએ કે જે $\pm\sqrt{2}$ અને $\pm\sqrt{5}$ ને આવરી લે. પહેલાં $\pm\sqrt{2}$ ને આવરી લેતું ક્ષેત્ર જોઈએ. આ નવું વિસ્તારેલું ક્ષેત્ર $Q(\sqrt{2})$, Q ઉપરનું સદિશ અવકાશ (Vector Space) છે. $Q(\sqrt{2})$ ના ઘટકો સદિશ (Vector) છે. જ્યારે Q ના ઘટકો અદિશ (Scalars) છે. $Q(\sqrt{2})$ સદિશ અવકાશ હોઈ, તેના આધારના ઘટકોનો ગણ $\{1, \sqrt{2}\}$ છે, આથી $Q(\sqrt{2})$ નો કોઈપણ ઘટક $a+b\sqrt{2}$ ના સ્વરૂપમાં છે. અહીંયાં a અને b, Q ના ઘટકો છે. સદિશ અવકાશના આધારના ઘટકોની સંખ્યા એ સદિશ અવકાશનું પરિમાણ (dimension) કહેવાય. આને $\dim[Q(\sqrt{2}):Q]=2$ થી દર્શાવીશું. $Q(\sqrt{2})$ માં $\sqrt{5}$ ન હોઈ $Q(\sqrt{2})$ ને વિસ્તારીએ કે જેથી $\pm\sqrt{5}$ ને આવરી લે. આ નવા વિસ્તારેલ ક્ષેત્રને $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ થી દર્શાવીશું. ક્ષેત્ર $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ ના આધારના ઘટકોનો ગણ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{5}\}$ છે. Q ના ઘટકોને a, b, c, અને d વડે

દર્શાવીએ, તો $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ વિસ્તારનો પ્રતિનિધિ ઘટક $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5}$ થાય અને $\dim[Q(\sqrt{2},\sqrt{5}:Q]=4$ થાય.

આમ $(x^2-2)(x^2-5)$ નાં બીજ મેળવવા માટે સહગુણકોના ક્ષેત્રને ઓછામાં ઓછું $Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ જેટલું વિસ્તારવું પડે. આ વિસ્તારિત ક્ષેત્ર $Q_1=Q(\sqrt{2},\sqrt{5})$ નો પ્રત્યેક સભ્ય $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5}$ છે. અહીંયાં $a, b, c,$ અને $d\in Q$ છે. આમ, Q_1 તે Q પરનો ખરેખર તો $\{1, \sqrt{2},\sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{5}\}$ આધારવાળો સદિશ અવકાશ છે, અને તેનું પરિમાણ 4 છે. હવે Q_1 ની એવી આત્મરૂપતાઓ (automorphism) તપાસીએ કે જેમની હેઠળ Q નો દરેક સભ્ય નિશ્ચલ રહેતો હોય. એટલે કે એવાં વિધેયો $f:Q_1\to Q_1$ લઈએ જે $f(xy)=f(x)f(y)$ તથા $f(x+y)=f(x)+f(y)$ નું સમાધાન કરે, જે એક-એક તથા વ્યાપ્ત હોય અને પ્રત્યેક સંમેય r માટે $f(r)=r$ હોય. આવા બધા f માટે

$$f(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=f(a)+f(b\sqrt{2})+f(c\sqrt{5})+f(d\sqrt{2}\sqrt{5})$$

$$=a+bf(\sqrt{2})+cf(\sqrt{5})+df(\sqrt{2}\sqrt{5})$$

થાય. તેથી, $f(\sqrt{2})$ અને $f(\sqrt{5})$ ની ખબર હોય તો આખી આત્મરૂપતા f નક્કી થઈ જાય. $2\in Q$ તેથી $f(2)=2$

એટલે કે, $f(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=f(\sqrt{2})f(\sqrt{2})=[f(\sqrt{2})]^2=2$.

આથી, $f(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}$. એજ પ્રમાણે $f(\sqrt{5})=\pm\sqrt{5}$.

આમ, Q ને નિશ્ચલ રાખતી Q_1 ની આત્મરૂપતાઓ નીચે પ્રમાણે છે :

$$\varepsilon(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5}$$

$$\alpha(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=a-b\sqrt{2}+c\sqrt{5}-d\sqrt{2}\sqrt{5}$$

$$\beta(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=a+b\sqrt{2}-c\sqrt{5}-d\sqrt{2}\sqrt{5}$$

$$\gamma(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=a-b\sqrt{2}-c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5}$$

આ ચાર સભ્યો ε, α, β, γ અને દ્વિક્રિયા * તરીકે વિધેયોનું સંયોજન $\circ$ લઈને ગણતાં

$$(\alpha\circ\alpha)(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=\alpha(a-b\sqrt{2}+c\sqrt{5}-d\sqrt{2}\sqrt{5})$$

$$=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5}=\varepsilon$$

એ જ રીતે ગણતાં,

$$(\alpha\circ\gamma)(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})=\alpha(a-b\sqrt{2}-c\sqrt{5}+d\sqrt{2}\sqrt{5})$$

$$=a+b\sqrt{2}-c\sqrt{5}-d\sqrt{2}\sqrt{5}=\beta$$

આ રીતે ગણતાં નીચેનું કોષ્ટક મળે :

0	ε	α	β	γ
ε	ε	α	β	γ
α	α	ε	γ	β
β	β	γ	ε	α
γ	γ	β	α	ε

આ કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાશે કે, આત્મરૂપતાઓનો ગણ {ε, α, β, γ} વિધેયોનાં સંયોજન 0 ને દ્વિક્રિયા તરીકે લેતો સમૂહ બને છે. આ સમૂહ સમક્રમી (abelian) સમૂહ છે. $Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ના Q ઉપરની આત્મરૂપતાનો સમૂહ ગાલોઆ સમૂહ તરીકે ઓળખાય છે. આને આપણે $Gal[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}):Q]=\{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}$ થી દર્શાવીશું. આ ઉપરાંત $Gal[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}):Q]=$ ના ઘટકોની સંખ્યા બરાબર

$\dim[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}):Q]$ છે. આ સમૂહપદાવલી $p(x)=(x^2-2)(x^2-5)$ નો ગાલોઆ સમૂહ કહેવાય છે. આમ તો, આત્મરૂપતાઓ ε, α, β, γ નો પ્રદેશ Q_1 છે, પણ, જો તેમનો પ્રદેશ આપણા સમીકરણનાં બીજ $s=\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ પૂરતો મર્યાદિત રાખીએ તો તે પ્રત્યેક આત્મરૂપતા s નો એક ક્રમચય બને છે. દા.ત.

$$\beta=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{5} & -\sqrt{5}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix},$$ $\sqrt{2}$ ને $\sqrt{2}$ માં, $-\sqrt{2}$ ને $-\sqrt{2}$ માં, $\sqrt{5}$ ને $-\sqrt{5}$ અને $-\sqrt{5}$ ને $\sqrt{5}$ માં લઈ જાય છે.

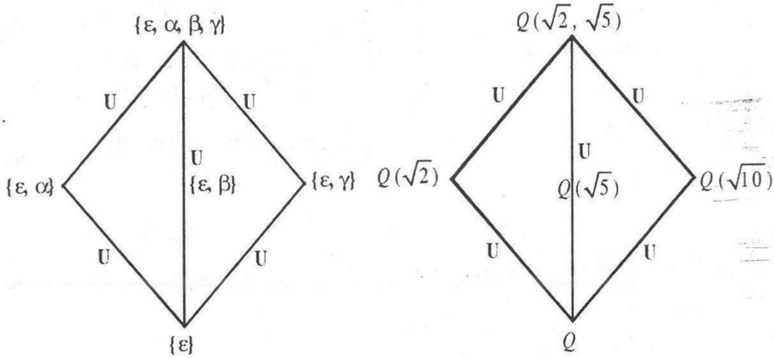
આમ તો, S માં ચાર સભ્યો હોવાથી S ના કુલ ક્રમચયોની સંખ્યા $4!=24$ છે અને તેમના થકી સમૂહ S_4 બને છે, પણ આપણી આત્મરૂપતાઓ તો આ S_4 નો ઉપસમૂહ છે.

$Q_1=Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ની જે આત્મરૂપતાઓ Q ના દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખે છે, તેમના સમૂહ {ε, α, β, γ} ને $Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ નો Q પરનો ગાલાઓ સમૂહ કહે છે. તેને $Gal[Q(\sqrt{2}, \sqrt{5}):Q]$ વડે દર્શાવાય છે. તેને $(x^2-2)(x^2-5)=0$ સમીકરણનો ગાલોઆ સમૂહ કહેવાય છે. ગાલોઆ સમૂહ પદાવલી ઉપર આધાર રાખે છે, પણ ગાલોઆ સમૂહ S_4 સમૂહનો ઉપસમૂહ છે. તે જ રીતે n ઘાતી પદાવલીના બીજોના ક્રમચયોથી S_n સમૂહ મળે છે અને આપેલી પદાવલીના કારણે ગાલોઆ સમૂહ મળે છે, જે સમૂહ S_n નો ઉપસમૂહ છે.

આપણા દ્રષ્ટાંતમાં ગાલોઆ સમૂહ {ε, α, β, γ} સમક્રમી (Abelian) સમૂહ છે, આથી તેના બધા જ ઉપસમૂહો લાક્ષણિક (Normal) છે. આ સમૂહના ઉપસમૂહો {ε}, {ε, α}, {ε, β}, {ε, γ} અને {ε, α, β, γ} છે.

જો ફક્ત $x^2-2=0$ નાં બીજ જોઈતાં હોય, તો ફક્ત {ε, α}

આત્મરૂપતાઓ મળે અને વિસ્તૃત ક્ષેત્ર $Q(\sqrt{2})$ મળે. એ જ પ્રમાણે ફક્ત $x^2 - 5 = 0$ નાં બીજ જોઈતાં હોય, તો ફક્ત $\{\varepsilon, \beta\}$ આત્મરૂપતાઓ મળે અને વિસ્તૃત ક્ષેત્ર $Q(\sqrt{5})$ મળે. Q અને $Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ વચ્ચે આપણને પાંચ ક્ષેત્રો મળે છે અને એ જ રીતે આપણને પાંચ ઉપસમૂહો મળે છે. આ ઉપસમૂહો અને વિસ્તૃત ક્ષેત્રો આકૃતિ 8.1.1 માં દર્શાવ્યાં છે.



આકૃતિ 8.1.1

આ બંને આકૃતિઓમાંના સમૂહો અને ક્ષેત્રોમાં અજબનો સંબંધ છે. સમૂહોની આકૃતિમાં સૌથી નીચેનો સમૂહ $\{\varepsilon\}$ અને ક્ષેત્રોની આકૃતિમાં સૌથી ઉપરના (સૌથી મોટા) ક્ષેત્ર $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ વચ્ચે એ સંબંધ છે કે $\{\varepsilon\}$ બરાબર $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ના દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખતી બધી જ આત્મરૂપતાઓનો ગણ છે. એ જ પ્રમાણે $\{\varepsilon, \alpha\}$ બરાબર $Q(\sqrt{2})$ ના દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખતી આત્મરૂપતાઓનો ગણ છે. આવો જ સંબંધ $\{\varepsilon, \beta\}$ અને $Q(\sqrt{5})$, $\{\varepsilon, \gamma\}$ અને $Q(\sqrt{10})$ અને $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}$ અને Q વચ્ચે છે.

ધારો કે H ગાલોઆ સમૂહનો ઉપસમૂહ છે. H માંની બધી જ આત્મરૂપતાઓ, જે ક્ષેત્રના દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખે તે ક્ષેત્ર H દ્વારા દ્રઢ થાય છે તેમ કહીએ અને આ ક્ષેત્રને H^0 થી દર્શાવીએ, તો $\{\varepsilon, \alpha\}^0 = Q(\sqrt{2})$, $\{\varepsilon, \beta\}^0 = Q(\sqrt{5})$, $\{\varepsilon, \gamma\}^0 = Q(\sqrt{2}\sqrt{5})$, $\{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma\}^0 = Q$ અને $\{\varepsilon\}^0 = Q(\sqrt{2}, \sqrt{5})$

બને. નાના ઉપસમૂહો મોટાં ક્ષેત્રો દ્રઢ કરે છે.

8.2 ગાલોઆ પ્રમેય અને બીજનાં સૂત્રો

આપણો ઉદ્દેશ બહુપદી સમીકરણોનાં બીજ માટે સૂત્રો ક્યારે મળે તે કહેવાનો છે. સૂત્ર એટલે શું તે સ્પષ્ટ કરીએ. આપેલ બહુપદી સમીકરણના સહગુણકો જે ક્ષેત્રમાંથી લીધા હોય તેને F કહીએ. સમીકરણનાં બીજ પણ F માં હોય તેવું ન પણ બને. સમીકરણના સહગુણકો સંમેય સંખ્યાક્ષેત્રમાં Q માં છે, પણ તેનાં બીજ $\pm\sqrt{2}$, Q માં નથી. આથી સમીકરણનાં બીજ શોધવા માટે આપણા મૂળ ક્ષેત્ર F ની બહાર જવું પડે તેવું બને. F ના કોઈ વિસ્તૃત (extended) ક્ષેત્રમાં બહુપદીનાં બધાં બીજ હોય તેવું લઘુતમ ક્ષેત્ર લઈએ તો તેને બહુપદીનું (F ઉપરનું) વિભાજક (splitting) ક્ષેત્ર કહે છે.

હવે બીજ માટેનું સૂત્ર એટલે જેમાં F ના સભ્યો પર અમુક ક્રિયાઓ કરીને બીજને વ્યક્ત કરવું તે. આ ક્રિયાઓ એટલે સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર તથા n મૂળો લેવાં. (n મૂળ એટલે વર્ગમૂળ, ઘનમૂળ વિ.) દા.ત. $ax^2+bx+c=0$ નાં બીજ $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ છે. આ સૂત્ર સહગુણકો a, b, c પર ઉપરની ક્રિયાઓ કરીને મેળવેલું છે. ધારો કે $a, b, c,$ Q ક્ષેત્રના હોય, તો બીજ મેળવવા માટે Q ક્ષેત્રને $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ને આવરી લે તે પ્રમાણે વિસ્તારવું પડે. આ રીતે વિસ્તારતાં જે ક્ષેત્રમાં $ax^2+bx+c=0$ બીજ હોય ત્યાં પહોંચી શકાય. આ દલીલ n- ઘાતી સમીકરણ માટે આગળ વધારતાં એમ કહેવાય કે જો n-ઘાતી સમીકરણનાં બીજ સૂત્રો દ્વારા મેળવી શકાય તો n ઘાતી સમીકરણના ગુણકોના ક્ષેત્રને વારાફરતી નજીક નજીકના ક્ષેત્રોમાં વિસ્તારતાં આપણે એવા ક્ષેત્રમાં પહોંચીએ કે જેમાં સમીકરણનાં બધાં જ બીજ હોય. જો સમીકરણના ગુણકોનું ક્ષેત્ર F હોય અને $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n ઘાતી સમીકરણના n બીજ હોય તો વારાફરતી નજીક નજીકનાં ક્ષેત્રો

$F(\alpha_1), F(\alpha_1, \alpha_2), \ldots, F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K$, માં વિસ્તારી શકીએ અને

$F \subseteq F(\alpha_1) \subseteq F(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq ... \subseteq K$ છે.

આપણે 8.1 માં જોયું કે બહુપદીનું વિભાજક ક્ષેત્ર K હોય તો K ની જે આત્મરૂપતાઓ (automorphism) F ના દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખતી હોય તે એક સમૂહ બનાવે છે અને તે સમૂહ $G = Gal\,(K : F)$ ને બહુપદીનો ગાલોઆસમૂહ કહેવાય છે. આ સમૂહના ઉપસમૂહો તથા F અને K વચ્ચેનાં ક્ષેત્રો વચ્ચે એક સ્વાભાવિક સંબંધ છે. H જો G નો ઉપસમૂહ હોય તો H માંની આત્મરૂપતાઓ K ના જે સભ્યોને નિશ્ચલ રાખે તે સભ્યો F અને K વચ્ચેનું એક ક્ષેત્ર J રચે. એમ કહેવાય છે કે, H, J ને દ્રઢ રાખે છે. સમૂહ G, F ને દ્રઢ રાખે છે. જેમ ઉપસમૂહ નાનો થતો જાય તેમ તે વધુ ને વધુ મોટા ક્ષેત્રને દ્રઢ રાખે. G નો નાનામાં નાનો ઉપસમૂહ $\{\varepsilon\}$ સમગ્ર K ને દ્રઢ રાખે, કારણ કે, ε દરેક સભ્યને નિશ્ચલ રાખે છે.

હવે આપણો પ્રશ્ન એ છે કે , K ના સભ્યો (જેમાં બહુપદીનાં બીજ પણ આવી જાય છે) ને F થી શરૂ કરી ઉપર કહી તેવી ક્રિયાઓ વડે વ્યક્ત કરી શકાય ખરા ? F થી K સુધી જવાની એક સિલસિલાબંધ પ્રક્રિયા છે. આપણે બહુપદીનાં બીજ એક પછી એક F માં ઉમેરી નવાં ક્ષેત્રો બનાવતાં બનાવતાં આખરે K સુધી પહોંચીએ છીએ. આમ F અને K વચ્ચેનાં ક્ષેત્રોની હારમાળા રચાય છે. આ હારમાળાની સાથે જ ઉપર કહ્યા પ્રમાણે ગાલોઆસમૂહ G ના ઉપસમૂહોની હારમાળા પણ આપોઆપ રચાય છે.

ફ્રેન્ચ ગણિતી ગાલોઆએ એ જોયું કે, G ના ઉપસમૂહોની આ હારમાળામાં જો અમુક ગુણધર્મ હોય તો અને તો જ આપણે ઇચ્છીએ છીએ તેવી બીજોની અભિવ્યકિત મળે. G માં આ ગુણધર્મ હોય તો તેવા સમૂહ G ને ગાલોઆએ ઉકેલનીય (solvable) સમૂહ કહ્યો.

સમૂહ G ને જો શ્રેણીબંધ લાક્ષણિક ઉપસમૂહો હોય કે જેથી $\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ....H_i \subseteq H_{i+1} .... \subseteq H_n = G$ હોય, અહીં દરેક i માટે H_i એ H_{i+1} નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ છે અને $\frac{H_{i+1} \text{ ની કક્ષા} (order)}{H_i \text{ ની કક્ષા} (order)}$ = અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક (Prime Number) હોય, તો સમૂહ G ને ઉકેલનીય સમૂહ (Solvable Group) કહેવાય.

જો આપેલ બહુપદીનો ગાલોઆસમૂહ ઉકેલનીય હોય તો અને તો જ તે બહુપદીનાં બીજ માટે સ્વીકાર્ય સૂત્રો મળે તે ગાલોઆનું પ્રખ્યાત પ્રમેય છે.

ખરેખર તો ગાલોઆએ બતાવ્યું કે જો કોઈ સમીકરણનો ગાલોઆસમૂહ ઉકેલનીય હોય તો બીજ મેળવવા માટે આ સમીકરણને ઓછી ઘાતનાં સમીકરણોમાં ફેરવીને ઉકેલો મેળવી શકાય છે. દરેક સમીકરણને ગાલોઆસમૂહ હોય તે ખૂબ જ અગત્યની વાત છે. અત્યાર સુધી આપણે સમીકરણને તેની ઘાતથી ઓળખતા હતા, હવે તેના ગાલોઆસમૂહથી ઓળખીશું. ગૉસના પાયાના પ્રમેયથી n- ઘાતી સમીકરણનાં n બીજ હોય. આથી વધારેમાં વધારે n બીજનાં ક્રમચય (permutations) $n!$ છે અને આ ક્રમચયોથી બનતો ગણ S_n સંયોગ-નિયમ વિધેયોનો સંગમ $\circ$ લઈને સંમિત સમૂહ $\langle S_n, 0\rangle$ બને છે. ગાલોઆએ સાબિત કર્યું કે, કોઈપણ n માટે એવું સમીકરણ શોધી શકાય કે જેનો ગાલોઆસમૂહ S_n હોય એટલે કે જેની $n!$ આત્મરૂપતાઓ હોય. આના કારણે આપણે એવું પાંચઘાતી સમીકરણ મેળવી શકીએ કે જેનો ગાલોઆસમૂહ S_5 હોય.

ઉદાહરણ 1 : $S_2 = \{\varepsilon = (1), \alpha = (12)\}$ સંમિતસમૂહ $\langle S_2, 0\rangle$ છે.

o	ε	α
ε	ε	α
α	α	ε

$H_0 = \{\varepsilon\} \subset \{\varepsilon, \alpha\} = S_2$

$$\frac{S_2 \text{ ની કક્ષા}}{H_0 \text{ ની કક્ષા}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ છે.}$$

આથી S_2 ઉકેલનીય સમૂહ છે. દ્વિઘાતી સમીકરણનું આથી સૂત્ર મળે છે.

ઉદાહરણ 2 : પરિશિષ્ટ A માં

$S_3 = \{\varepsilon = (1), \alpha = (23), \beta = (132), \gamma = (12), \delta = (123), K = (13)\}$

લઈને $\langle S_3, 0\rangle$ સમૂહ છે તે બતાવ્યું છે. $\{\varepsilon\}, \{\varepsilon, \beta, \delta\}$ ના લાક્ષણિક ઉપસમૂહો છે અને $\{\varepsilon\} \subset \{\varepsilon, \beta, \delta\} \subset S_3$ છે.

$$\frac{S_3 \text{ ની કક્ષા}}{\{\varepsilon, \beta, \delta\} \text{ ની કક્ષા}} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{અને} \quad \frac{\{\varepsilon, \beta, \delta\} \text{ ની કક્ષા}}{\{\varepsilon\} \text{ ની કક્ષા}} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{હોઈને}$$

$\langle S_3, 0\rangle$ ઉકેલનીય સમૂહ છે. આથી ત્રિઘાતી સમીકરણનાં બીજ સૂત્રોથી મળે છે. આ જ પ્રમાણે $\langle S_4, 0\rangle$ ઉકેલનીય સમૂહ છે તે સાબિત થઈ શકે.

જ્યારે પંચઘાતી સમીકરણનાં બીજનાં સૂત્રો મેળવવા બસો વર્ષ ઘણાબધાએ ખૂબ જ મહેનત કરી. આપણે $\langle S_5, 0\rangle$ ઉકેલનીય સમૂહ નથી તે સાબિત કરી શકીએ, તો જો કોઈ પંચઘાતી સમીકરણ હોય જેના ગાલોઆસમૂહ બરાબર S_5 હોય તો આ સમીકરણનાં બીજો માટે સૂત્ર ન મળે. આ સાબિત કરવા માટે સમૂહ માટેની જરૂરી માહિતી પરિશિષ્ટ **A** અને નીચે આપેલી છે.

$\{1, 2, 3, ..., n\}$ ગણના બધા ક્રમચયના ઘટકોના ગણને S_n વડે દર્શાવીએ છીએ. યુગ્મ ક્રમચયોના (Even permutations) ગણને A_n થી દર્શાવીએ.

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ને} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ માં ફેરવવા માટે બીજી હારના 3 અને 1 ને અદલબદલ કરવા પડે. પછી 1 અને 2 ને અદલબદલ કરતાં (1) મળે. આ રીતે બે વખત અદલબદલ કરવાના કારણે (123) યુગ્મ ક્રમચય છે. બીજી રીતે ત્રણ લંબાઈના ચક્ર

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2\ 3)(1\ 3)$$

ને બે લંબાઈનાં બે ચક્રોના ગુણાકારથી દર્શાવી શકાય. એટલે કે $(abc) = (bc)(ac)$

થાય. (bc) નો એક અદલબદલ, (ac) ની એક અદલબદલના કારણે એક + એક = બે અદલબદલ (abc) ને (a) માં મેળવવા કરવી પડે. આથી ત્રણ લંબાઈના S_n નાં દરેક ચક્રો A_n માં આવેલાં છે. તદુપરાંત A_n ના દરેક સભ્યને ત્રણ લંબાઈનાં ચક્રોના ગુણાકારથી દર્શાવી શકાય, A_n એ S_n નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ છે તે પણ સાબિત થઈ શકે.

પ્રમેય : સંમિત સમૂહ $\langle S_5, 0 \rangle$ (Symmetric Group) ઉકેલનીય સમૂહ નથી.

સાબિતી : ધારો કે, સમૂહ S_5 ઉકેલનીય સમૂહ છે. આથી S_5 ના શ્રેણીબંધ લાક્ષણિક ઉપસમૂહો

$$\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_i \dots \subseteq H_n = S_5$$

S_5 ના $5! = 120$ ઘટકો છે. જે નીચે પ્રમાણે છે.

$$S_5 = \{(1), (12), (13), \dots, (123), (124), (125), \dots, (12345)\}$$

આપણે સાબિત કરવું છે કે, જો H_i માં ત્રણ લંબાઈના બધા જ ઘટકો હોય તો H_{i-1} માં પણ આ બધા ઘટકો છે. આપણે $\alpha = (ilj)$ અને $\beta = (jkm)$ લઈએ કે જે H_i માં છે.

$\alpha^{-1} = (jli)$ અને $\beta^{-1} = (mkj)$ હોઈ

$$c = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta = (jli)(mkj)(ilj)(jkm)$$

$$= (jlm) \text{ છે.}$$

H_i માં α અને β નો ક્રમક ઘટક c પણ ત્રણ લંબાઈનું ચક્ર છે. ક્રમકોના પ્રમેયથી (પરિશિષ્ટ A.3.1) લાક્ષણિક સમૂહ H_i ના ક્રમકો લાક્ષણિક સમૂહ H_{i-1} નું નિર્માણ કરે છે. તદુપરાંત આપણે H_i નો કોઈપણ ત્રણ લંબાઈનો ચક્રઘટક (ijk) લઈએ,

તો પણ

$$(ijk) = (ijl)(kmi)(lji)(imk)$$

$$= (lji)^{-1}(imk)^{-1}(lji)(imk)$$

ક્રમક ઘટક હોઈને (ikj) પણ લાક્ષણિક ઉપસમૂહ H_{i-1} નો ઘટક છે. આથી લાક્ષણિક ઉપસમૂહ H_{i-1} માં પણ બધાં જ ત્રણ લંબાઈના ચક્રઘટકો આવેલા છે. આ જ દલીલ આગળ વધારતાં લાક્ષણિક ઉપસમૂહ H_{i-1} ના ક્રમકો નિશ્ચલ ઉપસમૂહ H_{i-2} નું નિર્માણ કરે છે અને આમાં પણ બધા જ ત્રણ લંબાઈના ચક્રઘટકો આવેલા છે. આ જ રીતે આગળ વધતાં H_0 માં પણ બધા ત્રણ લંબાઈના ચક્રઘટકો આવેલા છે. જે $H_0 \neq \{e\}$ નથી. આથી આપણી ધારણા સંમિત સમૂહ $\langle S_5, 0\rangle$ ઉકેલનીય સમૂહ છે તે સાચી નથી.

નોંધ : આપણે જાણીએ છીએ કે, A_n માં બધા ત્રણ લંબાઈના ચક્રઘટકો આવેલા છે.

આ જ સાબિતી સંમિતસમૂહ S_n, $n > 5$ માટે પણ સાચી છે. આથી સંમિતસમૂહ $\langle S_n, 0\rangle n \geq 5$ ઉકેલનીય સમૂહ નથી. હવે આપણે એવુ પંચઘાતી સમીકરણ શોધવું જોઈએ કે જેનો ગાલોઆ સમૂહ S_5 હોય.

8.3 ઉદાહરણ

પંચઘાતી સમીકરણના સંમેય ક્ષેત્ર Q ઉપર અવયવ ન પાડી શકાય,. તે જાણવા માટે નીચેની કસોટી ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

આઈસેન્સ્ટાઇન કસોટી (Eisenstein Criteria) : કોઈપણ n ઘાતી પદાવલી

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ છે.

અહીં $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in I$ છે. જો કોઈ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક (Prime integer) p, a_n સિવાયના દરેક ગુણક $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ને ભાગે અને p^2, a_0 , ને ન

ભાગે, તો $P(x)$ ના સંમેયક્ષેત્રમાં (Q) અવયવો પાડી ન શકાય. ટૂંકમાં $P(x)$, Q ક્ષેત્ર ઉપર અસંક્ષેપ્ય (Irreducible) પદાવલી છે.

આપણે પંચઘાતી સમીકરણ $P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$ નો ગાલોઆસમૂહ મેળવીએ અને આ સમૂહ S_5 હોય તો આ સમીકરણનાં બીજ સૂત્રથી મેળવી ન શકાય. આઈસેન્સ્ટાઇન કસોટીથી $p = 5$, x^5 ના ગુણક 2 વગર બધા ગુણક અને અચળ રકમને ભાગે છે અને $p^2 = 25$ અચળ સંખ્યા 5 ને ભાગતી ન હોઈ, Q ક્ષેત્રમાં $P(x)$ ના અવયવ પાડી ન શકાય. ટૂંકમાં $P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5$ Q ક્ષેત્રમાં અસંક્ષેપ્ય પદાવલી છે. કલનશાસ્ત્રની મદદથી $P(x)$ નું સાપેક્ષ મહત્તમ બિંદુ $(0, 5)$ એ છે અને સાપેક્ષ લઘુતમ બિંદુ $(2, -11)$ એ છે. આથી $P(x)$ ને ત્રણ વાસ્તવિક બીજ r_1, r_2 અને r_3 છે, અને r_4, r_5 કાલ્પનિક બીજ છે. સમીકરણ $P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$ નું બીજક્ષેત્ર $k = Q(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ છે. $P(x) = 0$ ના બીજ r_1, r_2, r_3, r_4 અને r_5 ના ક્રમચયોનો ગાલોઆસમૂહ G સમૂહ S_5 નો ઉપસમૂહ છે, એટલે કે $G \subseteq S_5$.

આપણે સાબિત કરવું છે : $G = S_5$

બીજ r_1 પંચઘાતી સમીકરણ $P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$ નું બીજ હોઈને $[Q(r_1) : Q] = 5$ છે અને $[k : Q] = [k, Q(r_1)][Q(r_1) : Q]$ હોઈને $[k : Q]$ નો એક અવયવ 5 છે. $Gal(k : Q) = G$ ના ઘટકોની સંખ્યા બરાબર $[k : Q]$ હોઈ, G ના ઘટકોની સંખ્યા 5 નો ગુણક છે. કુશીના (Cauchy) પ્રમેયથી G ના ઘટકોની સંખ્યાનો અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 5 ભાજક હોઈ, G ના કોઇ ઘટકની સંખ્યા 5 છે. કક્ષા 5 હોવા માટે ઘટક પાંચ લંબાઈનો ચક્ર હોવો જરૂરી છે. ધારો કે G નો ઘટક $\alpha = (i\ j\ k\ l\ m)$ છે. બીજ r_4 અને r_5 કાલ્પનિક બીજો હોઇને r_1, r_2 અને r_3 ને બદલ્યા વગરની બે આત્મરૂપતાઓ સંભવે.

$a+bi \to a+bi$ અને $a+bi \to a-ib$, જેને આપણે $T=(45)=(l\,m)$ થી દર્શાવીશું. સમૂહ G ના ઘટકો α અને T હોઈ, G માં α, α^{-1} અને T ના નીચેના ગુણકો પણ છે.

$$\alpha T\alpha^{-1}=(i\ j\ k\ l\ m)(l\ m)(i\ m\ l\ k\ j)=(i\ m),$$

$$\alpha^2 T\alpha^{-2}=(i\ j),\ \alpha^3 T\alpha^{-3}=(j\ k),\ \alpha^4 T\alpha^{-4}=(kl).$$

આથી G માં નીચેના ગણ

$T=\{(im),\ (i\ j),(j\ k),\ (k\ l),\ (l\ m)\}$ છે.

S_5 નો કોઈપણ ઘટક $(i\ j\ k\ m\ l)$ લઈએ, તો

$(i\ j\ k\ m\ l)=(i\,m)(i\,j)(m\,l)(j\,k)$ અને $(1)=(i\ j)(i\ j)$.

આથી $S_5=G$ બને. આથી $P(x)=2x^5-5x^4+5=0$ નો ગાલોઆ સમૂહ S_5 અને S_5 ઉકેલનીય સમૂહ ન હોઈ, $P(x)=2x^5-2x^4+5=0$ નાં બીજ સૂત્રથી ન મળે.

* * *

બે જ વસ્તુ

નાગરિક આપણો પ્રમાદશીલ છે. જે કાંઈ થવાનું હોય તેને માટે પોતાને લગીરે હાથપગ હલાવવા ન પડે તો સારું. એમનેએમ બધું થઈ જવું જોઈએ. પરિણામે નાગરિકે કાંઈ કરવાનું હોય તો માત્ર બે જ વસ્તુ - કાં તો ફરિયાદ, કાં તો માગણી ! આમાં આપણા તરુણોયે અપવાદ નથી. બસ, એક જ નારો - અમારી માગણીઓ પૂરી કરો, અમારી ફરિયાદો દૂર કરો !

દાદા ધર્માધિકારી

પ્રકરણ 9

લોજિસ્ટીક સમીકરણ અને તેના ઉકેલો

9.0 પ્રાસ્તાવિક

આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રમાણમાં અત્યંત નાના અણધાર્યા પ્રસંગો આપણી જિંદગીનો પ્રવાહ બદલી નાખે છે. આપણી નવલકથાઓમાં પણ પાત્રો અણધારી રીતે પ્રેમમાં પડીને લગ્ન કરતાં હોય છે. તેવી જ રીતે દેશોના જીવનમાં નાના અણધાર્યા પ્રસંગોથી ઈતિહાસ બદલાઈ જાય છે. જેમકે બ્રિટિશરોએ ભારતના બે ભાગલા પાડવાનો નિર્ણય કર્યો અને તેના કારણે જે હિંદુ મુસલમાનોનાં કોમી રમખાણ થયાં તે સદીઓ સુધી લોકો યાદ કરશે, અને ભારત અને પાકિસ્તાન એકબીજાના શત્રુઓની જેમ વર્તે છે. અમેરિકામાં સપ્ટેમ્બર 11, 2001ના રોજ અણધારી રીતે વર્લ્ડ ટ્રેડ સેન્ટરનું જે થયું તેના કારણે અફઘાનિસ્તાનનો અને ઈરાકનો ઈતિહાસ બદલાઈ ગયો. માણસો અને દેશોના જીવનમાં અણધાર્યા બનતા પ્રસંગોથી ભવિષ્ય કેવું હશે તે કહેવું મુશ્કેલ છે. આ કારણે વિજ્ઞાન જે તારાઓ, ગ્રહો અને ઉપગ્રહો ક્યારે ક્યાં હશે તે ચોકસાઈપૂર્વક કહી શકે છે અને તે જ રીતે મહત્તમ ભરતી અને લઘુત્તમ ઓટનો સમય પણ ખાતરીપૂર્વક કહી શકે છે તે જ વિજ્ઞાન અને ગણિત અણધાર્યા બનતા પ્રસંગો માટે કશું જ કહી શકતું ન હોઈ સામાન્ય પ્રજાને વિજ્ઞાન અને ગણિત રસ વગરનાં લાગે છે; પણ છેલ્લાં ચાલીસેક વર્ષથી કમ્પ્યૂટરની મદદથી સામાન્ય અને સરળ દેખાતાં સમીકરણના ઉકેલોમાં અણધાર્યા ઉકેલો મળે છે. જેના કારણે અંધાધૂંધી દેખાય; આ અંધાધૂંધીને આપણે કેઑસ કહીશું. ઉકેલો પણ અણધારી રીતે જટિલ બને છે. આવા જટિલ દેખાતા ઉકેલો પણ પ્રમાણમાં સાદા દેખાતા સમીકરણમાંથી મળે છે તે એક ભારે મોટી નવીનતા ગણાય !!

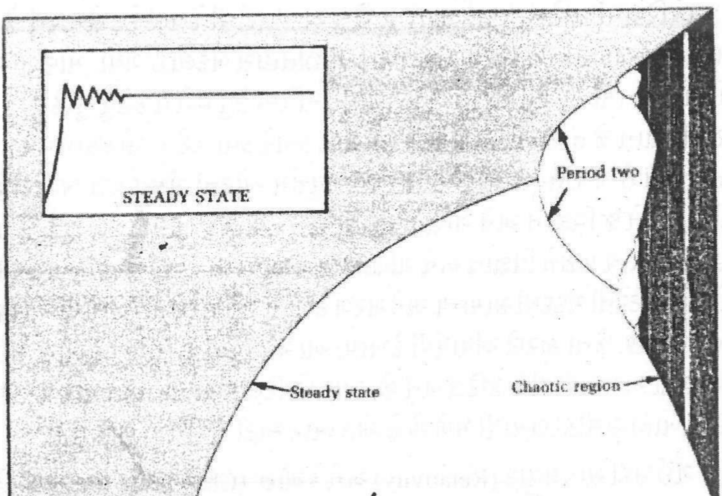
ગઈ સદી સાપેક્ષવાદ (Relativity) અને કેઑસ (Chaos) માટે યાદગાર રહેશે. ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી લાપ્લાસ (Laplace) ન્યૂટનના (Newton) નિયમોમાં ખૂબ માનતા. તેમની માન્યતા પ્રમાણે જો વિશ્વના પ્રત્યેક અણુએ અણુનું સ્થાન અને ગતિ એક જ સમયે આપણે જાણતા હોઈએ, તો ભવિષ્યમાં પ્રત્યેક અણુ કયાં હશે તે કહી શકાય. હેય્સનબર્ગના (Heisenberg) અચોક્કસતાના નિયમ પ્રમાણે આપણે ચોક્કસતાપૂર્વક અણુનું સ્થાન અને ગતિ એક જ સમયે માપી ન શકીએ તે લાપ્લાસને ખબર ન હતી. એ જ રીતે લાપ્લાસને ખબર ન હતી કે, ન્યૂટનનાં સમીકરણો અસુરેખ (nonlinear) હોઈ

સમીકરણોના ઉકેલમાં કેયોસ્ હોવાથી અણુનું સ્થાન અને ગતિ ચોક્કસતાપૂર્વક ગણી ન શકાય. આથી ગઈ સદી ન્યૂટનના નિયમો માટે સારી ન હતી. ચારે બાજુથી તેની નબળાઈ કે તેની અશક્તિનું પોકળ બહાર પડી ગયું. આનો અર્થ એવો નથી કે, ન્યૂટનના નિયમો આપણા અભ્યાસક્રમમાંથી કાઢી નાખવાના !! આથી ઊલટું આ નિયમો એટલા બધા ઉપયોગી છે કે તે બરાબર ભણવા પડશે.

કેઑસ (અંધાધૂંધી) છે શું ? જ્યારે આપણે વિશિષ્ટ સાપેક્ષવાદની વાત કરીએ છીએ ત્યારે સમીકરણ

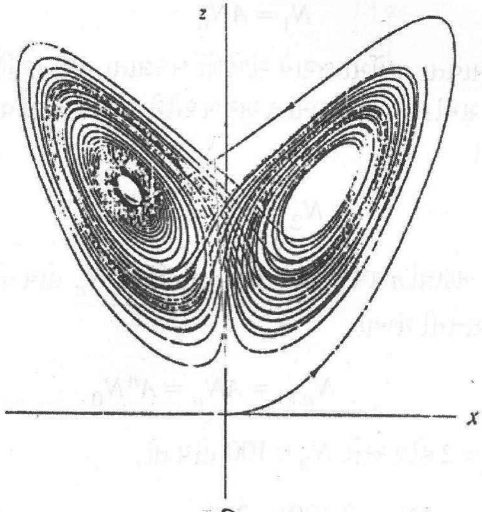
$$E = mc^2$$

નજર સમક્ષ આવે છે, અહીંયાં E એ m દ્રવ્યના કણની કાર્યશક્તિ અને c એ પ્રકાશના કિરણનો વેગ છે. તે જ રીતે હાલમાં કેઑસની વાત થાય છે ત્યારે આકૃતિઓ 9.0.1 અને 9.0.2 ની વાત થાય છે.



આકૃતિ 9.0.1

આપણે આ પ્રકરણમાં આકૃતિ 9.0.1 સમજવા પ્રયત્ન કરીશું.



આકૃતિ 9.0.2

પતંગિયાંની પાંખો અથવા ગીધના આવરણ જેવા દેખાતા લોરેન્ઝ સમીકરણના આકર્ષકોનો આલેખ.

આપણે આકૃતિ 9.0.2 ને પ્રકરણ 12 માં સમજવા પ્રયત્ન કરીશું.

9.1 લૉજિસ્ટીક સમીકરણ

આપણું ધ્યેય આવતાં વર્ષોમાં વસ્તી કેટલી હશે તે ચોક્કસતાપૂર્વક આગાહી કરવાનું છે. આપણો આશય વસ્તીનો નાશ થશે કે ખૂબ જ વધારો થશે કે વધારો કે ઘટાડો ઘટમાળમાં થશે કે વસ્તીની આગાહી ન થઈ શકે તે જાણવાનો છે. આ માટે આપણે વસ્તીનો અંદાજ કાઢવાનું સરળ ગણિત જોઈએ. સરળતા માટે આપણે એવી જીવાત (જેમકે, મચ્છરો) લઈએ કે જેની બે પેઢીઓ એક સાથે જીવતી ન હોય. મચ્છરો ચોમાસાની ઋતુ પૂરી થતાં સામાન્ય રીતે મરી જાય છે. ફરીથી ચોમાસાની ઋતુ આવતાં મરી જતા પહેલાં મૂકેલાં ઈંડાંમાંથી નવા મચ્છરો પેદા થાય છે. આથી, આપણે ધારીએ કે, આ ઋતુના અંતમાં N_0 જીવાતની માદાઓ છે. ઋતુ પૂરી થતા પહેલાં દરેક માદાએ ઈંડાં મૂક્યાં અને મરી ગઈ. ઈંડાંમાંથી સેવાયા બાદ દરેક જીવાતે સરેરાશ A બચ્ચાં જીવ્યાં. આથી નવી ઋતુની શરૂઆતમાં જીવાતની સંખ્યા

$$N_1 = AN_0 \tag{9.1.1}$$

હશે. ધારો કે, આવતા વર્ષોમાં જરાયે સંજોગો બદલાતા નથી (ગણિતશાસ્ત્રીઓની ધારણા), આથી, સમીકરણ (9.1.1)માં A અચળ રહેશે. આથી, બીજા વર્ષની શરૂઆતમાં જીવાતની સંખ્યા

$$N_2 = AN_1 = A^2 N_0 \tag{9.1.2}$$

હશે. આ જ રીતે ગણતાં n વર્ષના અંતે જીવાતની સંખ્યા N_n હોય તો $(n+1)$ વર્ષની શરૂઆતમાં જીવાતની સંખ્યા

$$N_{n+1} = AN_n = A^n N_0 \tag{9.1.3}$$

હશે. ધારો કે, $A = 2$ હોય અને $N_0 = 100$ હોય તો,

$$N_1 = AN_0 = 2(100) = 200$$

$$N_2 = AN_0 = (2)(2)(100) = 2^2(100) = 400$$

... ...

... ...

$$N_{10} = AN_9 = 2(2^9)(100) = 2^{10}(100) = 10,24,000$$

... ...

... ...

$N_{n+1} = AN_n = A^{(n+1)}N_0 = (2^{n+1})(100)$ થશે.

આથી જો $A > 1$ હોય તો લાંબા ગાળે જીવાતની સંખ્યા ખૂબ જ વધી જશે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, મોટા પ્રમાણની વસ્તીનું ભરણપોષણ ન થઈ શકે. આ કારણે જીવાત ઋતુ પૂરી થાય તે પહેલાં ઈંડાં મૂક્યા વગર મરી જશે. આ જીવાતની વસ્તીને N_{max} થી દર્શાવીશું. વસ્તી ઉપર કુદરત કાબૂ રાખતી હોય છે અને એટલા માટે A ને અચળ માનવાને બદલે જેમ જેમ વસ્તી N_n વધતી જાય તેમ તેમ A સુરેખ રીતે (linearly)

ઘટતો જાય. આ રીતે ગણતાં (સ્વાધ્યાય 9.1.6) A ના બદલે $A\left(1-\frac{N_n}{N_{\max}}\right)$ વાપરીએ

તો વસ્તી કાબૂમાં રહે. આથી, સમીકરણ (9.1.3) માં A ના બદલે $A\left(1-\frac{N_n}{N_{\max}}\right)$

વાપરતાં

$$N_{n+1}=A\left(1-\frac{N_n}{N_{\max}}\right)N_n \tag{9.1.4}$$

મળશે. સમીકરણ (9.1.4) ની બંને બાજુએ $N_{\max}$ વડે ભાગતાં

$$\frac{N_{n+1}}{N_{\max}}=A\left(1-\frac{N_n}{N_{\max}}\right)\frac{N_n}{N_{\max}} \tag{9.1.5}$$

મળશે. અનુકૂળતા માટે સમીકરણ (9.1.5)માં નવો ચલ

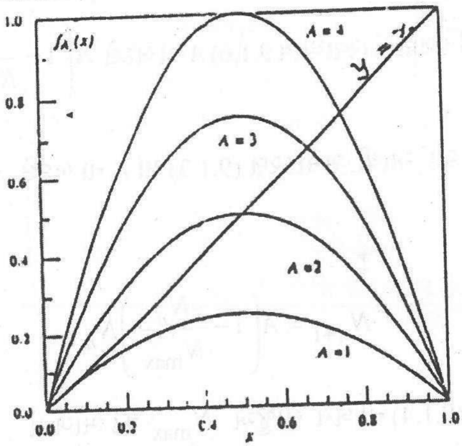
$$x_n=\frac{N_n}{N_{\max}}, \tag{9.1.6}$$

જેની કિંમત 0 અને 1 વચ્ચે રહેશે, મૂકતાં આપણને સમીકરણ

$$x_{n+1}=A(1-x_n)x_n \tag{9.1.7}$$

મળશે, જે લૉજિસ્ટીક (Logistic) સમીકરણ તરીકે ઓળખાય છે. આ સમીકરણમાં વસ્તી x_{n+1} આપણને ટકાવારીમાં મળશે. $f(x_n)=Ax_n(1-x_n)$ વારંવાર ગણતરી કરતા (iterative) વિધેય તરીકે ઓળખાય છે કારણ કે $(n+1)^{\text{th}}$ વર્ષની વસ્તી આ વિધેયની કિંમતથી મળે છે. આકૃતિ 9.1.1માં $f(x)=Ax(1-x)$ વિધેયના આલેખો A = 1, 2, 3 અને 4 કિંમતો માટે આપેલ છે અને સાથે સાથે $y=x$ રેખાનો આલેખ પણ આપેલ છે. વિધેયની મહત્તમ કિંમત $f(\frac{1}{2})=\frac{A}{4}$ છે.

હવે આપણે આપણા પ્રશ્નોના જવાબ સમીકરણ (9.1.7)માંથી મેળવવા પ્રયત્ન કરીએ. લાંબા ગાળે વસ્તી કેટલી હશે અને વસ્તીનો આધાર A ઉપર કેવો છે તે આપણે જોઈશું.



આકૃતિ 9.1.1.

રેખા $y = x$ અને વિધેય $f(x) = Ax(1-x)$ ના $A = 1, 2, 3,$ અને 4 ના આલેખો

આપણે ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરીશું. x_0 ની કિંમત 0 અને 1 વચ્ચેની કોઈ સંખ્યા અને A ની કિંમત 0 અને 4 વચ્ચેની કોઈ સંખ્યા લઈશું. આનો ઉપયોગ સમીકરણ (9.1.7)માં કરીને x_1 ગણીશું જે $x_1 = Ax_0(1-x_0) = f(x_0)$ થાય. x_1 મળ્યા પછી $x_2 = Ax_1(1-x_1) = f(x_1)$ ગણી શકાય. આ રીતે x_n ની કિંમતો ગણી શકાય. આ રીતે ગણતાં શ્રેણી $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ મળે જેને ભ્રમણકક્ષા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ગ્રહો, તારાઓ અને ઉપગ્રહો વગેરેની જુદા જુદા સમયે દર્શાવતી ભ્રમણકક્ષાના નામ ઉપરથી જ આ નામ લેવામાં આવ્યું છે. શરૂઆતની x_n કિંમતો x_0 ઉપર આધાર રાખે છે. આથી આવી x_n કિંમતો અલ્પકાલીન કહેવાય છે. ભ્રમણકક્ષાની પાછળની કિંમતો આપેલ A માટે, જો કોઈ x_0 માટે નિશ્ચિત કિંમતોએ પહોંચતી હશે તો 0 અને 1 વચ્ચેના કોઈપણ x_0 માટે તે નિશ્ચિત કિંમતોએ પહોંચશે.

અમુક કિંમતો શરૂઆત કરવા માટે દરેકથી જુદી પડે છે. દા.ત. $x_0 = 1$ લઈએ તો $x_1 = Ax_0(1-x_0) = 0$, $x_2 = f(x_1) = f(0) = 0$,

$x_3 = f(x_2) = f(0) = 0, \, , \, ..., \; x_{n+1} = f(x_n) = f(0) = 0.$

આજ પ્રમાણે $x_0 = 0$ લઈએ તો

$$x_1 = Ax_0(1-x_0) = 0, \; x_2 = Ax_1(1-x_1) = 0, ...$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(0) = 0.$$

- **સ્થિરબિંદુઓ :**

$f(x) = Ax(1-x)$ માટે $f(0) = 0$ છે. જો $f(p) = p$ હોય તો p એ f વિધેયના સ્થિરબિંદુ તરીકે ઓળખાય છે. $f(x) = Ax(1-x)$ માટે $f(0) = 0$ હોઈ 0 એ આપણા f નું સ્થિરબિંદુ છે.

$f(p) = p = y$ જોતાં જ્યાં $y = g(x) = x$ અને $y = f(x)$ આલેખો એક બીજાને છેદે તે બિંદુ કે બિંદુઓ f વિધેયના સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓ ગણાય. આકૃતિ 9.1.1 જોતાં $p = 0$ ચારેય આલેખોનું સ્થિરબિંદુ છે. જ્યારે $y = x$ રેખા $A = 2, 3$ અને 4 કિંમતોના આલેખોને બીજા જુદાં જુદાં બિંદુઓએ છેદે છે. આથી આ જુદાં જુદાં બિંદુઓ જુદાં જુદાં સ્થિર બિંદુઓ બનશે. લૉજિસ્ટીક સમીકરણના સ્થિરબિંદુઓ શોધવા માટે $f(p) = Ap(1-p) = p$ નો ઉકેલ મેળવવો જોઈએ. આ ઉકેલો $p = 0$ અને $p = 1 - \frac{1}{A}$ છે. આપણે આકૃતિ 9.1.1માં પણ જોઈએ છીએ. $A = 1$ માટે બન્ને સ્થિરબિંદુઓ એક જ બિંદુ $p = 0$ છે.

- **કરોળિયાના જાળા જેવો પટ :**

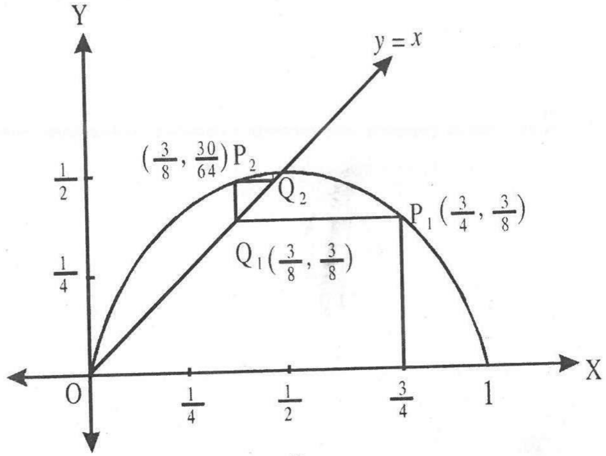
ભ્રમણકક્ષા સમજવા માટે ઘણી વખત ભ્રમણકક્ષાનો નકશો ખૂબ જ ઉપયોગી થાય છે. આથી આપણે નમૂનારૂપે સમીકરણ

$$x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \tag{9.1.8}$$

ની ભ્રમણકક્ષાનો નકશો મેળવીએ.

આકૃતિ 9.1.2માં $y = f(x) = 2x(1-x)$ અને $y = g(x) = x$ ના બે આલેખો આપેલા છે. $x_0 = \frac{3}{4}$ લઈને સમીકરણ (9.1.8)માં મૂકતાં

$x_1 = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375$ મળશે. $x = \frac{3}{4}$ સીધી ઊભી સુરેખા દોરીએ, જે આપણા વિધેય f ને $P_1(x_0, x_1) = P_1(\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ બિંદુએ છેદે છે. $P_1(\frac{3}{4}, \frac{3}{8})$ બિંદુમાંથી આપણે $y = x_1 = \frac{3}{8}$ આડી સુરેખા દોરીએ જે $y = x$ સુરેખાને $Q_1(x_1, x_1) = Q_1(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ બિંદુમાં છેદે છે. $Q_1(x_1, x_1)$ બિંદુમાંથી $f(x) = 2x(1-x)$ ની ભ્રમણકક્ષાનો કરોળિયાની જાળ જેવો નકશો ઊભી સુરેખા $x = x_1 = \frac{3}{8}$ દોરીએ જે વિધેય f ને $P_2(x_1, x_2)$ બિંદુએ



આકૃતિ 9.1.2

છેદે છે જ્યાં $x_2 = 2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{30}{64} = 0.46875$ છે. ફરીથી $P_2\left(\frac{3}{8}, \frac{30}{64}\right)$ બિંદુમાંથી $y = x_2 = \frac{30}{64}$ સુરેખા દોરીએ જે $y = x$ રેખાને $Q_2(x_2, x_2)$ બિંદુમાં છેદે છે. આ રીતે દોરતાં આખરે x_n આપણા વિધેય fના સ્થિરબિંદુ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ એ પહોંચશે.

સ્વાધ્યાય 9.1

(1) સમીકરણ (9.1.3) માં $A = 3$ અને $N_0 = 50$ લઈને N_5 સુધીની કિંમત

મેળવો.

(2) નીચેનાં વિધેયોના આલેખો દોરો :

(a) $f(x)=\frac{1}{2}x(1-x)$ (b) $f(x)=2-x^2$

(3) જો $f(x)=-Ax+x^3$ હોય, તો f નાં સ્થિરબિંદુઓ શોધો.

(4) જો $f(x)=A-x^2$ હોય, તો fના સ્થિરબિંદુઓ શોધો.

(5) જો $x_{n+1}=-\frac{1}{4}-x_n{}^2$ અને $x_0=0$ હોય, તો x_5ની કિંમત શોધો.

(6) જો f સુરેખ રીતે (linearly) ઘટતું હોય અને $N_0=0$, $f(N_0)=f(0)=A$ અને $N_n=N_{\max}$, $f(N_{\max})=0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $f(N_n)=A\left(1-\frac{N_n}{N_{\max}}\right)$ થાય.

9.2 આબેહૂબ ચિત્ર

ધારો કે, આપણે A ની કિંમત 0 અને 4 વચ્ચેની કોઈ કિંમત લઈએ અને x_0 ની કિંમત 0 અને 1 વચ્ચેની લઈને સમીકરણ (9.1.7)ની મદદથી x_n ગણીએ તો શું થશે? x_n ની કિંમતો A ઉપર આધાર રાખતી હોઈ, Aની કિંમતોના વિભાગ પાડીશું.

(1) $0<A<1$

$x_0=0.5$ અને $A = 0.5$ સમીકરણ (9.1.7) માં મૂકતાં $x_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0.125$ થશે. આજ રીતે $x_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{128}$ = 0.054688 થશે. આ રીતે x_n ની કિંમતો ગણી શકાય. આ રીતે ગણેલી x_{20} સુધીની કિંમતો ટેબલ 9.2.1માં અને આકૃતિ 9.2.1માં n વિરૂધ્ધ x_n નો આલેખ પણ આપેલો છે. આ બંનેમાંથી જોઈ શકાશે કે, જેમ જેમ n ની કિંમત વધતી જાય છે, તેમ તેમ x_n ની કિંમત લગભગ શૂન્ય થતી જાય છે. 0 એ આપણા વિધેય fનું સ્થિરબિંદુ છે અને

જેમ જેમ n વધતો જશે તેમ તેમ x_n શૂન્યની નજીક આવતો જશે. ટેબલ 9.2.1ની ત્રીજી ઊભી હારમાળામાં $x_0 = 0.9$ અને $A = 0.5$ લઈને ગણેલી કિંમતો આપી છે. આ કિંમતો પણ n ની જેમ જેમ કિંમત વધતી જાય છે, તેમ તેમ x_n ની કિંમત શૂન્ય તરફ જતી જાય છે.

(2) $1 < A < 3$

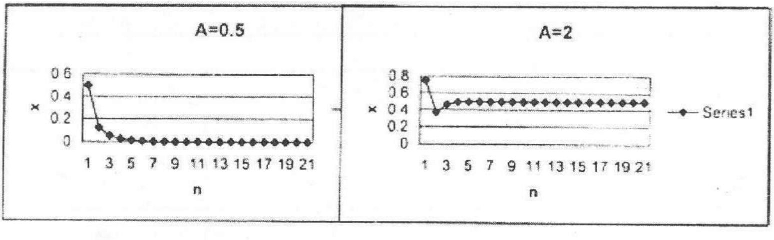
$A = 2.0$ અને $x_0 = \frac{3}{4} = 0.75$ સમીકરણ (9.1.7)માં લઈને ગણેલી કિંમતો x_0 થી x_{20} ટેબલ 9.2.1 ટેબલની ચોથી ઊભી હારમાળમાં આપેલી છે. છેલ્લી ઘણીબધી કિંમતો 0.5 છે જે $f(x) = 2x(1-x)$ નું સ્થિરબિંદુ $p = 1 - \frac{1}{A} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ છે. આકૃતિ 9.2.2માં n વિરૂધ્ધ x_n નો આલેખ આપેલો છે, જેમાં $x_n = 0.5,\ n \geq 5$ માટે છે. $x_0 = 0.9$ અને $A = 2$ લઈને ગણેલી કિંમતો પાંચમી ઊભી હારમાળામાં આપેલી છે, જેમાં $x_n = 0.5,\ n > 6$ માટે છે.

0 અને 1 વચ્ચેની x_0 ની કોઈપણ કિંમત લઈએ તો $A = \frac{1}{2}$ માટે $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ છે અને $A = 2$ $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ છે. આથી $A = \frac{1}{2}$ માટે $x = 0$ અને $A = 2$ માટે $x = \frac{1}{2}$ **આકર્ષકો** તરીકે ઓળખાય છે.

ટેબલ 9.2.1

	$A = 0.5$ x_n	$A = 0.5$ x_n	$A = 2$ x_n	$A = 2$ x_n
0	0.5	0.9	0.75	0.9
1	0.125	0.045	0.375	0.18
2	0.0546875	0.0214875	0.46875	0.2952
3	0.025848389	0.010512894	0.498046875	0.41611392
4	0.012590125	0.005201186	0.499992371	0.485926251

5	0.006215807	0.002587067	0.5	0.499603859
6	0.003088585	0.001290187	0.5	0.499999686
7	0.001539523	0.000644261	0.5	0.5
8	0.000768576	0.000321923	0.5	0.5
9	0.000383993	0.00016091	0.5	0.5
10	0.000191923	8.04419E-05	0.5	0.5
11	9.59429E-05	4.02177E-05	0.5	0.5
12	4.79669E-05	2.01081E-05	0.5	0.5
13	2.39823E-05	1.00538E-05	0.5	0.5
14	1.19909E-05	5.02686E-06	0.5	0.5
15	5.99535E-06	2.51342E-06	0.5	0.5
16	2.99766E-06	1.25671E-06	0.5	0.5
17	1.49883E-06	6.28352E-07	0.5	0.5
18	7.49411E-07	3.14176E-07	0.5	0.5
19	3.74705E-07	1.57088E-07	0.5	0.5
20	1.87353E-07	7.85439E-08	0.5	0.5



આકૃતિ 9.2.1 આકૃતિ 9.2.2

(3) $3 < A < 1 + \sqrt{6} \approx 3.4494$

A = 3.2 અને $x_0 = 0.5$ સમીકરણ (9.1.7)માં લઈને મળેલી કિંમતોમાંથી x_0 થી x_5 અને x_{41} થી x_{50} સુધીની કિંમતો ટેબલ 9.2.2માં આપેલી છે. n વિરૂધ્ધ x_n નો આલેખ x_{41} થી x_{50} કિંમતો માટે આકૃતિ 9.2.3માં આપેલ છે. આમાંથી

જોઈ શકાશે કે x_n ની કિંમતો 0.7994 અને 0.5130 વચ્ચે ફર્યા કરે છે. એક પેઢી વખતે વસ્તી (ટકાવરીમાં) વધારે 0.7994 હોય છે અને બીજી પેઢી વખતે ઓછી વસ્તી 0.5130 હોય છે. $A = 3.2$ માટે 0.7994 અને 0.5130 આકર્ષકો છે. જો Aની કિંમત 3 અને $1+\sqrt{6}$ વચ્ચે બીજી કોઈ કિંમત લઈએ તો આપણને બે જુદા આકર્ષકો મળશે. જ્યારે Aની કિંમત 1 અને 3 વચ્ચે હોય છે ત્યારે એક જ આકર્ષક $p = 1 - \frac{1}{A}$ છે, અને જો A ની કિંમત 3 અને $1+\sqrt{6}$ વચ્ચે હોય તો બે આકર્ષકો વચ્ચે xની કિંમત ફર્યા કરે છે અને તેનું સૂત્ર અને કારણો આપણે પ્રકરણ 10માં જોઈશું.

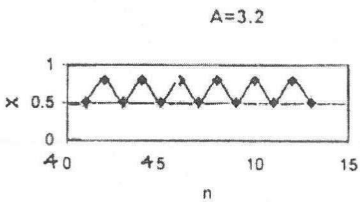
(4) $1+\sqrt{6} < A < 3.544$

$A = 3.5$ અને $x_0 = 0.5$ સમીકરણ (9.1.7)માં લઈને ગણતાં મળતી x_n ની કિંમતોમાંથી x_0 થી x_5 અને x_{41} થી x_{50} સુધીની કિંમતો ટેબલ 9.2.2માં આપી છે. x_{41} થી x_{50} અને n નો આલેખ આકૃતિ 9.2.4માં આપેલ છે. આમાંથી જોઈ શકાશે કે x ની કિંમતો 0.8750, 0.3829, 0.8270 અને 0.5009 વચ્ચે એ ક્રમમાં ફર્યા કરે છે. આ ક્રમમાં સૌથી પહેલી રકમ સૌથી વધારેમાં વધારે છે, બીજી રકમ ઓછામાં ઓછી છે, ત્રીજી રકમ સૌથી વધારે કરતાં ઓછી અને ચોથી રકમ ઓછામાં ઓછી કરતાં વધારે છે. આ રીતે આપણને ચાર આકર્ષકોના ઘટવાળી ભ્રમણકક્ષા મળી.

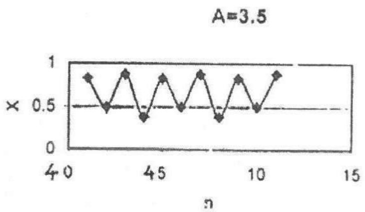
ટેબલ 9.2.2

n	A = 3.2 x_n	A = 3.5 x_n
0	0.5	0.5
1	0.8	0.375
2	0.512	0.3828
3	0.7995	0.8269
4	0.5129	0.5009
5	0.7995	0.8750
41	0.7994	0.5009

42	0.5130	0.8750
43	0.7994	0.3829
44	0.5130	0.8270
45	0.7994	0.5009
46	0.5130	0.8750
47	0.7994	0.3829
48	0.5130	0.8270
49	0.7994	0.5009
50	0.5130	0.8750

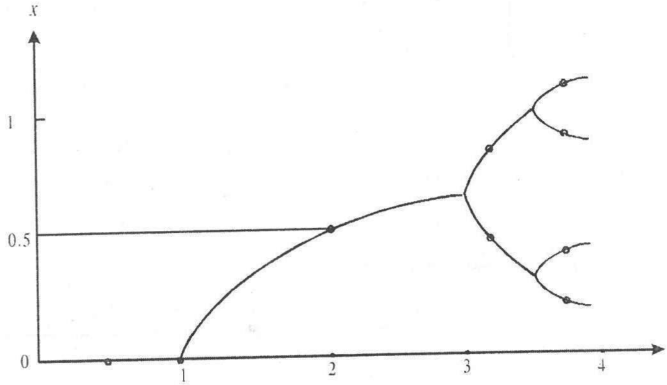


આકૃતિ 9.2.3



આકૃતિ 9.2.4

આકૃતિ 9.2.5માં x અને A ના અત્યાર સુધી ગણેલી કિંમતોનો આલેખ દોરીએ. જો $0 \le A \le 1$ હોય તો x ની કિંમત ઘણી પુન:ગણતરીઓ (iterations) પછી સ્થિરબિંદુ $x = 0$ એ પહોંચશે. આપણે $A = 0.5$ માટે $x = 0$ સ્થિરબિંદુ આલેખમાં ⊙ થી દર્શાવીએ છીએ. જો $1 < A < 3$ હોય તો ઘણી પુન: ગણતરીઓ પછી x ની કિંમત સ્થિરબિંદુ $p = 1 - \frac{1}{A}$ એ પહોંચશે. $A = 2$ માટે $x = 1/2$ સ્થિરબિંદુ આલેખમાં ⊙ થી દર્શાવ્યું છે. $A = 3$ પછી x ના બે ફાંટા પડે છે. અને આપણને બે આકર્ષકો મળે છે. $A = 3.2$ માટે 0.7994 અને 0.5130 બે આકર્ષકો નિશાની ⊙ થી દર્શાવ્યા છે. ફરીથી $A = 3.4493$ પછી દરેક ફાંટાના બે ફાંટા થાય છે. આથી આપણને ચાર આકર્ષકો મળે છે. $A = 3.5$ માટે 0.8750, 0.8270, 0.5009 અને 0.3829 ચાર આકર્ષકો નિશાની ⊙ થી આકૃતિ 9.2.5માં દર્શાવ્યા છે.



આકૃતિ 9.2.5

Aની કિંમત 3.554 થી થોડીક વધારીએ તો xની કિંમતોની આઠ આકર્ષકોની ઘટમાળવાળી ભ્રમણકક્ષા હોય છે અને આથી આલેખમાં ચાર ફાંટાઓમાંથી આઠ ફાંટાઓ થાય છે. Aની કિંમત આથી થોડીક વધારીએ તો x સોળ કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરશે અને આ રીતે દરેક વખતે બમણા ફાંટાઓ થયા કરશે. આ રીતે અનંત શ્રેણીની શરૂઆત થાય છે. ટેબલ 9.2.3માં A કે જ્યાં 2^n આકર્ષકોના ઘટમાળની શરૂઆત થાય છે તેની કિંમતો આપેલી છે.

A ની કિંમત 3.57 થી થોડીક વધારે હોય ત્યારે x ની કિંમતો બદલાયા જ કરે છે. x ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન થતું નથી. આ જાતની xની કિંમતોને કેઑટિક (અંધાધૂધીવાળી) કિંમતો કહીશું. A ની કિંમત 3.57 થી વધારે હોય તો x ની કિંમતો કેવી હશે ? આ જાણવા માટે નીચે મુજબનો કમ્પ્યૂટરનો પ્રોગ્રામ લખીને આલેખ દોરીએ.

(1) A = 3.5 લઈએ.

(2) શૂન્ય અને 1 વચ્ચેની કોઈપણ x_0 ની કિંમત લઈએ. સરળતા માટે $x_0 = 0.5$ લઈએ.

(3) $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ નો ઉપયોગ કરીને $n = 0, 1, 2, ..., 199$ લઈને x_{200} ની કિંમત ગણો. x ની નિયતકાલીન કિંમતો માટે કોઈપણ x_0 માટે x_{200} ની કિંમત સરખી જ હશે. x ની કેઑટિક કિંમતો માટે x_{200} જુદી જ હશે.

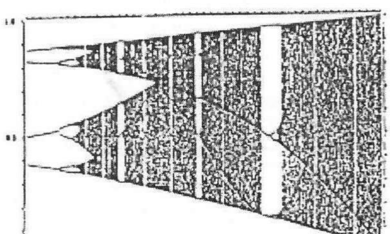
ટેબલ 9.2.3

n	2^n	A
1	2	3.00000
2	4	3.4493
3	8	3.5441
4	16	3.5644
5	32	3.5688
6	64	3.56909
7	128	3.56989
⋮	⋮	⋮

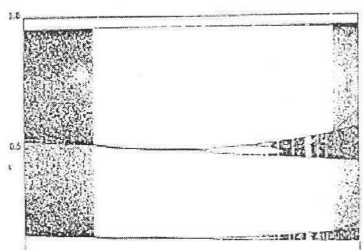
(4) હવે x_{200} લઈને $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ નો ઉપયોગ કરીને નવી x ની 500 કિંમતો એટલે કે x_{200} થી x_{700} ગણો અને x_{200} થી x_{700} કિંમતોની રેખાકૃતિ દોરો. આ આપેલ A ની x કિંમતોનો આલેખ છે.

(5) A ની કિંમત 0.01 વધારો એટલે કે A = A + 0.01 થશે અને પગલા (2)થી ફરી શરૂ કરો.

A ની કિંમત 4.01 થાય એટલે ગણવાનું બંધ કરીએ. આ રીતે A અને x નો દોરેલ આલેખ આકૃતિ 9.2.6ના જેવો હશે. આકૃતિ 9.2.6માં $A > A_\infty = 3.57$ માટે x ની કિંમતો શિસ્તબધ્ધ આકર્ષકો અને અશિસ્તબધ્ધ કિંમતોનું મિશ્રાણ છે.



આકૃતિ 9.2.6



આકૃતિ 9.2.7

અશિસ્તબધ્ધ કિંમતોનાં ટપકાંઓ વચ્ચે સફેદ બારીઓમાં ત્રણ, પાંચ, છ, આકર્ષકો નજરે પડે છે. આવી એક સફેદ બારી A = 3.83 ની આસપાસ છે અને તેમાં ત્રણ આકર્ષકો અને પછી છ આકર્ષકોની ઘટમાળ બને છે. A = 3.83 ની આસપાસના ભાગને વિસ્તરણ કરીને આકૃતિ 9.2.7 આપેલી છે. આમાંથી જોઈ શકાશે કે, આકર્ષકોની ઘટમાળ દરેક વખતે બમણી થાય છે. ટેબલ 9.2.4માં, A = 3.835, 3.845, 3.85 અને 3.859 માટે x_{147} થી x_{156} ની કિંમતો આપેલી છે.

ટેબલ 9.2.4

n	A = 3.835 x_n	A = 3.845 x_n	A = 3.85 x_n	A = 3.859 x_n
147	0.152 074	0.143 232	0.141 534 I	0.621 74
148	0.494 514	0.471 845	0.467 782 II	0.907 596
149	0.958 635	0.958 202	0.958 504 III	0.323 89
150	0.152 074	0.153 995	0.153 131 I	0.845 064
151	0.494 514	0.500 93	0.499 275 II	0.505 262
152	0.958 635	0.961 247	0.962 498 III	0.964 643
153	0.152 074	0.143 232	0.138 968 I	0.131 618
154	0.494 514	0.471 845	0.460 676 II	0.441 063
155	0.958 635	0.958 202	0.956 546 III	0.951 346
156	0.152 074	0.153 995	0.160 027 I	0.178 622

આ કિંમતોમાંથી જોઈ શકાશે કે, A = 3.835 માટે ત્રણ આકર્ષકો 0.1521, 0.4945, અને 0.9586 છે. જ્યારે, A = 3.845 માટે છ આકર્ષકો 0.1432, 0.4718, 0.9582, 0.1540, 0.5009 અને 0.9612 છે. દરેક વખતે આકર્ષકો બમણા થવાનું પૂરું થયા પછી x ની કિંમતો ત્રણ પટ્ટાઓમાં કેયોટિક રીતે વહેંચાયેલી છે. A = 3.85 માટે x ની કિંમતો I, II અને III પટ્ટાઓમાં આપેલી છે. આખરે A = 3.859 માટે x ની કિંમતો એક માત્ર પટ્ટામાં કેઑટિક રીતે વહેંચેલી છે.

નરી આંખે ધ્યાનપૂર્વક આકૃતિ 9.2.6માં જોતાં સફેદ બારીઓમાં છ સુધીના

આકર્ષકો 6, 5, 3, 5, 6, 4, 6, 5, અને 6 આકર્ષકો દેખાય છે.

ટેબલ 9.2.5માં A ની કિંમતો કે જ્યાં છ સુધીના આકર્ષકો સફેદ બારીઓમાં દેખાય છે તે આપેલી છે. છેલ્લા આકર્ષકો બહુ જ બારીક સફેદ બારીઓમાં આવેલા છે.

ટેબલ 9.2.5

n	A
6	3.6275
5	3.7389
3	$1+\sqrt{8} \approx 3.8284$
5	3.9057
6	3.9375
4	3.9609
6	3.9778
5	3.9903
6	3.9976

સ્વાધ્યાય 9.2

(1) લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ લઈને A અને x_0 ની નીચેની કિંમતો માટે x_{100} કે x_{200} સુધીની કિંમતો ગણીને ભ્રમણકક્ષાનું નિરીક્ષણ કરો:

(a) $A = 0.52,\ x_0 = 0.1$ અને 0.8 (b) $A = 2.0,\ x_0 = 0.2$ અને 0.9

(c) $A = 3.1,\ x_0 = 0.3$ અને 0.97 (d) $A = 3.45,\ x_0 = 0.1$ અને 0.6

(e) $A = 3.56,\ x_0 = 0.1$ અને 0.7 (f) $A = 3.569,\ x_0 = 0.2$ અને 0.5

(g) $A = 3.737,\ x_0 = 0.3$ અને 0.9

(h) $A = 3.9603,\ x_0 = 0.1$ અને 0.7

(i) $A = 3.627,\ x_0 = 0.1$ અને 0.7

(2) દ્વિઘાતી સમીકરણ $x_{n+1} = A - x_n^{\ 2}$ લઈ નીચેની A અને x_0 કિંમતો લઈને x_{100} કે x_{200} સુધીની કિંમતો ગણીને ભ્રમણકક્ષાનું નિરીક્ષણ કરો :-

(a) $A = 0,\ x_0 = -0.5$ અને 0.5

(b) $A = 1,\ x_0 = -1.5$ અને 1.25

(c) $A = 1.3,\ x_0 = -1.1$ અને 1.1

(d) $A = 1.37,\ x_0 = -1$ અને 1

(e) $A = 1.395,\ x_0 = -1.5$ અને 1.25

(f) $A = 1.75,\ x_0 = -1.1$ અને 0.75

(g) $A = 1.765,\ x_0 = 0.5$ અને -0.8

(3) $x_n = ay_n + b$, જ્યાં a અને b અચળ છે, લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$ માં મૂકીને દ્વિઘાતી સમીકરણ $y_{n+1} = y_n^{\ 2} + c$, જ્યાં c અચળ છે, મેળવો. આ કારણે લૉજિસ્ટીક સમીકરણ અને દ્વિઘાતી સમીકરણ એકબીજાના અનુબદ્ધ (Conjugate) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

(4) લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$ નો $0 \le A \le 4$ માટે ભ્રમણકક્ષાનો આલેખ દોરો.

(5) દ્વિઘાતી સમીકરણ $x_{n+1} = A - x_n^{\ 2}$ નો $-\frac{1}{4} \le A \le 2$ માટે ભ્રમણકક્ષાનો આલેખ દોરો.

(6) નીચેના સમીકરણોનાં બધાં યોગ્ય લક્ષણોને આવરી લે તેવા બધા A માટે ભ્રમણકક્ષાનો આલેખ દોરો.

(a) $x_{n+1} = A\sin(\pi x_n)$ (b) $x_{n+1} = x_n e^{-A(1 - x_n)}$

(c) $x_{n+1} = e^{-Ax_n}$ (d) $x_{n+1} = x_n(A - x_n^{\ 2})$

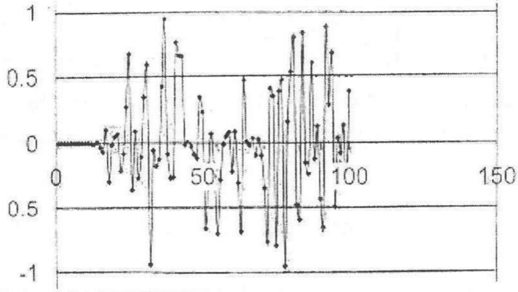
9.3 કેઓસ (અંધાધૂંધી)

A ની 3.57થી વધારે અનંત કિંમતો માટે x ની ભ્રમણકક્ષામાં x ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન થતું નથી. x ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન ન થતું હોય તો આ જાતની x કિંમતોને અંધાધૂધીવાળી (કેઑટિક) કહીશું. ગણતાં ગણતાં થાકી જઈને પણ આપણે માની લઈએ કે x ની કિંમતોનું પુનરાવર્તન થતું નથી. આ x કિંમતો કેઑટિક છે કે નહિ, તેની કસોટી આપણે બીજી રીતે પણ કરી શકીએ. આવા A માટે x_0 અને $x_0 + \varepsilon$, જ્યાં ε એ કોઈપણ નાની સંખ્યા છે, લઈને બે ભ્રમણકક્ષાઓ ગણીએ અને આ ભ્રમણકક્ષાઓ એકદમ જુદી હોય તો x કિંમતોને અંધાધૂંધીવાળી કહીશું.

ટેબલ 9.3.1માં $x_0 = \frac{1}{3}$ લેવા માટે એક ભ્રમણકક્ષા $x_0 = 0.333333$ અને બીજી ભ્રમણકક્ષા $x_0 = 0.33333$ અને $A = 3.99$ લઈને માઇક્રોસોફ્ટ એકસેલ (Microsoft Excel) વાપરીને ગણેલી x_{100} સુધીની કિંમતોમાંથી x_0 થી x_4, x_{25} થી x_{30}, અને x_{60} થી x_{64} સુધીની કિંમતો બીજી, ત્રીજી અને તેમનો તફાવત ચોથી ઊભી હારમાળામાં અનુક્રમે આપેલ છે. આકૃતિ 9.3.1માં આ બંને કિંમતોનો તફાવત અને n નો આલેખ આપેલો છે. શરૂઆતની કિંમતોમાં મોટો ફેર નથી, પણ જેમ જેમ nની કિંમત વધે તેમ બંને કિંમતો વચ્ચે મોટો ફેર પડે છે. x_{62} ની કિંમતનો ફેર 0.68 થી વધારે છે, જે x_{62}ની સરેરાશ કિંમત કરતાં વધારે છે. ટેબલ 9.3.1 અને આકૃતિ 9.3.1 ઉપરથી કહી શકાય કે શરૂઆતમાં બંને ભ્રમણકક્ષાઓમાં ફેર નથી અને જેમ જેમ n ની કિંમત વધતી જાય તેમ તેમ આ બંને ભ્રમણકક્ષાઓ એક બીજાથી દૂર લાગે છે. આ કારણે કઈ કિંમત સાચી તે કહેવું મુશ્કેલ છે કારણ કે, x_0 ની સાચી કિંમત કઈ?

ટેબલ 9.3.1

		A = 3.99	
n	x_n	x_n	(બીજી અને ત્રીજી હારમાળનો તફાવત)
0	0.333 333	0.333 33	3×10^{-6}
1	0.886 666	0.886 662	3.99×10^{-6}
2	0.400 952	0.400 964	-1.2×10^{-5}
3	0.958 356	0.958 366	-9.7×10^{-6}
4	0.159 24	0.159 204	3.56×10^{-5}
25	0.354 592	0.709 417	–0.354 83
26	0.913 137	0.822 517	0.090 621
27	0.316 478	0.582 472	–0.265 99
28	0.836 115	0.970 361	–0.107 25
29	0.471 409	0.114 753	0.356 656
30	0.994 238	0.405 324	0.588 914
60	0.983 391	0.896 67	0.086 722
61	0.065 168	0.369 657	–0.304 52
62	0.243 075	0.929 744	–0.68 667
63	0.734 118	0.260 629	0.473 489
64	0.778 804	0.768 879	0.009 925



આકૃતિ 9.3.1

x ની કિંમત 0.5થી વધારે હોય તો સિક્કાની મસ્તકની બાજુ ગણો અને $x \leq 0.5$ હોય તો સિક્કાની બીજી બાજુ ગણો. A = 3.99 લો અને x_0 ની કિંમત 0 અને 1 વચ્ચેની કોઈ સંખ્યા લઈને શરૂઆત કરો અને કહો કે, x_{50} ની કિંમત 0.5 થી વધાર હશે કે ઓછી હશે કે 0.5 હશે ? આ રીતે આપણે x_{50} ની કિંમતનો પ્રશ્ન સિક્કો ઉછાળવાની પ્રવૃત્તિમાં ફેરવી દીધો. આ કેઑસ (અંધાધૂંધી) ની નિશાની છે.

લૉજિસ્ટીક સમીકરણમાં કોઈ વિકલન, સંકલન કે અઘરાં વિધેયો નથી, છતાંય જ્યારે પ્રચલ (Parameter) Aની કિંમત બદલીએ છીએ ત્યારે અત્યંત જટીલ ઉકેલ મળે છે. આપણે xની કિંમતો લૉજિસ્ટીક સમીકરણ લઈને ગણીએ છીએ છતાં ઘણી બધી Aની કિંમતો માટે આ કિંમતો કેવી હશે તે કહી શકતા નથી. તે કિંમતો અણધારી છે. લૉજિસ્ટીક સમીકરણના ઉકેલનું સૂત્ર મેળવવા પ્રયત્ન કરીએ પણ x_n^2 ના કારણે સૂત્ર મળે તેમ નથી. x_n^2 ની રકમ સમીકરણના ઉકેલોમાં રહેલી જટીલતા અને અંધાધૂંધીના કારણભૂત છે. ઘણાબધા વિજ્ઞાનીઓ આવા ઉકેલો ન્યૂટનના સમયથી શોધતા હતા, પણ કમ્પ્યૂટરના આવ્યા પછી આપણે એ જોઈએ છીએ. વાસ્તવમાં જીવવિદ્યાકીય વસ્તીનો પ્રશ્ન વધારે જટીલ છે. આથી જીવવિદ્યાના વિજ્ઞાનીઓ માટે તેમની ગણતરીમાં વસ્તીમાં જે પરિવર્તન થાય છે તે ફક્ત આસપાસના વાતાવરણના ફેરફારોના કારણે જ હોય તેમ માનવું વધારે પડતું છે. શક્ય છે કે, આ પરિવર્તન વસ્તીની ગણિતની પ્રતિકૃતિના (model) કારણે પણ હોય.

* * *

પ્રકરણ 10

સ્થિરબિંદુઓ અને તેનાં વિભાજનો

10.0 પ્રાસ્તાવિક

ગયા પ્રકરણમાં આપણે લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ મેળવેલું, x_0 આપણે $(0, 1)$ માંથી કોઈ સંખ્યા લઈએ અને A ની કિંમત $(0, 4)$ વચ્ચે લઈ $x_1 = Ax_0(1-x_0)$ ગણીએ. $x_2 = Ax_1(1-x_1)$ માં x_1 અને A ની કિંમત લઈને ગણતાં x_2 મળે. આ રીતે આપણે આપેલા A માટે ભ્રમણકક્ષાની શ્રેણી $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ મેળવીએ. જો n લંબાઈની શ્રેણી ઘટમાળની જેમ આવી જાય એટલે કે, $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \ldots\}$ તો આ શ્રેણીને આવર્ત $n+1$ ની (period $n+1$) ઘટમાળ કહીશું. ધારો કે, $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ હોય તો $\{0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots\}$ ભ્રમણકક્ષા આવર્ત બેની ઘટમાળ છે. Aની જુદી જુદી કિંમતો લઈને લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ ની ભ્રમણકક્ષાઓ મેળવીને પ્રકરણ 9, આકૃતિ 9.0.1માં આપેલા આલેખ જેવો આલેખ મેળવી શકીએ.

જો $f(p) = p$ હોય તો p એ f વિધેયનું સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓ તરીકે ઓળખાય છે, આ સ્થિરબિંદુઓ રેખા $y = x$ અને $y = f(x)$ ના આલેખોનાં છેદબિંદુઓ છે. લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $f(x) = Ax(1-x)$ ના $p = 0$ અને $p = 1 - \dfrac{1}{A}$ સ્થિરબિંદુઓ છે. આપણે આ પ્રકરણમાં સ્થિરબિંદુઓનું વર્ગીકરણ કરીશું અને જોઈશું કે A ની જે કિંમત માટે $f'(p) = -1$ હોય, જ્યાં f' એ f નું વિકલન છે, તે A ની કિંમતે સ્થિરબિંદુનું વિભાજન થઈ એક સ્થિરબિંદુને બદલે બે સ્થિરબિંદુઓ બને છે. આ જ રીતે A ની જે કિંમત માટે $f'(p) = 1$ હોય ત્યાં સ્પર્શક વિભાજન થાય છે.

છેલ્લે અંધાધૂંધી નક્કી કરવા માટે લિયાપુનોવ (Lyapunov) દર્શકની જરૂરિયાત જોઈશું અને Aની ઘણીબધી કિંમતો માટે લિયાપુનોવ દર્શક મેળવીને તેના આલેખનો અભ્યાસ કરીશું.

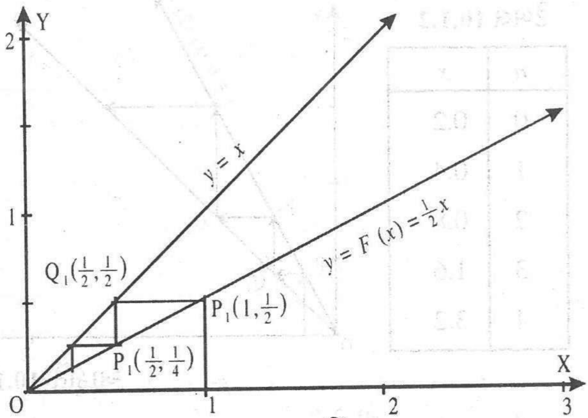
10.1 સ્થિરબિંદુઓનું વર્ગીકરણ

આકર્ષક અને પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનો ખ્યાલ આવે તે માટે નીચેના બે દાખલાઓ જોઈએ.

(1) ધારો કે, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n = F(x_n)$ છે. આથી $F(x) = \frac{1}{2}x$ છે. અને $F(p) = p$ હોઈ, સ્થિરબિંદુ $p = 0$ છે.

ટેબલ 10.1.1

n	x
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$



આકૃતિ 10.1.1

$x_0 = 1$ લઈને ગણતાં $x_1 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{8}$, $x_4 = \frac{1}{16}$

મળેલી કિંમતો ટેબલ 10.1.1 આપેલી છે.

આ જ કિંમતો $y = F(x) = \frac{1}{2}x$ અને $y = x$ ના કરોળિયાના જાળા જેવા પરથી પણ મેળવી શકીએ અને તે આકૃતિ 10.1.1માં આપેલી છે.

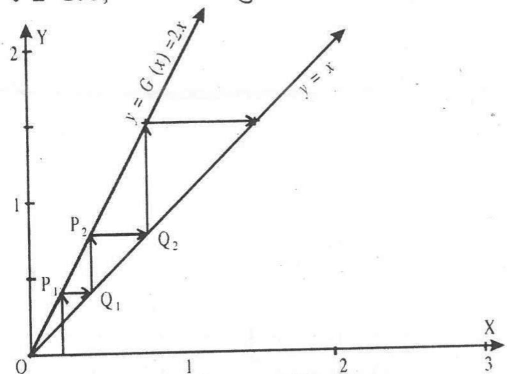
ટેબલ 10.1.1 અને આકૃતિ 10.1.1 માંથી જોઈ શકાશે કે, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ થશે.

આથી $p = 0$ એ F નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ ગણાય.

(2) ધારો કે, $x_{n+1} = 2x_n = G(x_n)$ છે. આથી , $G(x) = 2x$ છે અને $G(p) = p$ હોઈ, $p = 0$ સ્થિર બિંદુ છે. ટેબલ 10.1.2 અને આકૃતિ 10.1.2માંથી જોઈ શકાશે કે જેમ nની કિંમત વધતી જાય છે તેમ તેમ x_n ની કિંમત પણ વધતી જાય છે. સ્થિરબિંદુ 0ની નજીક x_n ની કિંમત આવતી નથી. આપણે $x_0 = 0.2$ જે 0 ની નજીક છે ત્યાંથી શરૂ કર્યું, પણ જેમ જેમ n ની કિંમત વધતી જાય તેમ તેમ x_n , 0 થી દૂર જાય છે. આથી સ્થિરબિંદુ 0, પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ તરીકે ઓળખાય છે. આ બનવાનું કારણ Gનો ઢાળ છે. ઢાળ 2 હોઈ, દરેક વખતે ગુણાકાર મોટો થતો જાય છે.

ટેબલ 10.1.2

n	x
0	0.2
1	0.4
2	0.8
3	1.6
4	3.2



આકૃતિ 10.1.2

$I = (a, b)$ માંથી કોઈપણ x_0 લઈને $x_{n+1} = f(A, x_n) = f(x_n)$ ગણતાં જો $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ હોય, જ્યાં $F(p) = p$ છે, તો pને f નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ કહેવામાં આવે છે.

$I = (a, b)$ માંથી કોઈપણ x_0 લઈને $x_{n+1} = f(A, x_n) = f(x_n)$ ગણતાં જો ભ્રમણકક્ષાની શ્રેણીનાં બિંદુઓ x_n , સ્થિરબિંદુ p થી દૂર જાય, તો સ્થિરબિંદુ p એ f નું પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ કહેવાય.

$G(x) = 2x$ નું સ્થિરબિંદુ $p = 0$ એ G નું પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે, જ્યારે $F(x) = \frac{1}{2}x$ નું સ્થિરબિંદુ $p = 0$ એ F નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે.

દરેક વખતે ટેબલ અને આલેખથી સ્થિરબિંદુ આકર્ષક કે પ્રત્યાર્ષક છે તે નક્કી કરવાનું વધારે કામ માગે છે, આથી આપણે સરળ રસ્તો શોધીએ. ધારો કે , p એ f નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે. આથી $f(p) = p$ છે. p એ f નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોઈ, n ની મોટી કિંમતો માટે x_n ને pની ઘણી નજીક ગણી શકાય. આ કારણે $f(x_n)$ ની આશરે કિંમત $(p, f(p))$ માંથી પસાર થતી સ્પર્શક રેખાથી મેળવી શકાય, કારણ કે x_n અને p ખૂબ જ નજીકનાં બિંદુઓ છે. આથી,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(x_n) \\
&\approx f(p) + f'(p)(x_n - p) \\
&= p + f'(p)(x_n - p) \\
\therefore x_{n+1} - p &= f'(p)(x_n - p)
\end{aligned}
$$

p એ f નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોઈ, $|x_{n+1} - p| < |x_n - p|$ હોવું જરૂરી છે. જો $|f'(p)| < 1$ હોય તો જ આ બની શકે. આથી જો p એ f નું આકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોય તો $|f'(p)| < 1$ હોય. જો $|f'(p)| > 1$ હોય, તો $|x_{n+1} - p|$ અને $|x_n - p|$ વચ્ચેનું અંતર વધતું જશે. આથી p એ f નું પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ બનશે.

જો $|f'(p)| = 1$ હોય તો p એ f નું તટસ્થ સ્થિર બિંદુ છે. આવા સ્થિર બિંદુઓએ ભ્રમણકક્ષાના x_n નું શું થશે તે દરેકદરેક કિસ્સાઓમાં બરાબર તપાસવું પડે.

ઉદાહરણ 1 : લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $f(x) = Ax(1-x)$ નાં સ્થિરબિંદુઓ $p = 0$ અને $p = 1 - \frac{1}{A}$ છે. f નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $f'(x) = A(1-2x)$ મળે.

(a) $p = 0$ સ્થિરબિંદુએ $f'(0) = A$ થાય. $p = 0$ સ્થિરબિંદુ આકર્ષક હોવા માટે $|f'(0)| = |A| < 1$ જરૂરી છે. આથી જો $0 < A < 1$ હોય, તો ભ્રમણકક્ષાની x_n કિંમતો સ્થિરબિંદુ $p = 0$ ના સાનિધ્યમાં આવશે. પ્રકરણ 9માં આકૃતિ 9.0.1માં $0 < A < 1$ માટે સ્થિરબિંદુ $x = 0$ છે.

(b) $p = 1 - \frac{1}{A}$ સ્થિરબિંદુએ

$$\left|f'(1-\frac{1}{A})\right| = \left|A(1-2(1-\frac{1}{A}))\right| = |-A+2| \text{ થાય.}$$

$p = 1 - \frac{1}{A}$ સ્થિરબિંદુ આકર્ષક હોવા માટે $\left|f'(1-\frac{1}{A})\right| = |-A+2| < 1$

હોય. આથી જો $1 < A < 3$ હોય તો $p = 1 - \frac{1}{A}$ આકર્ષક બિંદુ બને અને $p = 0$ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ બને. આ આપણે પ્રકરણ 9ના ટેબલ 9.2.1 માં પણ જોઈ શકીશું. પ્રકરણ 9, આકૃતિ 9.0.1માં $1 < A < 3$ માટે $x = 1 - \frac{1}{A}$ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે.

જો $A > 3$ હોય, તો $p = 0$ અને $p = 1 - \frac{1}{A}$ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે.

સ્વાધ્યાય 10.1

(1) નીચેના સમીકરણનાં સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓ શોધો અને સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓનું વર્ગીકરણ કરો.

(a) $f(x) = 2x^2 + 5x$ (b) $f(x) = x^3 + 2x$ (c) $f(x) = \frac{3x - x^3}{2}$

(2) નીચેના સમીકરણનાં સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓ શોધો અને Aની કઈ કઈ કિંમતો માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુ કે સ્થિરબિંદુઓ છે તે કિંમતો મેળવો.

(a) $x_{n+1} = A - x_n^2$ (b) $x_{n+1} = x_n^3 - Ax_n$

(c) $x_{n+1} = x_n^3 + Ax_n$ (d) $x_{n+1} = A\sin(\pi x_n)$

(e) $x_{n+1} = \dfrac{Ax_n}{1+x_n^2}$ (f) $x_{n+1} = A\ln x_n$

10.2 બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ

$A = 3$ માટે $f'(p) = f'(1-\frac{1}{A}) = 2 - A = -1$ થાય.

આથી, $p = 1 - \frac{1}{A} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ તટસ્થ સ્થિરબિંદુ છે. $1 < A < 3$ માટે $p = 1 - \frac{1}{A}$ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે અને $A > 3$ થતાં $p = 0$ અને $p = 1 - \frac{1}{A}$ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ બને છે.

આપણે પ્રકરણ 9માં, 9.2 માં જોયેલું કે $3 < A < 1 + \sqrt{6}$ માટે ભ્રમણકક્ષા બે કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. ધારો કે ભ્રમણકક્ષા x_1^* અને x_2^* વચ્ચે ફર્યા કરે છે. આથી,

$$x_2^* = f(x_1^*)$$

$$x_1^* = f(x_2^*) = f(f(x_1^*)) = (f \circ f)(x_1^*) \qquad ...(10.2.1)$$

આ જ રીતે,

$$x_2^* = f(x_1^*) = f(f(x_2^*)) = (f \circ f)(x_2^*) \qquad ...(10.2.2)$$

સમીકરણો (10.2.1) અને (10.2.2) માંથી જોઈ શકાશે કે x_1^* અને x_2^* બન્ને $f \circ f$ નાં સ્થિર બિંદુઓ છે. આપણે અનુકૂળતા માટે $f \circ f$ ને f_2 થી દર્શાવીશું. આથી,

$$f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)).$$

ઉદાહરણ 1 : $f_2(x) = f(f(x))$ નાં સ્થિરબિંદુઓ શોધો જ્યાં $f(x) = Ax(1-x)$ લૉજિસ્ટીક સમીકરણ છે.

આપણે $f_2(x) = f(f(x)) = f(Ax(1-x))$

$$= A(Ax(1-x))(1 - Ax(1-x)) = x \qquad ...(10.2.3)$$

સમીકરણના ઉકેલો મેળવવાના છે.

ધારો કે, p એ f નું સ્થિરબિંદુ છે, આથી $f(p) = p$ છે. $f_2(p) = f(f(p)) = f(p) = p$, આથી p એ f_2 નું પણ સ્થિરબિંદુ છે. આથી (10.2.3)ના ઉકેલોમાં f ના સ્થિરબિંદુઓ $x = 0$ અને $x = 1 - \frac{1}{A}$ પણ છે. આનો ઉપયોગ કરીને (10.2.3) લખતાં,

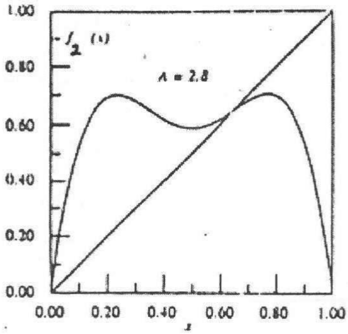
$$-x[Ax - A + 1][A^2x^2 - x(A^2 + A) + (A+1)] = 0. \qquad ...(10.2.4)$$

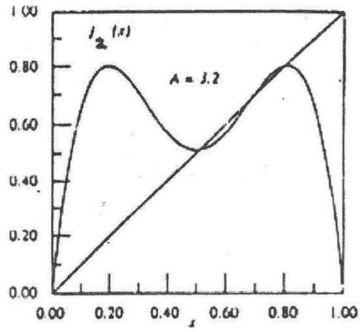
દ્વિઘાતી સમીકરણ $A^2x^2 - (A^2 + A)x + (A+1) = 0$ ના ઉકેલો આપણને બાકીનાં બે સ્થિરબિંદુઓ

$$x_1^* = \frac{(A+1) + \sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A}, \; x_2^* = \frac{(A+1) - \sqrt{(A+1)(A-3)}}{2A} \qquad (10.2.5)$$

આપશે. વર્ગમૂળ નીચેની રકમ $(A+1)(A-3)$ આપણને વાસ્તવિક ઉકેલો માટેની શરત $A \geq 3$ આપે છે.

આકૃતિ 10.2.1 માં A = 2.8 અને 3.2 માટેના f_2 ના આલેખો આપેલા છે. A = 2.8 ના f_2 ના આલેખને રેખા $y = x$ ફક્ત બે બિંદુઓમાં છેદે છે કારણ કે, x_1^* અને x_2^* વાસ્તવિક નથી. જ્યારે, A = 3.2ના આલેખને રેખા $y = x$ ચાર બિંદુએ છેદે છે. $x = 0$ અને $x = 1 - \frac{1}{A} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{11}{16}$ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે. સમીકરણ (10.2.5)માં A = 3.2 મૂકતાં આપણને $x_1^* = 0.5130$ અને $x_2^* = 0.7994$ મળશે, જે આપણને ટેબલ 9.2.2માં પણ જોવા મળે છે. 0.5130 અને 0.7994, $A = 3.2$ માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે.





આકૃતિ 10.2.1

રેખા $y = x$ અને $f_2(x) = f(f(x))$, જ્યાં $f(x) = Ax(1-x)$ ના Aની જુદીજુદી કિંમતોના આલેખો : (a) $A = 2.8$ અને (b) $A = 3.2$

આપણાં બે સ્થિરબિંદુઓ x_1^* અને x_2^* ક્યાં સુધી આકર્ષક રહેશે તે મેળવવા માટે $f_2'(x_1^*)$ અને $f_2'(x_2^*)$ ની કિંમતો મેળવવી પડશે.

વિકલનના સાંકળના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં

$$f_2'(x) = \frac{d}{dx}[f(f(x))] = f'(f(x))f'(x) \qquad ...(10.2.6)$$

મળશે. સમીકરણ (10.2.6)માં x_1^* મૂકતાં

$$f_2'(x_1^*) = f'(f(x_1^*))f'(x_1^*) = f'(x_2^*)f'(x_1^*) \qquad ...(10.2.7)$$

મળશે. તે જ રીતે સમીકરણ (10.2.6)માં x_2^* મૂકતાં,

$$f_2'(x_2^*) = f'(f(x_2^*))f'(x_2^*) = f'(x_1^*)f'(x_2^*) = f_2'(x_1^*) \qquad ...(10.2.8)$$

થશે. f_2 ના વિકલનની કિંમત સ્થિરબિંદુઓ x_1^* અને x_2^* એ સરખી જ છે. આ કારણે આપણે કહી શકીએ કે બંને સ્થિરબિંદુઓ આકર્ષક કે પ્રત્યાકર્ષક છે. x_1^* અને x_2^* સ્થિરબિંદુઓ ભ્રમણકક્ષા બનાવે છે અને આકર્ષકતાએ ભ્રમણકક્ષાનો ગુણધર્મ છે; એ

ફક્ત થોડાક સ્થિરબિંદુઓનો નહિ.

જો $|f_2'(x_1^*)| = |f_2'(x_2^*)| = |f_2'(x_1^*)f_2'(x_2^*)| < 1$ હોય, તો x_1^* અને x_2^* આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ અને જો $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)| > 1$ હોય, તો x_1^* અને x_2^* પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે.

$$f_2'(x_1^*) = f_2'(x_2^*) = f'(x_1^*)f'(x_2^*)$$

$$= A(1-2x_1^*)A(1-2x_2^*)$$

$$= A^2\{1-2(x_1^*+x_2^*)+4x_1^*x_2^*\}$$

$$= A^2\left\{1-\frac{2(A+1)}{A}+\frac{4(A+1)}{A^2}\right\} \text{ (સમીકરણ 10.2.5)}$$

$$= -A^2+2A+4 = F(A) \qquad (10.2.9)$$

$F'(A) = 2(1-A)$ હોઈને, $A > 1$ માટે $F'(A) < 0$ છે. આથી $F(A)$ એ A નું ઘટતું વિધેય છે. $A = 3$ માટે $f'(x_1^*) = f'(x_2^*) = 1$ છે. Aની કિંમતો જેમ જેમ વધતી જશે, તેમ તેમ $F(A) = f_2'(x_2^*) = f_2'(x_1^*)$ ની કિંમતો ઘટતી જશે અને જ્યારે $f_2'(x_1^*) = f_2'(x_2^*) = -1$ થશે ત્યારે x_1^* અને x_2^* તટસ્થ બિંદુઓ બનશે. સમીકરણ (10.2.9)માં $f_2'(x_2^*) = f_2'(x_1^*) = -1$ લેતાં આપણને સમીકરણ $A^2-2A-5=0$ મળશે. આ દ્વિઘાતી સમીકરણના ઉકેલો $A = \frac{2+\sqrt{24}}{2} = 1+\sqrt{6}$ અને $1-\sqrt{6}$ છે. આથી $3 < A < 1+\sqrt{6}$ માટે x_1^* અને x_2^* આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે, જે આપણે પ્રકરણ 9, આકૃતિ 9.0.1માં પણ જોઈ શકીશું. જ્યારે $A > 1+\sqrt{6}$ થશે ત્યારે x_1^* અને x_2^* પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ બનશે અને x_1^* નું વિભાજન થઈને એક સ્થિરબિંદુમાંથી બે સ્થિરબિંદુઓ મળશે

અને તે જ રીતે x_2^* નું વિભાજન થઈને બે સ્થિરબિંદુઓ મળશે. f_2 ના આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓ x_1^* અને x_2^* નું વિભાજન બે બે સ્થિરબિંદુઓમાં એ રીતે થાય છે કે, જે રીતે f ના આકર્ષક સ્થિરબિંદુ $x^* = 1 - \frac{1}{A}$ નું વિભાજન થઈને આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ x_1^* અને x_2^* મળેલાં.

સ્વાધ્યાય 10.2

(1) જો p એ f નું સ્થિરબિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે p એ f_4 નું પણ સ્થિરબિંદુ છે.

(2) જો $f(x) = Ax - x^3$ હોય અને $x_1^* = f(x_2^*)$ અને $x_2^* = f(x_1^*)$ હોય તો સાબિત કરો કે x_1^* અને x_2^* સમીકરણ

$x(x^2 - A + 1)(x^2 - A - 1)(x^4 - Ax^2 + 1) = 0$ ના ઉકેલો છે.

સ્થિરબિંદુઓ x_1^* અને x_2^*, Aની કઈ કિંમતો માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ હશે?

(3) જો $f(x) = Ax + x^3$ હોય અને $x_1^* = f(x_2^*)$ અને $x_2^* = f(x_1^*)$ હોય તો સાબિત કરો કે x_1^* અને x_2^* સમીકરણ

$x(x^2 + A + 1)(x^2 + A - 1)(x^4 + Ax^2 + 1) = 0$ ના ઉકેલો છે.

x_1^* અને x_2^* ની કિંમત શોધો. સ્થિર બિંદુઓ x_1^* અને x_2^*, Aની કઈ કિંમતો માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ હશે ?

(4) જો $f(x) = A - x^2$ હોય અને $x_1^* = f(x_2^*)$ અને $x_2^* = f(x_1^*)$ હોય તો x_1^* અને x_2^* ની કિંમતો શોધો. સ્થિરબિંદુઓ x_1^* અને x_2^*, Aની કઈ કિંમતો માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ હશે ?

(5) સમીકરણ (10.2.9) મેળવો એટલે કે સાબિત કરો કે,

$$f_2'(x_1^*) = f_2'(x_2^*) = 4 + 2A - A^2 \text{ છે.}$$

10.3 દરેક વખતે બમણાં થતાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ

બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનાં ચાર આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ થયાં. જો, $1+\sqrt{6} < A < 3.544$ હોય, તો xની ભ્રમણકક્ષા x_1^*, x_2^*, x_3^* અને x_4^* ચાર કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરશે. આથી,

$$x_1^* = f(x_2^*), \qquad x_2^* = f(x_3^*),$$
$$x_3^* = f(x_4^*), \qquad x_4^* = f(x_1^*). \tag{10.3.1}$$

સમીકરણ (10.3.1)નો ઉપયોગ કરતાં

$$x_1^* = f(x_2^*) = f(f(x_3^*)) = f(f(f(x_4^*))) = f(f(f(f(x_1^*))))$$
$$= f_4(x_1^*) = (f \circ f \circ f \circ f)(x_1^*) \tag{10.3.2}$$

મળે. આથી x_1^* એ f_4 નું સ્થિરબિંદુ છે. એ જ રીતે જોઈ શકાશે કે x_2^*, x_3^* અને x_4^* પણ f_4 ના સ્થિરબિંદુઓ છે. x_1^*, x_2^*, x_3^* અને x_4^*ની કિંમતો મેળવવા માટે આપણે સમીકરણ $f_4(x) = x$ ના ઉકેલો મેળવવા પડશે. $f(x) = Ax(1-x)$ હોઈ, $f_4(x) - x = 0$ સમીકરણ, $2^4 = 16$ ઘાતી છે. f અને f_2 ના સ્થિરબિંદુઓ, f_4 નાં સ્થિરબિંદુઓ હોઈને આ બાદ કરતાં આપણને 12 ઘાતી સમીકરણ મળશે. આના ઉકેલ માટે કોઈ સૂત્ર નથી. આથી $1+\sqrt{6} < A < 3.544$ માટે કમ્પ્યૂટરની મદદથી ભ્રમણકક્ષા મેળવવાની રહેશે. પ્રકરણ 9, ટેબલ 9.2.3માં આપેલ પ્રમાણે $3.5441 < A < 3.5644$ લેતાં, આઠ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ મળશે. આ રીતે Aની યોગ્ય રીતે કિંમતો વધારતાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ બમણાં થતાં જશે.

સ્વાધ્યાય 10.3

(1) સમીકરણ (10.3.1)માં આપેલ x_2^* એ f_4 નું સ્થિરબિંદુ છે તે સાબિત કરો.

(2) સાબિત કરો કે $f_4'(x_1^*) = f_4'(x_2^*) = f_4'(x_3^*) = f_4'(x_4^*)$

$$= f'(x_1^*)f'(x_2^*)f'(x_3^*)f'(x_4^*).$$

(3) જો p અને q, f_2 નાં સ્થિરબિંદુઓ હોય, તો સાબિત કરો કે p અને q, f_4 નાં પણ સ્થિરબિંદુઓ છે.

10.4 સ્પર્શક વિભાજન

આપણે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં વિભાજન થતું જોયું. હવે આ વિભાગમાં સ્પર્શક વિભાજન જોઈશું.

$F(x) = x^2 + c$, જ્યાં c પ્રચલ છે, ના સ્થિરબિંદુઓ શોધવા માટે સમીકરણ

$$x^2 + c = x \qquad (10.4.1)$$

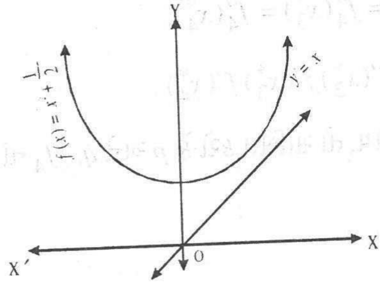
ના ઉકેલ મેળવવા જોઈએ. આ દ્વિઘાતી સમીકરણ હોઈ, તેના ઉકેલો

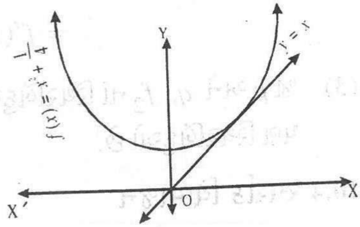
$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}, \quad x_- = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2} \qquad (10.4.2)$$

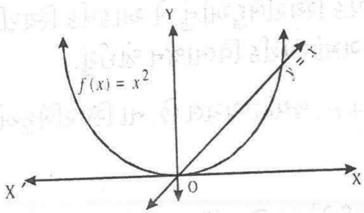
મળે. જો $1-4c \geq 0$ અથવા $c \leq \frac{1}{4}$ હોય, તો જ આપણને વાસ્તવિક ઉકેલ મળે.

આકૃતિ 10.4.1 (a), (b), અને (c) માં $F(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ અને $F(x) = x^2$ અનુક્રમે અને રેખા $y = x$ ના આલેખો આપેલા છે.

(a) $c = \frac{1}{2}$ હોઈ, વાસ્તવિક ઉકેલ ન હોઈ સ્થિરબિંદુઓ નથી. રેખા $y = x$ અને $y = F(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ એકબીજાને છેદતાં નથી. $F(x) - x = x^2 - x + \frac{1}{2}$ $= x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0$ ના વાસ્તવિક ઉકેલો નથી.







આકૃતિ 10.4.1

(b) $c = 1/4$ હોઈ, ફક્ત એક જ ઉકેલ હોઈ એક જ સ્થિરબિંદુ મળે છે અને આથી, $y = x$, $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ નો $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ બિંદુએ સ્પર્શક બને છે.

$$F(x) - x = x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2. \tag{10.4.3}$$

ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. આથી રેખા $y = x$, $F(x) = x^2 + c$ ને સ્પર્શક હોવા માટે $F(x) - x$ ને $(x - \frac{1}{2})^2$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાવા જોઈએ.

(c) $c = 0$ હોઈ, $x_+ = 1$, $x_- = 0$ હોઈને બે સ્થિરબિંદુઓ (0, 0) અને (1, 1) મળે છે. રેખા $y = x$, $F(x) = x^2$ ને $(0, 0)$ અને $(1, 1)$ બિંદુઓએ છેદે છે. $F(x) - x = x^2 - x = x(x - 1) = 0$ ના બે ઉકેલ મળે છે.

$$F(x) = x^2,\ F'(x) = 2x \tag{10.4.4}$$

મળે. આથી $F'(0) = 0 < 1$ અને $F'(1) = 2 > 1$ થશે. આથી $(0, 0)$ સ્થિરબિંદુ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે અને $(1, 1)$ સ્થિરબિંદુ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે.

$c = 1/4$ માટે $x_+ = x_- = 1/2$ થાય આથી $F'(1/2) = 1$ છે. આ સ્થિરબિંદુ $(1/2, 1/2)$ એ તટસ્થ સ્થિરબિંદુ છે, જ્યારે

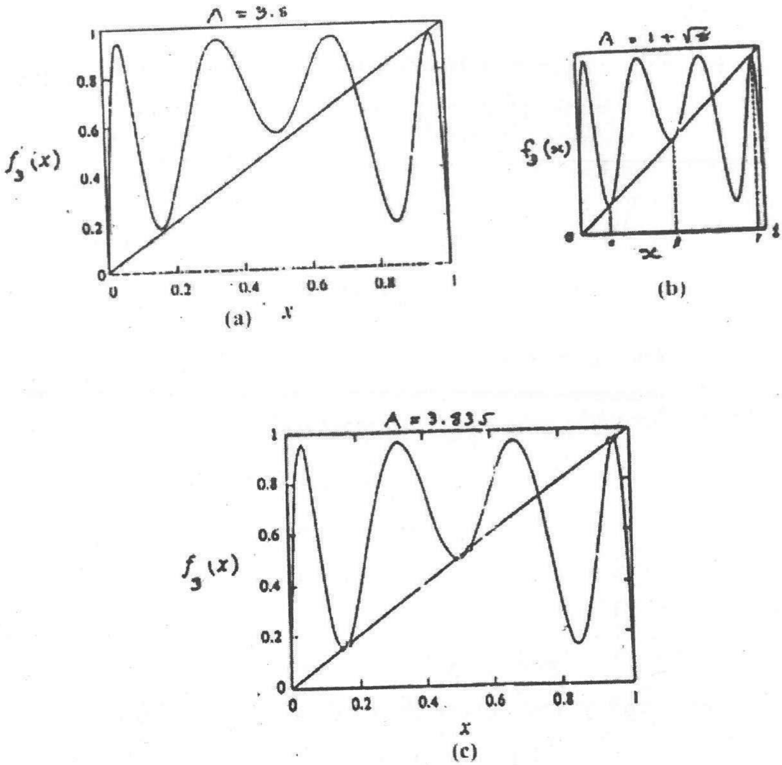
$$F'(x_+) = 1 + \sqrt{1-4c} \text{ અને } F'(x_-) = 1 - \sqrt{1-4c} \tag{10.4.5}$$

થશે. જો $c < 1/4$ હોય, તો $|F'(x_+)| > 1$ અને જો $-3/4 < c < 1/4$ હોય, તો $|F'(x_-)| < 1$ આથી $-3/4 < c < 1/4$ માટે x_+ એ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે અને x_- એ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે. આ રીતે $c = 1/4$ હોય, તો $F(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ને ફક્ત એક જ તટસ્થ બિંદુ છે અને cની કિંમત ઘટાડતાં જો $-3/4 < c < 1/4$ હોય, તો $F(x) = x^2 + c$ ને એક આકર્ષક સ્થિરબિંદુ અને એક પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોય છે. આથી $c = 1/4$ ના તટસ્થ સ્થિરબિંદુનું c ની કિંમત ઘટાડતાં એક આકર્ષક સ્થિરબિંદુ અને બીજા પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુમાં વિભાજન થાય છે. આ જાતના વિભાજનને સ્પર્શક વિભાજન તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

સ્પર્શક વિભાજન માટે $f'(p) = 1$ જ્યાં $f(p) = p$ છે અને વિભાજન આકર્ષક સ્થિરબિંદુ અને પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુમાં થાય છે જ્યારે બમણા થતા વિભાજન માટે $f'(p) = -1$ જ્યાં $f(p) = p$ છે અને વિભાજનનાં બંને સ્થિરબિંદુઓ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે.

પ્રકરણ 9માં આકૃતિ 9.2.6માં બમણા થતા આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ પછી મોટામાં મોટી સફેદ બારી કે જેમાં ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે તે ક્યાંથી આવી પડ્યાં તે એક મોટું રહસ્ય છે. આ આકર્ષક ત્રણ સ્થિરબિંદુઓના જન્મ વિષે સમજવા માટે આપણે $f_3 = f(f(f(x)))$ ને રેખા $y = x$ કયા બિંદુએ સ્પર્શક બને તે જાણવું પડશે અને પછી આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ શોધવાં પડશે. આ શોધતાં પહેલાં આપણે $f_3(x)$ના

આકૃતિ 10.4.2માં (a) $A = 3.8$ (b) $A = 1+\sqrt{8} \approx 3.8284$ અને (c) $= 3.835$ના આલેખો જોઈએ.



આકૃતિ 10.4.2

રેખા $y = x$ અને $f_3(x) = f(f(f(x)))$ જ્યાં $f(x) = Ax(1-x)$ ના જુદી જુદી કિંમતોના આલેખો : (a) $A = 3.8$

(b) $A = 1+\sqrt{8} \approx 3.8284$

(c) $A = 3.835$

(a) રેખા $y = x$ અને $f_3(x)$ એકબીજાને બે પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં છેદે છે જે f નાં પણ પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે.

(b) રેખા $y = x$, $f_3(x)$ ના આલેખને ત્રણ જગ્યાએ સ્પર્શે છે. જે બિંદુઓએ રેખા સ્પર્શક બને છે તેના x-યામની કિંમતો ધારો કે α, β અને γ છે. આપણે જાણીએ છીએ કે fના સ્થિરબિંદુઓ f_3 ના પણ સ્થિરબિંદુઓ છે, આથી સાદું રૂપ આપીને

$$f_3(x) - x = -x(Ax + 1 - A)\{A^6x^6 - (3A^6 + A^5)x^5$$

$$+(3A^6 + A^5 + A^4)x^4 - (A^6 + 5A^5 + 3A^4 + A^3)x^3$$

$$+(2A^5 + 3A^4 + 3A^3 + A^2)x^2 - (A^4 + 2A^3 + 2A^2 + A)x$$

$$+(A^2 + A + 1)\} \qquad (10.4.6)$$

લખી શકાય (સ્વાધ્યાય 10.4, (2)). $x = \alpha, \beta$ અને γ માટે રેખા $y = x$ સ્પર્શક હોવા માટે સમીકરણ (10.4.3)ના કારણે $f(x) - x$ ના અવયવો $(x-\alpha)^2(y-\beta)^2(x-\gamma)^2$ હોવા જોઈએ. આથી

$$A^6x^6 - (3A^6 + A^5)x^5 + (3A^6 + A^5 + A^4)x^4$$

$$-(A^6 + 5A^5 + 3A^4 + A^3)x^3 + (2A^5 + 3A^4 + 3A^3 + A^2)x^2$$

$$-(A^4 + 2A^3 + 2A^2 + A)x + (A^2 + A + 1)$$

$$= A^6(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$$

$$= A^6(x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma)^2$$

$$= A^6(x^3 - Cx^2 + Dx - E)^2 \qquad (10.4.7)$$

જ્યાં, $C = \alpha + \beta + \gamma$, $D = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, અને $E = \alpha\beta\gamma$ છે. સમીકરણ (10.4.7)નું સાદું રૂપ આપીને xના સહગુણાંક સરખાવતાં C, D અને E નાં છ સમીકરણો મળશે. આ છ સમીકરણોમાંથી ગમે તે ત્રણ સમીકરણોમાંથી C, D અને E

ની કિંમતો A માં સરળતાથી મેળવ્યા પછી બાકીના ત્રણ સમીકરણોમાં C, D અને E ની કિંમતો A માં મૂકતાં ત્રણ સમીકરણો Aમાં મળશે. આ સમીકરણોના અવયવો પાડતાં A^2-2A-7 સામાન્ય અવયવ ત્રણ સમીકરણોમાં મળશે અને આથી, $A^2-2A-7=0$ છે. જેનાં બીજ $A=1+\sqrt{8}$ અને $A=1-\sqrt{8}$ છે. આથી, $A=1+\sqrt{8}$ માટે રેખા $y=x$, $f_3(x)$ને સ્પર્શક બનશે. C, D, અને E ના સમીકરણોમાં $A=1+\sqrt{8}$ મૂકતાં, આપણને α, β, અને γ ના ત્રણ સમીકરણો મળશે. આ સમીકરણોના ઉકેલ $\alpha = 0.1599$, $\beta=0.5143$ અને $\gamma=.9563$ મળશે. આ આકૃતિ 10.4.2(b) માં બતાવેલું છે. આ સ્પર્શક વિભાજન છે.

(c) Aની કિંમત વધારતાં અને $A = 3.835$ લેતાં આકૃતિ 10.4.2 (c)માં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખા $y = x$, $y = f_3(x)$ને આઠ જગ્યાએ છેદે છે. તેમાં બે પ્રત્યાર્ષક સ્થિરબિંદુઓ f નાં છે જેના x-યામ $x = 0$ અને $x = 1 - 1/A$ છે. બાકીનાં છ સ્થિરબિંદુઓ માટે કોઈ સૂત્ર નથી. આ છ સ્થિરબિંદુઓમાં ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ છે, જ્યાં $|f_3'(x)|<1$ જે કાળા ટપકાથી આકૃતિ 10.4.2 (c) માં દર્શાવેલ છે અને ત્રણ પ્રત્યાકર્ષક બિંદુઓ જ્યાં $|f_3'(x)|>1$ જે વર્તુલથી દર્શાવેલ છે. Aની કિંમત વધતાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુએ $f_3'(x)=-1$ થશે અને ત્રણે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન થઈને છ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ થશે જે પ્રકરણ 9, આકૃતિ 9.2.7માં સરળતાથી જોઈ શકાય છે. આ રીતે Aની કિંમતો વધારતાં દરેક બમણાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ મળશે.

સ્વાધ્યાય 10.4

(1) (a) A ની કઈ કિંમતો માટે $y=x$, $f(x)=Ae^x$ને છેદશે નહિ? Aની મેળવેલી કિંમતોમાંથી કોઈપણ એક કિંમત લઈને $y=x$ અને $y=Ae^x$ ના આલેખો દોરો.

(b) A ની કઈ કિંમતો માટે $y=x$, $f(x)=Ae^x$ને સ્પર્શશે ? જે બિંદુએ રેખા $y=x$, $f(x)=Ae^x$નો સ્પર્શક બને તે બિંદુના યામો શોધો.

(c) A ની કઈ કિંમતો માટે રેખા $y = x$, $f(x) = Ae^x$ ને બે બિંદુઓમાં છેદશે? A ની મેળવેલી કિંમતોમાંની કોઈ પણ એક કિંમત લઈને રેખા $y = x$ અને $f(x) = Ae^x$ ના આલેખો દોરો.

(2) $f_3(x) - x$ ને સમીકરણ (10.4.6) ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

(3) સમીકરણ (10.4.7)નું સાદું રૂપ આપીને xના સહગુણાંક સરખાવીને છ સમીકરણો મેળવો.

(4) પ્રશ્ન (3)માં મેળવેલ સમીકરણોમાંથી $C, D,$ અને E ની કિંમતો A માં મેળવો.

(5) પ્રશ્ન (4) માં મેળવેલ $C, D,$ અને Eની કિંમતો બાકીનાં ત્રણ સમીકરણોમાં મૂકીને અને અવયવો પાડીને $A^2 - 2A - 7$ ને ત્રણે સમીકરણોમાં સામાન્ય અવયવ તરીકે મેળવો.

(6) $A = 1 + \sqrt{8}$ પ્રશ્ન(4)માં મૂકીને $C, D,$ અને Eની કિંમતો મેળવો. આ કિંમતો વાપરીને α, β, અને γ મેળવો.

10.5 લિયાપુનોવ દર્શક

નિર્ણાયકત્વ પદ્ધતિથી ગણાતા લાંબા ગાળાના ઉકેલો અમુદતી હોય અને એ ક્યાંથી શરૂ થાય તેના ઉપર ખૂબ જ આધારિત હોય તેવા ઉકેલોને સામાન્ય રીતે અંધાધૂંધી (કેઑસ) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ક્યાંથી શરૂ થાય તે ઉપર અંધાધૂંધી આધારિત હોઈ, આનો ઉપયોગ કરીને અંધાધૂધી સરળતાથી ઓળખી શકાય. આપણે બે ભ્રમણકક્ષાઓ એકબીજાની તદ્દન નજીકથી શરૂ થતી લઈએ અને પછી સરેરાશ t સમયે તે એકબીજાની નજીકમાં હોય તો ભ્રમણકક્ષાઓ ક્યાંથી શરૂ થાય છે તેના ઉપર આધારિત નથી, પણ જો સરેરાશ t સમયે બંને ભ્રમણકક્ષાઓ એકબીજાથી દૂર હોય તો ભ્રમણકક્ષાઓ ક્યાંથી શરૂ થાય છે તે અગત્યનું બને, અને આથી આ ઉકેલોને કે ભ્રમણકક્ષાને અંધાધૂંધી કહીશું.

$t = 0$ સમયે બે ભ્રમણકક્ષાઓ એકબીજાથી δ_0 અંતરે શરૂ થાય છે અને t સમયે ધારો કે, બંને ભ્રમણકક્ષાઓ એક બીજાથી $\delta(t)$ અંતરે દૂર છે અને

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t} \tag{10.5.1}$$

છે. આ સમીકરણમાં λને લિયાપુનોવ દર્શક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. જો $\lambda > 0$ હોય તો જેમ જેમ સમય જતો જશે તેમ તેમ δ ની કિંમત વધતી જશે. આથી જો $\lambda > 0$ હોય તો ભ્રમણકક્ષાને અંધાધૂંધીવાળી ભ્રમણકક્ષા કહીશું. આ જ વિચાર આપણે લૉજિસ્ટીક સમીકરણોના ઉકેલો માટે નીચે પ્રમાણે વાપરીશું.

ધારો કે,

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = f(x_n) \tag{10.5.2}$$

છે, આપેલા A માટે x_0 થી શરૂ થતી ભ્રમણકક્ષા અંધાધૂંધીવાળી છે કે નહિ તે જાણવા માટે તે જ A માટે બીજી ભ્રમણકક્ષા $x_0 + \delta_0$, જ્યાં δ_0 ખૂબ જ નાની સંખ્યા છે તેનાથી શરૂ કરીએ. ત્રણ વખત ગણતાં,

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0) = f_2(x_0),$$

$$x_3 = f(x_2) = f(f(f(x))) = (f \circ f \circ f)(x) = f_3(x_0) \tag{10.5.3}$$

આ જ રીતે N વખત ગણતાં,

$x_N = f_N(x_0)$ થશે. $x_0 + \delta_0$ થી શરૂ કરીને N વખત ગણતાં $f_N(x_0 + \delta_0)$ થશે. આ બંને વચ્ચેના તફાવતને δ_N (> 0) વડે દર્શાવતાં,

$\delta_N = | f_N(x_0 + \delta_0) - f_N(x_0) | = \delta_0 e^{N\lambda}$ થશે.

અહીંયાં t ના બદલે N છે.

$$\therefore e^{N\lambda} = \frac{| f_N(x_0 + \delta_0) - f_N(x_0) |}{\delta_0}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{| f_N(x_0 + \delta_0) - f_N(x_0) |}{\delta_0} \tag{10.5.4}$$

જ્યાં δ_0 ખૂબ જ નાની સંખ્યા છે.

જો $\delta_0 \to 0$ હોય, તો

$$\lim_{\delta_0 \to 0} \frac{|f_N(x_0+\delta_0) - f_N(x_0)|}{\delta_0} = |f_N'(x_0)| \tag{10.5.5}$$

$$f_2'(x_0) = (f \circ f)'(x_0) = \frac{d}{dx}[f(f(x))]|_{x_0}$$

$$= f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0)$$

આ જ રીતે ગણતાં,

$$f_N'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{N-1}) = \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \tag{10.5.6}$$

સમીકરણ (10.5.4)માં, (10.5.5) અને (10.5.6)નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln |f_N'(x_0)|$$

$$= \frac{1}{N} \ln \prod_{i=0}^{N-1} |f'(x_i)|$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \tag{10.5.7}$$

ભ્રમણકક્ષાનાં બિંદુઓએ fના વિકલનના માનાંકની (absolute value) કિંમતના પ્રાકૃતિક લઘુગુણકની (natural logarithm) સરેરાશ કિંમત એ લિયાપુનોવ દર્શક છે. આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓએ $|f'(x_i)| < 1$ હોઈ, જે Aની કિંમતો માટે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ હશે તે દરેક A માટે $\lambda < 0$ છે કારણ કે $\ln|f'(x_i)| < 0$ છે. જો x_0 અને $x_0 + \delta_0$ થી શરૂ થતી બે ભ્રમણકક્ષાઓ એકબીજાથી દૂર હોય તો x_i પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોઈને $|f'(x_i)| > 1$ થશે અને આથી $\ln|f'(x_i)| > 0$ છે. આથી (10.5.7)માં $\lambda > 0$ છે. જો $\lambda > 0$ હોય, તો ભ્રમણકક્ષાનાં બિંદુઓ અંધાધૂંધીવાળાં

બિંદુઓ છે.

આપણે λની કિંમતો સમીકરણ (10.5.7)નો ઉપયોગ કરીને લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $f(x) = Ax(1-x)$ માટે નીચેની રીતે ગણીશું.

(1) A = 3.5 લઈએ.

(2) x_0 ની કિંમત (0, 1)માંથી ગમે તે કિંમત લઈએ.

(3) SUM = 0.0 લઈએ.

(4) $n = 0$થી 299 લઈને $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ નો ઉપયોગ કરીને x_1 થી x_{300} સુધીની કિંમતો ગણો.

(5) $n = 300$ થી 10,000 સુધી નીચે પ્રમાણે ગણો :

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$$

$$\text{SUM} = \text{SUM} + \ln|A(1-2x_{n+1})|$$

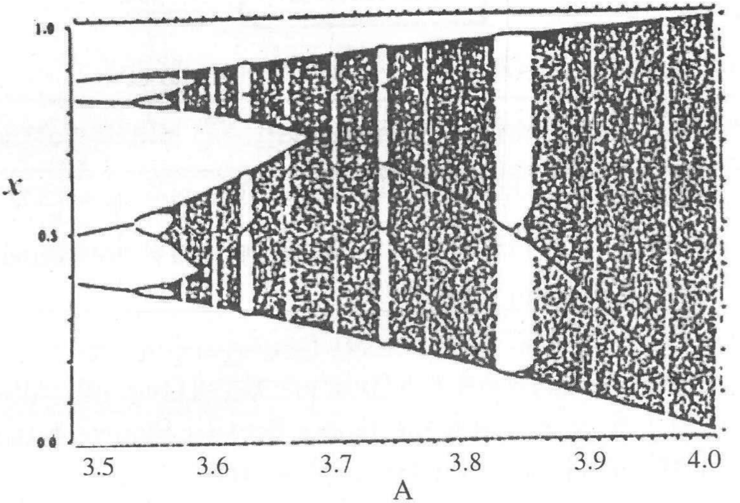
(6) $\lambda = \text{SUM}/9700$

(7) આ A અને λનો આલેખ દોરો.

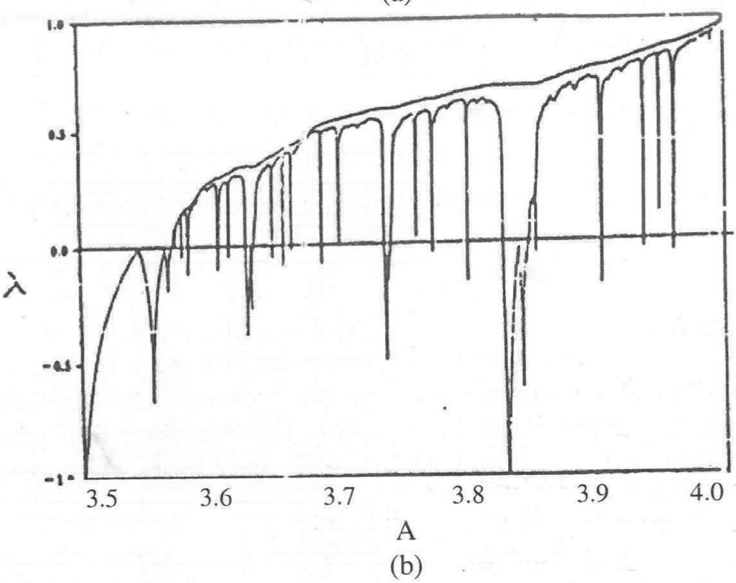
(8) $A = A + 0.1$ લઈ અને પગલા (2) થી ફરી શરૂ કરો. જો, $A > 4.1$ હોય, તો ગણવાનું પૂરું થયું.

A અને λનો આલેખ આકૃતિ 10.5.1 (b) ના જેવો હશે. સરખામણી માટે આકૃતિ 9.2.6 ફરીથી આકૃતિ 10.5.1. (a) માં આપી છે.

λની કિંમત $A < A_\infty = 3.57$ માટે ઋણ સંખ્યા છે. આકૃતિ 10.5.1 (b) માં $A =$ 3.58 માટે λ ની કિંમત પહેલી વખત શૂન્યથી વધુ બને છે. $A > 3.57$ માટે સામાન્ય રીતે લિયાપુનાવ દર્શક λ ની કિંમત સામાન્ય રીતે વધતી રહે છે, પણ જ્યાં જ્યાં આકૃતિ 10.5.1(a)માં સફેદ બારીઓ છે તે Aની કિંમતો માટે આકૃતિ 10.5.1 (b) માં λની ઋણ કિંમતો છે. સૌથી મોટી સફેદ બારી કે જ્યાં ત્રણ આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓ આકૃતિ 10.5.1(a) માં શરૂ થાય છે તે માટે, આકૃતિ 10.5.1(b) માં λ ની ઓછામાં ઓછી કિંમત છે.



(a)



(b)

આકૃતિ 10.5.1

સ્વાધ્યાય 10.5

(1) સમીકરણ $x_{n+1} = 3.2x_n(1 - x_n)$ નો લિયાપુનાવ દર્શક શોધો.

(2) સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n$ માટે લિયાપુનાવ દર્શક શોધો. A ની કઈ કિંમતો માટે ભ્રમણકક્ષા અંધાધૂંધીવાળી હશે ? Aની કોઈ એક કિંમત લઈને $x_0 = 0.33333$ અને $x_0 = 0.333333$ માટે બે ભ્રમણકક્ષાઓ મેળવો અને આ ભ્રમણકક્ષાઓના x કિંમતોના તફાવત તપાસો.

(3) આકૃતિ 10.5.1 (b) માં જ્યાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં થાય છે તે A ની કિંમતો માટે λની શી કિંમતો હશે ? સાબિત કરો કે જે A ની કિંમતો માટે આકર્ષક બિંદુઓનું વિભાજન આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં થાય તે A ની કિંમતો માટે $\lambda = 0$ છે.

(4) સમીકરણ $x_{n+1} = A\sin \pi x_n$, $0 \le x_0 \le 1$ અને $0 \le A \le 1$ માટે જુદી જુદી A ની કિંમતો માટે આકૃતિ 10.5.1 (b) ના જેવો લિયાપુનાવ દર્શકનો આલેખ મેળવો.

* * *

One gets a similar impression when making a drawing of a rising cumulus from a fixed point; the details change before the sketch can be completed. We realize thus that : big whirls have little whirls that feed on their velocity, and little whirls have lesser whirls and so on to viscocity ....

L. F. Richardson

(Weather Prediction by Numerical Process, p. 66)

પ્રકરણ 11

ફાઈગનબોમ (Feigenbaum) સંખ્યાઓ અને પ્રયોગો

11.0 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આગળનાં બે પ્રકરણોમાં લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$ ના ઉકેલો અને A અને ભ્રમણકક્ષા xના આલેખો મેળવેલા. આ પ્રકરણમાં આપણે $x_{n+1} = f(A, x_n)$ ના A અને ભ્રમણકક્ષા xના આલેખો ક્યારે સરખા જેવા હોય છે તે જોઈશું. લૉજિસ્ટીક સમીકરણના આલેખમાં $A = 3$ પછી જેમ જેમ Aની કિંમત વધે તેમ તેમ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન થાય છે તેના તફાવતો સમગુણોત્તર શ્રેણી (Geometric Series) હોઈને તેનો ગુણક δ અચળ સંખ્યા છે, તે જ પ્રમાણે ફાંટાઓની પહોળાઈનો તફાવત પણ સમગુણોત્તર શ્રેણી (Geometric Series) હોઈ, તેનો ગુણક α પણ અચળ સંખ્યા છે. અચળ સંખ્યાઓ δ અને α, ફાઇગનબૉમ δ અને ફાઇગનબૉમ α તરીકે ઓળખાય છે. પ્રવાહીશાસ્ત્ર અને વીજળીના પ્રવાહમાર્ગના પ્રયોગોમાં આશ્ચર્ય પમાડે તે રીતે આધારીત ગુણધર્મની એક કિંમતમાંથી બે કિંમતો, બે કિંમતોમાંથી ચાર કિંમતો એ રીતે બમણા થવાનું અને તેમાંથી મેળવેલી δ ની કિંમત ફાઇગનબૉમ δ ના જેટલી કે નજીક કહી શકાય તેવી મળે છે.

11.1 સર્વસામાન્ય ખાસિયત અને U શ્રેણી

લૉજિસ્ટીક સમીકરણ

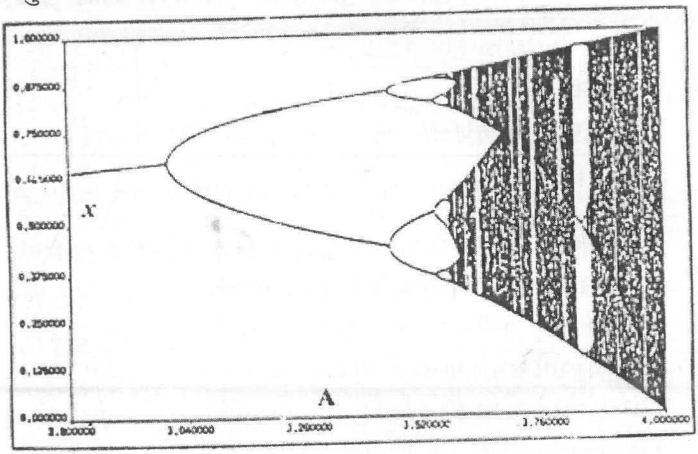
$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.1.1}$$

ના A અને તેની ભ્રમણકક્ષા xનો આકૃતિ 11.1.1 માં આપેલ આલેખ અને ત્રિકોણમિતિ સાઈન વિધેય સમીકરણ

$$x_{n+1} = B\sin(\pi x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.1.2}$$

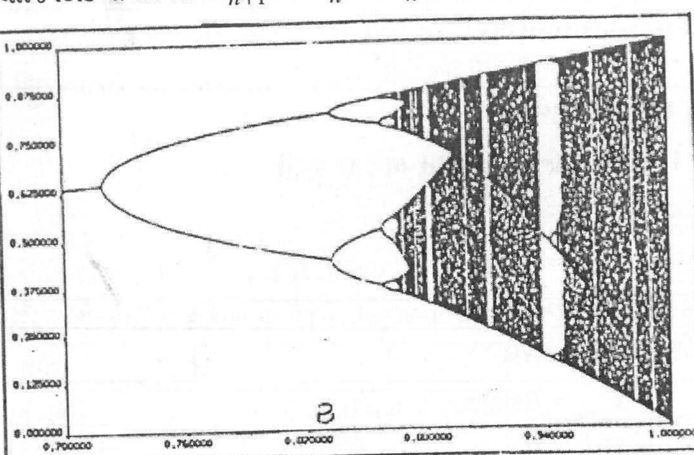
ના B અને તેની ભ્રમણકક્ષા xનો આકૃતિ 11.1.2માં આપેલ આલેખ જોઈએ. બંને આલેખોનું સરખાપણું ખૂબ જ આશ્ચર્યજનક છે. બંને આલેખોમાં શરૂઆતના આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ દરેક વખતે બમણાં થાય છે. એકના બે, બેના ચાર, ચારના આઠ એ રીતે

દરેક વખતે બમણા થતાં છેવટે x ની કિંમતો અંધાધૂંધીવાળી બને છે. આ પછી x ની કિંમતો શિસ્તબદ્ધ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ અને અશિસ્તબદ્ધ કિંમતોનું મિશ્રણ છે. આથીયે વધારે ધ્યાનપૂર્વક જોતાં છ, પાંચ, ત્રણ વગેરે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની સફેદ બારીઓ તે જ અનુક્રમમાં છે અને તે બારીઓનું કદ પણ પ્રમાણસર છે.



આકૃતિ 11.1.1

લૉજિસ્ટીક સમીકરણ $x_{n+1} = Ax_n(1-x_n)$ ના વિભાજનનો આલેખ



આકૃતિ 11.1.2

સાઈન સમીકરણ $x_{n+1} = B\sin(\pi x_n)$ ના વિભાજનનો આલેખ

તદુપરાંત ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની સફેદ બારી બંનેમાં પહોળામાં પહોળી છે. આવું ક્યારે બને ?

જો વિધેય f, [0, 1] માં સતત, વિકલનીય હોય અને આ અંતરાલમાં વિધેયને ફક્ત એક જ મહત્તમ હોય અને $f(0) = f(1) = 0$ હોય, તો વિધેય f ને યુનિમોડેલ (Unimodel) વિધેય કહેવામાં આવે છે.

દા.ત. $f(x) = Ax(1-x)$ અને $f(x) = B\sin \pi x$ યુનિમોડેલ વિધેયો છે. મેટ્રોપાલીસ વગેરેએ સાબિત કર્યું કે, જો f યુનિમોડેલ વિધેય હોય તો

$$x_{n+1} = Af(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.1.3)$$

જેમ જેમ Aની કિંમતો બદલાય તેમ તેમ, જે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ મળે તે યુનિમોડેલ વિધેય f ઉપર આધારિત નથી. આ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ નીચેની શ્રેણીમાં હોય છે.

$$1, 2, 2 \times 2, 6, 5, 3, 2 \times 3, 5, 6, 4, 6, 5, 6$$

આ શ્રેણીને U શ્રેણી તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ U શ્રેણીમાં ફક્ત છ સુધીનાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ આપેલાં છે. આ શ્રેણીની શરૂઆતના $1, 2, 2 \times 2$ આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓ બમણાં થવાનો ચિત્રપટ છે. આ પછી 6, 5, 3 સફેદ મોટી બારીઓવાળો ભાગ છે. 2×3 ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનો બમણા થવાનો ચિત્રપટ છે. 5, 6, 4, 6, 5 અને 6 નાની એકદમ ઝીણી સફેદ બારીઓ છે.

બંને આકૃતિઓમાં થોડોક ફેર પણ છે. લૉજિસ્ટીક સમીકરણમાં આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓનું બમણા થવાનું થોડુંક મોડું શરૂ થાય છે અને સફેદ બારીઓ સાઈન વિધેયની બારીઓ કરતાં પાતળી છે.

11.2 ફાઈગનબૉમ સંખ્યાઓ

ફાઈગનબૉમને આકૃતિઓ 11.1.1 અને 11.1.2 જોતાં એવું લાગ્યું કે તેમનામાં કંઈક સર્વસામાન્યતા છે અને તે જાણવા માટે,

$\{A_2 - A_1, A_3 - A_2, A_4 - A_3, \ldots, A_n - A_{n-1}, A_{n+1} - A_n, \ldots\}$ અને

$\{B_2 - B_1, B_3 - B_2, B_4 - B_3, \ldots, B_n - B_{n-1}, B_{n+1} - B_n, \ldots\}$ શ્રેણીઓ કેવી છે તે તેઓએ શોધ્યું. આ શ્રેણીઓમાં A_1 એ A ની કિંમત છે કે જ્યાં એક આકર્ષક સ્થિરબિંદુમાંથી બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ મળે છે, A_2 એ A ની કિંમત છે કે જ્યાં બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુમાંથી ચાર આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં વિભાજન થાય છે. એ જ રીતે A_n એ Aની કિંમત છે કે જ્યાં 2^{n-1} આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાંથી 2^n આકર્ષક

સ્થિરબિંદુઓ જન્મે છે. એજ રીતે B_n પણ Bની કિંમત છે કે જ્યાં 2^{n-1} આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું 2^n આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓમાં વિભાજન થાય છે. આ બંને શ્રેણીઓ સમગુણોત્તર શ્રેણીઓ હોય, તો બે પાસપાસેની રકમોના ગુણોત્તર સરખા હોવા જોઈએ. આથી,

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} = \frac{\Delta A_n}{\Delta A_{n+1}} \quad , n = 2, 3, \ldots \tag{11.2.1}$$

લેતાં, જો $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$ (11.2.2)

હોય, તો શ્રેણી સમગુણોત્તર છે. ટેબલ 11.2.1માં A_n ની કિંમતો ત્રીજી ઊભી હારમાળામાં આપેલી છે અને (11.2.1)નો ઉપયોગ કરીને ગણેલી δ_n ની કિંમતો ચોથી હારમાળામાં આપેલી છે.

ટેબલ 11.2.1

n	2^n	A_n	$\delta_n = \frac{\Delta A_n}{\Delta A_{n+1}}$
1	$2^1 = 2$	3.000	
2	$2^2 = 4$	3.4494 896	4.7514
3	$2^3 = 8$	3.5440 903	4.6562
4	$2^4 = 16$	3.5644 073	4.6683
5	$2^5 = 32$	3.5687 594	4.6686
6	$2^6 = 64$	3.5696 916	4.6692
7	$2^7 = 128$	3.5698 913	4.6694
8	$2^8 = 256$	3.5699 340	

ફાઈગનબૉમે આ A_n અને B_n ના બદલે A_n^s અને B_n^s વાપરેલા જે આપણે થોડીક વારમાં જોઈશું. કોઈપણ રીતે ગણતાં δ_n સરખા હોઈ, ફાઈગનબૉમે δ_n સમીકરણો (11.1.1) અને (11.1.2) માટે સરખામણી કરી તો n ની મોટી કિંમતો માટે બંને સમીકરણો માટે આ કિંમત સરખી નીકળી. આ δ હાલમાં "ફાઈગનબૉમ δ" તરીકે ઓળખાય છે અને તેની કિંમત

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = 4.6692\,0161 \text{ છે.} \tag{11.2.3}$$

જેવી રીતે π વર્તુલોના ક્ષેત્રફળ જોડે સંકળાયેલ છે, તેવી જ રીતે આ નવી અવિચલ સંખ્યા δ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓના વિભાજન સાથે સંકળાયેલ છે.

જે રીતે આપણી Aની દિશામાં માપક્રમ જોયો તે જ રીતે xની દિશામાં પણ માપક્રમ છે. આકૃતિઓ 11.1.1 અને 11.1.2 જોતાં લાગશે કે, દ્વિભાજન થતાં પહેલાં અને પછી પંજેટી (pitch fork) જેવો આકાર હોઈને પહોળાઈ બદલાતી રહે છે. આથી ફાઇગનબૉમે અસાધારણ સ્થિરબિંદુઓનો (superstable) ઉપયોગ કર્યો. જો, $x = 1/2$ ભ્રમણકક્ષામાં હોય, તો તે ભ્રમણકક્ષા અસાધારણ સ્થિર ભ્રમણકક્ષા છે, કારણ કે, $f'(1/2) = 0$ છે. આથી $x = 1/2$ માટે fની કિંમત મહત્તમ છે. દરેક ભ્રમણકક્ષા અસાધારણ સ્થિર ભ્રમણકક્ષા નથી. આકૃતિ 11.1.1માં $x = 1/2$ રેખા દોરીએ અને જે બિંદુએ આ રેખા આલેખને છેદે તે A ની કિંમત માટેની ભ્રમણકક્ષામાં એક xની કિંમત 1/2 છે. આ A ની કિંમતને આપણે A^s વડે દર્શાવીએ. આથી,

$f(A_1^s, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (સ્થિર બિંદુની વ્યાખ્યા)નો ઉકેલ મેળવવાથી A_1^s ની કિંમત મળે. લૉજિસ્ટીક સમીકરણમાં A માટે A_1^s અને $x = 1/2$ મૂકતાં $A_1^s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ થાય. આથી $A_1^s = 2$ મળશે. આ આકૃતિ 9.2.5માં પણ જોઈ શકાશે.

f_2 ની અસાધારણ સ્થિર ભ્રમણકક્ષામાં $x_1^*, x_2^* = \dfrac{1}{2}$ છે,

આથી, $f_2(A_1^s, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ છે અને

$$f_2'(x_1^*) = f'(x_1^*) f'(x_2^*) = f'(x_1^*) f'(\tfrac{1}{2}) = 0,$$

આથી, $f_2'(A_2^s, \frac{1}{2}) = 0$ છે.

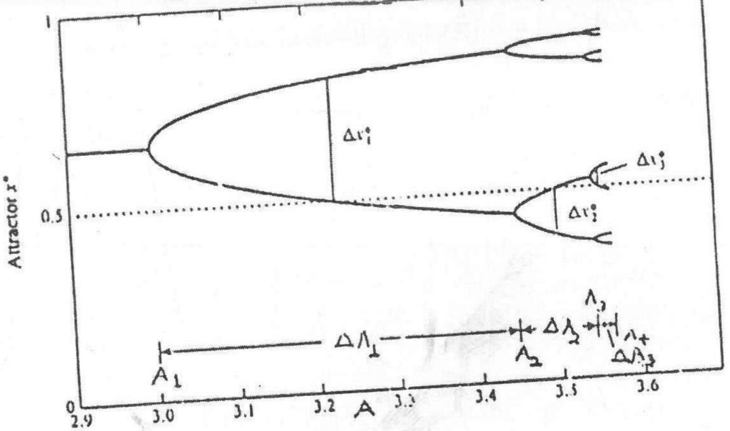
આજ રીતે, આપણને $f_{2^n}(A_n^s, \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$ અને $f'_{2^n}(A_n^s, \frac{1}{2}) = 0$ મળે, પણ પ્રમાણમાં A_n^s મેળવવા માટે $f_{2^n}(A_n^s, \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$ નો ઉકેલ મેળવવો સહેલો છે. ટેબલ 11.2.2

માં A_n^s, સમીકરણ (11.1.2)ના B માટે B_n^s અને $\delta_n = \frac{\Delta A_n^s}{\Delta A_{n+1}^s}$, $\delta_n = \frac{\Delta B_n^s}{\Delta B_{n+1}^s}$

ની કિંમતો આપી છે.

ટેબલ 11.2.2

n	2^n	A_n^s	δ_n	B_n^s	$\delta_n = \frac{\Delta B_n^s}{\Delta B_{n+1}^s}$
1	2	3.2360 60		0.7775 4	
2	4	3.4985 62	4.6809	0.8463 8	4.5813
3	8	3.5546 41	4.6627	0.8614 5	4.6512
4	16	3.5666 68	4.6706	0.8646 9	4.6286
5	32	3.5692 43		0.8653 9	



આકૃતિ 11.2.1

લૉજિસ્ટીક સમીકરણના આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓના વિભાજનના માપના એકમના ગુણધર્મ

આકૃતિ 11.2.1માં બે આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની ભ્રમણકક્ષાને રેખા $x = 1/2$ જ્યાં છેદે છે તે બિંદુએ Aની કિંમત $A_1^s = 3.23606$ છે. $A_1^s = 3.23606$ માટે આકર્ષકો $x_1^* = 0.809015$ જે ટેબલ 11.2.3માં આપેલ છે અને $x_2^* = 1/2$ છે.

આકૃતિ 11.2.1માં બતાવેલ $\Delta x_1^* = x_1^* - x_2^* = 0.8090\ 15 - 0.5 = 0.309015$ છે. આ જ રીતે ચાર આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની ભ્રમણકક્ષાને રેખા x = 1/2 જ્યાં છેદે છે તે બિંદુએ A_2^s ની કિંમત 3.498562 છે. આ બિંદુથી ભ્રમણકક્ષા પરના નજીકના બિંદુએ લંબ દોરતાં જે બિંદુએ લંબ ભ્રમણકક્ષાને છેદે છે તેના x યામ $x^* = 0.383598$ જે, ટેબલ 11.2.3 પણ આપેલ છે. આકૃતિ 11.2.1માં બતાવેલા $\Delta x_2^* = x^* - \frac{1}{2}$ $= 0.383509 - 0.5 = -0.116402$ થશે. આપણે આકૃતિ 11.2.1માં જોઈએ તો Δx_n રેખા, $x = 1/2$ રેખાની ઉપર અને નીચે વારાફરતી આવતી હોઈ,

$$\alpha_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}}, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (11.2.4)$$

ની કિંમતો ઋણ આવશે.

ટેબલ 11.2.3

n	2^n	A_n^s	x^*	$\Delta x = x^* - 0.5$	$\alpha_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}}$
1	2	3.2360 60	0.8090 18	0.3090 15	–2.6547
2	4	3.4985 62	0.3835 98	–0.1164 02	–2.5319
3	8	3.5546 41	0.5459 75	0.0459 75	–2.5085
4	16	3.5666 68	0.4816 72	–0.0183 28	–2.5049
5	32	3.5692 43	0.5073 17	0.0073	17

ટેબલ 11.2.3ની છેલ્લી હારમાળા ઉપરથી કહી શકીએ કે, α_n, α એ અભિસરે છે અને હાલમાં તે α "ફાઇગનબૉમ α" તરીકે ઓળખાય છે, અને તેની કિંમત

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} = -2.5029 \qquad (11.2.5)$$

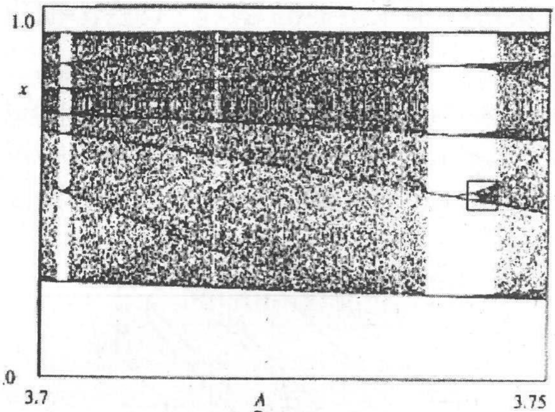
આ સંખ્યા આગળનો ફાંટો પાછળના ફાંટા કરતાં લગભગ અઢી ઘણો પહોળો છે

અથવા તો પાછળનો ફાંટો આગળના ફાંટા કરતાં લગભગ $\frac{2}{5} = 0.40$ જેટલો પહોળો છે તે દર્શાવે છે.

ફાઇગનબૉમે α અને δ સર્વસામાન્ય સંખ્યાઓ છે તે બહુ જ સુંદર રીતે સ્ટેટિસ્ટિકલ ફિઝિક્સ (Statistical Physics) માંથી રીનોર્મલિઝેશનનો (renormalization) વિચાર લઈ વિકસાવ્યું અને સામયિક (Journal) માં પ્રસિદ્ધ કરવા માટે મોકલી આપ્યું અને આશ્ચર્ય વચ્ચે તેના તંત્રીએ પ્રસિદ્ધ કરવાની ના પાડી. સર્વસામાન્ય સંખ્યા α અને δ ની શોધ માટે ફાઇગનબૉમને ઘણાં ઇનામો મળ્યાં, પણ જ્યારે જ્યારે કોઈ તેમના કામની વાત કરે, ત્યારે ત્યારે મગરૂરીથી સામયિકના તંત્રીનો ન પ્રસિદ્ધ કરવાનો પત્ર બતાવે છે. આ સર્વસામાન્ય સંખ્યાઓ α અને δ તાજેતરમાં એટલે કે 1978માં શોધાઈ. આથી જોઈ શકાશે કે, ગણિતશાસ્ત્ર ભણનાર નવી પેઢીને હજુ ઘણુંબધું કામ કરવાનું છે.

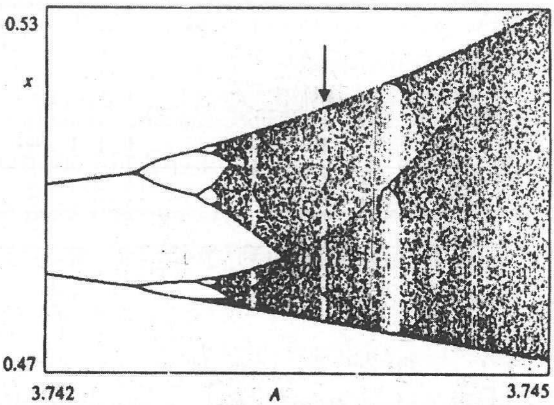
11.3 સ્વ-સમાનતા

ફાઇગનબૉમ સંખ્યાઓ આપણને દરેક વખતે બમણી થતી શ્રેણીઓની બાબતમાં અગત્યની માહિતી આપે છે. આકૃતિ 11.2.1માં A_2 અને A_3 વચ્ચેના નીચેના ભાગને જો A-યક્ષની દિશામાં દરેક બિંદુને δ થી લંબાવીએ અને x-અક્ષની દિશામાં αથી વિસ્તારીએ તો વિસ્તાર A_1 અને A_2 વચ્ચેના ભાગ જેવો જ લાગશે. આથી, એમ કહી શકીએ કે, જે ભૌમિતિક આકૃતિઓના યોગ્ય ભાગને યથાયોગ્ય મોટો કરતાં મૂળ આકૃતિ જેવી આકૃતિ હોય, તો તે આકૃતિ સ્વ-સમાન આકૃતિ તરીકે ઓળખાય છે. આ જાતના સ્વ-સમાન પદાર્થો ફ્રેક્ટલ્સ કહેવાય છે. જે આપણે પ્રકરણ 5માં જોયેલા. આવા સ્વ-સમાન પદાર્થોમાં સ્વાભાવિક માપકદ નથી. તેમના નાના ભાગને યોગ્ય રીતે વિસ્તૃત કરતાં આંખા ભાગ જેવો જ લાગે. આનું નાટકીય કે આશ્ચર્યકારક ઉદાહરણ આકૃતિઓ 11.3.1 અને 11.3.2 છે. આકૃતિ 11.3.1માં લૉજિસ્ટીક સમીકરણના વિભાજન થતા આલેખના ભાગમાં પાંચ આકર્ષક સ્થિર બિંદુઓની બારીનો ભાગ આશરે A ની 3.7 થી 3.75ની કિંમતનો ભાગ વિસ્તૃત કરીને આપ્યો છે. આકૃતિ 11.3.1માં દર્શાવેલા નાના લંબચોરસના ભાગને વિસ્તૃત કરીને આકૃતિ 11.3.2માં આપેલ છે.



આકૃતિ 11.3.1

પાંચ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની બારીનો વિસ્તારેલો ભાગ



આકૃતિ 11.3.2

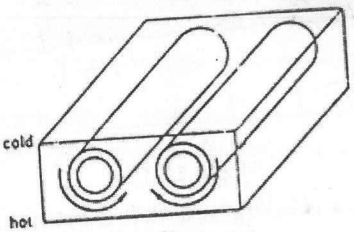
આકૃતિ 11.3.1માં દર્શાવેલા નાના લંબચોરસનો વિસ્તૃત કરેલો ભાગ જેમાં આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન, પાંચ અને ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ દેખાય છે.

આકૃતિ 11.3.2માં આકર્ષક બિંદુઓનું બમણા થવાનું અને અંધાધૂંધીવાળી ભ્રમણકક્ષાઓમાં ફરીથી પાંચ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની સફેદ બારી દેખાય છે. થોડીક A ની કિંમત વધારતાં ત્રણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓની સફેદ બારી અને તેમનું વિભાજન થવાનું અને તેમની અંધાધૂંધીવાળી ભ્રમણકક્ષાઓ. આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓના વિભાજનના અને અંધાધૂંધીવાળી ભ્રમણકક્ષાઓના આખાયે આલેખની નાની નકલ

ફરીથી આકૃતિ 11.3.2માં મળે છે. ફક્ત નીચે ઉપર છે, કારણકે α ની કિંમત ઋણ છે.

11.4 પ્રયોગો

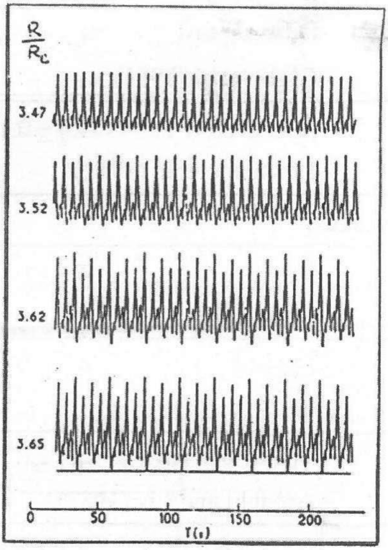
આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓના બમણા થવાની શ્રેણી ઘણા પ્રયોગોમાં જોવા મળી છે, અને તેના આધારે ફાઈગનબૉમ δ પણ મેળવવામાં આવેલ છે. આ બધામાં આકૃતિ 11.4.1 માં બતાવ્યા પ્રમાણેનો લિબચાબેરનો (Libchaber) પ્રયોગ સરળ હોઈ તે જોઈશું.



આકૃતિ 11.4.1

પેટીમાં પારાને નીચેથી ગરમ કરવામાં આવે છે. તળિયાના અને ઉપરના ઉષ્ણતામાનના તફાવત અને પારાના બીજા ગુણધર્મો ઉપર આધાર રાખનાર સંખ્યા રાયલી (Rayleigh) જેને R વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જે રીતે લૉજિસ્ટીક સમીકરણનો ઉકેલ A ઉપર આધાર રાખે છે, તે જ રીતે પેટીમાં પારાની ગતિ અને ઉષ્ણતામાન R ઉપર આધારિત છે. R ની કિંમત R_c કરતાં ઓછી હોય ત્યાં સુધી ગરમી નીચેથી ઉપર સંવાહનથી ઉપર પહોંચે છે, પારો સ્થિર રહે છે. R ની કિંમત R_c કરતાં વધારતાં, એટલે કે નીચેથી વધારે ગરમ કરતાં કે ઉપરથી વધારે ઠંડુ કરતાં નીચેનો ગરમ પારો ઉપર જાય છે અને ઉપરનો ઠંડો થયેલો પારો નીચે આવે છે. આકૃતિ 11.4.1માં બતાવ્યા પ્રમાણે પારાની ગતિક્રિયા ભૂંગળા જેવો આકાર બનાવે છે. એકબીજાથી ઊલટી દિશામાં જતી ભૂંગળા જેવી ભાત મળે છે. જો R ની કિંમત R_c થી થોડીક જ વધારે હશે, તો ભૂંગળામાં સીધાં હશે અને હાલચાલ એકધારી હશે. ઉપરાંત દરેક જગ્યાએ ઉષ્ણતામાન અચળ હશે. ઉષ્ણતામાન વધારવાથી અસ્થિરતા આવશે અને ભૂંગળાંઓ ધીરેધીરે તૂટતાં જશે અને પારો ખળભળાટ કરશે. આપણે ઉષ્ણતામાન વધારવું છે, પણ અસ્થિરતા આવવા દેવી નથી. આ કારણે લિબચાબેરે પારાની વિદ્યુત વાહકતા (electric conductivity) વધારે હોઈ, પારો પસંદ કરેલ, જેથી DC ચુંબકીય ક્ષેત્રથી (DC

magnetic field) થી ભૂંગળાંઓને નક્કી દિશામાં રાખી શકાય. આ પ્રયોગોમાં જેમ R ની કિંમત વધે તેમ તેમ ભૂંગળા ઉપર મોજાંની લહેર ફર્યા કરશે અને આ કારણે દરેક જગ્યાએ ઉષ્ણતામાન બદલાયા કરશે. આ પ્રયોગમાં એક જ જગ્યાએ બદલાતા ઉષ્ણાતામાનનાં પરિણામો જુદી જુદી R/R_c ની કિંમતો માટે આકૃતિ 11.4.2માં આપેલ છે.



આકૃતિ 11.4.2

$R/R_c = 3.47$ માટે ઉષ્ણતામાન નિયત કાલે બદલાયા કરે છે. આને આપણે પાયાનો નિયત કાલ-1 (Period-1) કહીશું. $R/R_c = 3.52$ માટે ઉષ્ણતામાન બે ઉષ્ણતામાનની કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. આથી આ કિંમતોને નિયત કાલ-2 કહીશું. એ જ રીતે $R/R_c = 3.62$ માટે ઉષ્ણતામાન ચાર કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. એ જ રીતે $R/R_c = 3.65$ માટે ઉષ્ણતામાન આઠ કિંમતો વચ્ચે ફર્યા કરે છે. જ્યાં જ્યાં ઉષ્ણતામાનની કિંમતોનું વિભાજન થાય તે R/R_c ની કિંમતો ખૂબ જ ચીવટપૂર્વક લિબરચાબેરે ગણીને ફાઈગનબૉમ δની કિંમત 4.4 ± 0.1 મેળવી જે કિંમત 4.67થી ખાસ દૂર ન ગણાય. આ જ રીતે પારાના બદલે પાણી વાપરીને કરેલ પ્રયોગ અને બીજાં

અસુરેખ ઇલેક્ટ્રોનીક સરકીટ્સ (nonlinear electronic circuits)ના પ્રયોગોનાં પરિણામ ટેબલ 11.4.1માં આપેલાં છે.

ટેબલ 11.4.1

પ્રયોગ પ્રવાહીશાસ્ત્ર	કેટલી વખત વિભાજન થયું n	પ્રયોગના કર્તા(ઓ)	δ	δ – 4.669
પાણી	4	ગિગ્લિઓ અને... Giglio et al (1981)	4.3 ± 0.8	–0.4 ±0.8
પારો	4	લિબચાબેર અને... Libchaber et al (1982)	4.4 ± 0.1	–0.3 ±0.1
ઇલેક્ટ્રોનિક્સ (Electronics)				
ડાયોડ (Diode)	4	લિન્સે Linsay (1981)	4.5 ± 0.6	–0.2 ±0.6
ડાયોડ (Diode)	5	ટેસ્ટ અને ... Testa et al(1982)	4.3 ± 0.1	–0.4 ±0.1
ટ્રાન્ઝિસ્ટર (Transistor)	4	આરેચી અને લિસી Arechhi and Lisi(1982)	4.7 ± 0.3	±0.3
તરંગો (Accoustic waves)	4	સ્મિથ અને... Smith et al (1982)	4.8 ± 0.6	–0.1 ±0.6

$\delta \approx 5$ હોઈ, દરેક વિભાજન વખતે પ્રચલ માપવાની શક્તિમાં પાંચગણો સુધારો થાય, તો જ પ્રયોગની ચોકસાઈ જળવાય. પ્રયોગોમાં પણ બમણા થવાનું બરાબર માપી ન શકાય. બમણા થવાની શ્રેણીની શરૂઆતની કિંમતોનો ઉપયોગ પ્રયોગોમાં δ ની કિંમત મેળવવામાં થાય છે. આ જોતાં ફાઇગનબૉમ δ અને પ્રયોગોના માપથી મેળવેલ δ વચ્ચેની સામ્યતા સરસ ગણાય. તદુઉપરાંત ફાઇગનબૉમ δ મેળવવા માટે આપણે ભૌતિકશાસ્ત્રનો જરાયે ઉપયોગ કર્યો નથી, છતાંય ભૌતિકશાસ્ત્રના પ્રયોગોથી મેળવેલ δ, ફાઇગનબૉમ δ ના જેવો જ છે. ભૌતિકશાસ્ત્રની ભારે જટીલતાઓ કઈ રીતે સાદા અને સરળ દેખાતા લૉજિસ્ટીક સમીકરણમાંથી મેળવેલ δ માં સમાઈ શકે? આ એક અસુરેખ સંહતિનું (Nonlinear system) ભારે રહસ્ય લાગે છે !!!

* * *

પ્રકરણ 12

લોરેન્ઝ અને રોસ્સ્લર સમીકરણો

(Lorenz and RÖsslar Equations)

12.1 લોરેન્ઝ સમીકરણો

હવામાનની અલ્પાકૃતિનો નમૂનો દર્શાવતાં 12 વિકલ સમીકરણોના સંખ્યાત્મક ઉકેલો એડ્વર્ડ લોરેન્ઝ (Edward Lorenz) ઈ.સ. 1960 માં તેમના નવા જ રોયલ મેકબી એલપીજી-30 (Royal McBee LPG-30) કમ્પ્યૂટર ઉપર ગણતા હતા. વાતાવરણના નમૂનાનાં વિકલ સમીકરણોમાં ઘણાં પ્રચલો હતાં. અને કમ્પ્યૂટરે તેમને પ્રચલોની દુનિયામાં મનફાવે ત્યાં ફરવાની છૂટ આપી. દરિયા અને ખંડોના ગરમ થવાથી હવામાનને બદલતાં પ્રચલોને લોરેન્ઝે બદલ્યા કર્યા. રોયલ મેકબી વર્ત (aperiodic) ભ્રમણકક્ષા ગણી બતાવતું હતું. છપાવવાની ઝડપ કરવા માટે, લોરેન્ઝે ફક્ત સાર્થ આંક ત્રણ છાપવા માટે પ્રોગ્રામ બદલ્યો, પણ, કમ્પ્યૂટર તો સાર્થ આંક ઘણા ગણતું હતું. કોઈ એક વિશિષ્ટ ગણતરીમાં રસ પડતાં, લોરેન્ઝને ફરીથી ગણતરીઓ કરીને સવિસ્તર જાણવાની ઇચ્છા થઈ. આથી તેમણે છાપેલી કિંમતોમાંથી સાર્થ આંક ત્રણ ટાઇપ કરીને ગણતરી કરવાનું શરૂ કરીને કોફી પીવા ગયા. કોફી પીને પાછા આવીને જોયું તો ભ્રમણકક્ષા કોઈ નવા જ રસ્તે નીકળી પડેલી. લોરેન્ઝે ઘણીબધી શંકાઓ કરી અને છેલ્લે તેમનો નિર્ણય હતો કે, તેઓ પ્રારંભની શરતોને આધારિત ઉકેલો જોઇ રહ્યા છે.

12 વિકલ સમીકરણોને 3 વિકલ સમીકરણોમાં ઘટાડતાં 20 વર્ષ લાગ્યાં. લોરેન્ઝે વાતાવરણની હવાને સૂર્યથી પૃથ્વીની જમીન ગરમ થતાં નીચે હવા ગરમ થાય અને ઉપર હવા ઠંડી રહે તે દર્શાવતાં ઈ.સ. 1963માં નીચેનાં વિકલ સમીકરણો મેળવ્યાં.

$$\dot{X} = p(Y - X),$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y,$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \qquad (12.1.1)$$

અહીંયા $\dot{X}$, X નું t ના સાપેક્ષમાં વિકલન દર્શાવે છે. p પ્રાન્ડ્ટલ (prandtl) સંખ્યા, r રાયલી (Rayleigh) સંખ્યા અને હવાના સ્તરની ઊંચાઇ અને સંવહન

(convection) ભૂંગળાની ક્ષિતિજની દિશાની પહોળાઈનો ગુણોત્તર b છે. X એ પ્રવાહીના પ્રવાહવિધાન સાથે જોડાયેલ છે, Y એ અમુક ઊંચાઇએ ઊંચે જતા પ્રવાહીના ઉષ્ણતામાન અને નીચે ઊતરતા પ્રવાહીના ઉષ્ણતામાનના તફાવતના પ્રમાણસર છે. જ્યારે Z એ કોઈપણ ઊંચાઇએ આવેલ ઉષ્ણતામાન અને સુરેખ ઉષ્ણતામાનના તફાવતના પ્રમાણસર છે. સાથે સાથે X, Y અને Z સમય t ઉપર પણ આધાર રાખે છે. આ પદ્ધતિનાં ત્રણ વિકલ સમીકરણો અગાઉનાં 12 વિકલ સમીકરણો, જે હવામાનની અલ્પાકૃતિનો નમૂનો હતાં તેના કરતાં ઘણાં સરળ છે. પરંતુ, આવતીકાલનું ઉષ્ણતામાન શું હશે તે આ સરળ પદ્ધતિના ત્રણ વિકલ સમીકરણો કહી શકે તેમ નથી. આ ત્રણ વિકલ સમીકરણોનો લોરેન્ઝે અભ્યાસ કરીને વિજ્ઞાનમાં ક્રાન્તિની શરૂઆત કરી, જે ગણિતના ક્ષેત્રમાં અંધાધૂંધી શાસ્ત્ર (Chaos) તરીકે ઓળખાય છે.

સમીકરણો (12.1.1) એટલાં સરળ દેખાય છે કે, તેના ઉકેલો સૂત્રના સ્વરૂપમાં મેળવી શકાય તેમ લાગે છે, બે ગુણાકારની રકમો XZ અને XY ના કારણે સૈદ્ધાંતિક રીતે એવું મનાય છે કે, X, Y અને Z ને t ના સૂત્રના સ્વરૂપમાં લખવું અશક્ય છે.

લોરેન્ઝે શોધી કાઢ્યું કે, આ સાદાં નિશ્ચાયિક સમીકરણોના (deterministic equaitons) ઉકેલો ખૂબ જ ચંચળ-ગતિશીલ છે. પ્રચલોના વિશાળ ક્ષેત્રની કિંમતો માટે ઉકેલો અનિયમિત ફર્યા કરે છે, કદીએ તદ્દન બરાબર પુનરાવર્તન કરતા નથી, પણ હંમેશાં સીમિત પ્રદેશના પ્રાવસ્થાઅવકાશમાં (Phase space) હોય છે. જ્યારે તેમણે ત્રિ-પરિમાણમાં આલેખો દોર્યા ત્યારે તેમણે જોયું, કે ભ્રમણકક્ષાઓનો ગણ ગૂંચવણભર્યો છે, જેને હાલમાં વિચિત્ર આકર્ષનીશ (Strange attractor) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ વિચિત્ર આકર્ષનીશમાં જ બધી ભ્રમણકક્ષાઓ આવેલી છે, આ કોઈ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ નથી કે લક્ષ્યચક્ર (Limit cycle) જેવો વક્ર નથી કે તે સપાટી પણ નથી. તે ફ્રેક્ટ્લ છે. આ વિચિત્ર આકર્ષનીશનું પરિમાણ 2 અને 3 વચ્ચે છે.

12.2 સ્થિરબિંદુઓ અને તેમની સ્થિરતા

ધારો કે, X, Y અને Z અચળ સંખ્યાઓ છે. આથી, સમીકરણ (12.1.1) X, Y અને Z અચળ સંખ્યાઓ લેતાં, આપણને

$$p(Y-X)=0$$

$$rX-Y-XZ=0$$

$$XY-bZ=0$$ મળે.

આના ઉકેલો $p \neq 0$ હોઈને, $X = Y$, $(r-1-Z)X = 0$ અને $X^2 = bZ$ મળે. આથી $X = 0$ અથવા $Z = r-1$ મળે. આપણને

$(0, 0, 0)$, $c^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ અને

$c^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ સ્થિરબિંદુઓ મળે.

$(0, 0, 0)$ સ્થિરબિંદુની આસપાસ ટેયૂલર (Taylor) શ્રેણીમાં વિસ્તરણ કરતાં, વર્ગ કે ગુણાકારની રકમો ધ્યાનમાં ન લેતાં, સમીકરણ (12.1.1માં આ વિસ્તરણ મૂકતાં આપણને

$$\frac{dx}{dt} = p(y-x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y, \quad \frac{dz}{dt} = -bz \qquad ...(12.2.1)$$

મળે. આથી $z = z(0)e^{-bt}$ મળે અને $x, y \propto e^{\lambda t}$ હોઈને $x = Ae^{\lambda t}$ અને $y = Be^{\lambda t}$ (12.2.1) ના પહેલાં બે સમીકરણોમાં મૂકતાં આપણને

$$(\lambda + p)A - pB = 0$$

$$-rA + (\lambda + 1)B = 0$$

મળે. $A \neq 0$ અને $B \neq 0$ માટે

$$\begin{vmatrix} \lambda + p & -p \\ -r & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

છે. આથી

$$\lambda^2 + \lambda(p+1) + p(1-r) = 0$$

હોઈને,

$$\lambda = \frac{-(p+1) \pm \sqrt{(p+1)^2 - 4p(1-r)}}{2} \qquad ...(12.2.2)$$

મળે. જો $r < 1$ હોય, તો $\lambda_1 < 0$ અને $\lambda_2 < 0$ છે. $\lambda_3 < -b$ હોઈને, $r < 1$ હોય ત્યારે $(0, 0, 0)$ આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે.

c^+ અને c^- ની આસપાસ ટેયૂલર શ્રેણીમાં વિસ્તરણ કરવા માટે $x = X \mp -\sqrt{b(r-1)}$, $y = Y \mp -\sqrt{b(r-1)}$ અને $z = Z - (r-1)$ લઈને

આપણને સમીકરણ (12.1.1) માં વર્ગ કે ગુણાકારની રકમો ધ્યાનમાં ન લઈને મૂકતાં

$$\frac{dx}{dt} = p(y-x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y \mp \sqrt{b(r-1)}z$$

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{b(r-1)}(x+y) - bz \qquad ...(12.2.3)$$

મળે. $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$ અને $z = Ce^{\lambda t}$ સમીકરણ (12.2.3) માં મૂકતાં

$$(\lambda + p)A - pB = 0$$

$$-A + (\lambda+1)B \pm \sqrt{b(r-1)}C = 0$$

$$\mp\sqrt{b(r-1)}\,(A+B) + (\lambda + b)C = 0$$

થાય. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ માટે

$$\begin{vmatrix} \lambda + p & -p & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \mp\sqrt{b(r-1)} & \mp\sqrt{b(r-1)} & \lambda + b \end{vmatrix} = 0 \qquad (12.2.4)$$

λ નું સમીકરણ મળશે. સમીકરણ (12.2.4) નું સાદું રૂપ આપતાં,

$$\lambda^3 + \lambda^2(p+b+1) + \lambda b(p+r) + 2pb(r-1) = 0 = f(\lambda) \qquad (12.2.5)$$

મળે.

આપણું લક્ષ્ય r ની કિંમત 1 થી વધે ત્યારે λ_1, λ_2 અને λ_3 ની ચાલચલગત કેવી હશે તે જાણવાની છે. જેથી આપણે સ્થિરબિંદુઓની સ્થિરતા વિષે જાણી શકીએ. જ્યારે $\text{Re}(\lambda) < 0$ થી $\text{Re}(\lambda) > 0$ બને ત્યારે સ્થિરબિંદુ અસ્થિર બને છે. આથી $\text{Re}(\lambda) = 0$ હોય ત્યારે સ્થિરબિંદુ સ્થિરતા ખોશે. સંકર ઉકેલો બે હોઈ, જ્યારે સ્થિરતા ગુમાવે ત્યારે $\lambda_2 = i\omega$ અને $\lambda_3 = -i\omega$ છે. અહીંયાં ω કોઈપણ સંખ્યા છે. સમીકરણ (12.2.5) માં

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(p+b+1)$ હોઈ, $\lambda_1 = -(p+b+1)$ બને, ત્યારે

અસ્થિરતા ઊભી થાય. સમીકરણ (12.2.5) માં

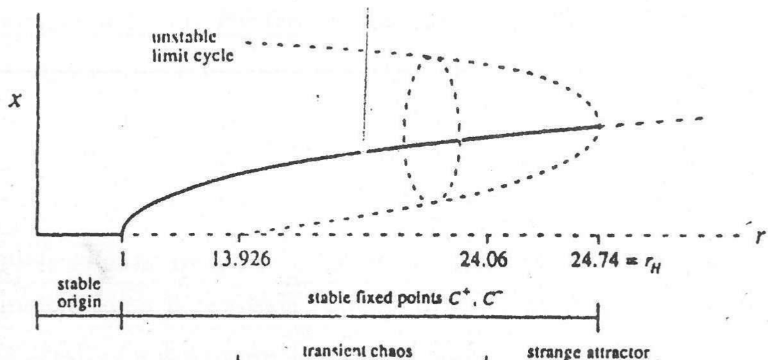
$$f(\lambda_1) = f(-(p+b+1))$$
$$= r\{-b(p+b+1)+2pb\} - bp(p+b+1) = 0$$

હોઈ,

$$r = \frac{p(p+b+1)}{p-b-1} = r_c \quad (12.2.6)$$

હોય ત્યારે c^+ અને c^- સ્થિરબિંદુઓ અસ્થિર બને છે.

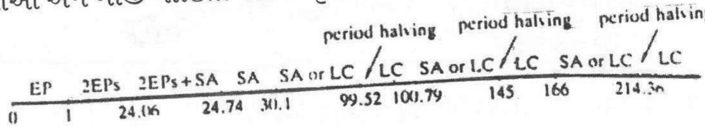
સામાન્ય રીતે $p = 10$ અને $b = 8/3$ લેવાતાં હોઈ, $r_c = 470/19 = 24.74$ થાય. $r < 1$ માટે (0, 0, 0) આકર્ષક સ્થિરબિંદુ છે. $r = 1$ માટે સ્થિરબિંદુ (0, 0, 0) અસ્થિર બને છે અને બે સમપ્રમાણ આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ જન્મે છે. આ બંને સ્થિરબિંદુઓ $r = r_c = 24.74$ માટે અસ્થિર બને છે. r ની 1 અને 25 વચ્ચેની કિંમતો માટે આકર્ષક બિંદુઓની વિગતવાર માહિતી આકૃતિ 12.2(a) માં આપેલી છે. વિચિત્ર આકર્ષનીશ (strange attractor) ફક્ત $r > r_c$ માટે જ નહિ પણ r ની $1 < r < r_c$ કિંમતો c^+ અને c^- સ્થિરબિંદુઓની સાથે પણ હોય છે.



આકૃતિ 12.2(a)

r ની કિંમતો જેમ જેમ વધતી જાય, તેમ તેમ વિભાજન, અંધાધૂંધી વગેરેની વિકટ શ્રેણી મળે છે. ખાસ તો લોજિસ્ટીક સમીકરણમાં સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન થતું અને આવર્ત

બમણો થતો, જ્યારે અહીંયાં આથી ઊલટી પ્રક્રિયા છે. જેમ જેમ r ની કિંમતો વધે તેમ તેમ લક્ષ્યચક્રનો આવર્ત અડધો થાય છે. આકૃતિ 12.2(b) માં $p = 10$, $b = 8/3$ લઈને જુદા જુદા r માટે મળેલા ઉકેલોના આધારે આવર્ત અડધી થતી r ની કિંમતોની ત્રણ બારીઓ $95.524 < r < 100.795$, $145 < r < 166$ અને $r > 214.4$ છે. આ બારીઓ અને બીજી માહિતી પણ આકૃતિ 12.2(b) માં આપેલી છે.



આકૃતિ 12.2(b)

ત્રણ પ્રચલો p, b અને r ની વિશાળ દુનિયા છે અને ઘણું બધું નવું નવું આ પ્રચલોની દુનિયામાં શોધવાનું રહ્યું છે.

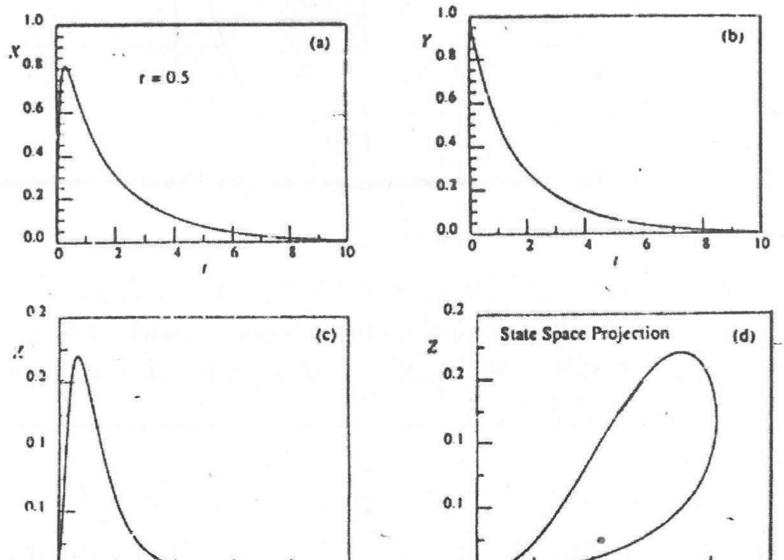
12.3 ઉકેલો

r ની નાની કિંમતો માટે, એટલે કે ટોચના અને તળિયાના ઉષ્ણતામાનના ઓછા તફાવત માટે સ્થિર અને અસંવહન (nonconvection) સ્થિતિ સ્થિર પરિસ્થિતિ છે, જ્યારે $r > 1$ હોય ત્યારે સ્થિર સંવહન (convection) શરૂ થાય છે, સવળું પરિભ્રમણ અને અવળું પરિભ્રમણ શક્ય છે. આપણે જોઈશું કે જુદી જુદી પ્રારંભિક અવસ્થા જુદી જુદી સ્થિતિમાં લઈ જાય છે. જેમ જેમ r ની કિંમતો વધતી જાય છે તેમ તેમ આવર્તીય (periodic) પ્રદેશોમાં પણ અંધાધૂંધીવાળા ઉકેલો હોય છે. દરેક દાખલામાં $p = 10$ અને $b = 8/3$ છે.

(1) $r = 1/2$

લોરેન્ઝ સમીકરણો (12.1.1) અને X, Y અને Z ની પ્રારંભિક કિંમતો $X(0) = Z(0) = 0$, $Y(0) = 1$ લઈને સંખ્યાત્મક સંકલન કરતાં મળતાં પરિણામો આકૃતિ 12.3.1 માં આપેલાં છે. આપણે ઉષ્ણતામાનના તફાવત સાથે શરૂ કરીએ છીએ. જેમ જેમ સમય જાય છે, તેમ તેમ ઉકેલ સ્થિર અસંવહન સ્થિતિ $X = Y = Z = 0$ એ પહોંચે છે. આકૃતિ 12.3.1(a-c) માં ચલો X, Y અને Z વિરુદ્ધ t ના આલેખો આપેલા છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ જેમ સમય જતો જાય, તેમ તેમ ચલો X, Y અને Z

ની કિંમતો શૂન્ય તરફ જતી જાય છે. ચલો X, Y અને Z આપણી સંયોજિત સ્થિતિનું કાળજીપૂર્વક સવિસ્તર વર્ણન કરે છે, આથી આપણે આ ચલોના અવકાશને આપણી સંયોજિત સ્થિતિનું અવકાશ કહીશું. આ ચલોનું અવકાશ ત્રિપરિમાણ છે અને તેને કાગળ ઉપર દોરવું અઘરું હોઈ, આપણે XY કે YZ કે ZX ના સમતલ ઉપર ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ દોરીશું. આકૃતિ 12.3.1(d) માં સમતલ XZ ઉપર ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ બતાવ્યો છે. આના ઉપરથી એટલું કહી શકાય કે, ગતિમાર્ગ આખરે બિંદુ X = Y = Z = 0 એ પહોંચે છે.

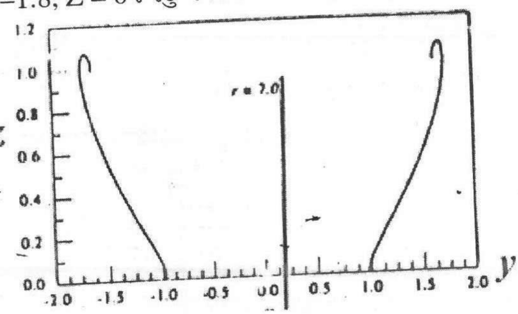


આકૃતિ 12.3.1

(2) $r = 2$

$r > 1$ માટે સ્થિરબિંદુ (0, 0, 0) અનાકર્ષક સ્થિરબિંદુ હોઈ, (0, 0, 0) ની ગમે તેટલા નજીકથી શરૂ કરીએ, તોપણ (0, 0, 0) થી દૂર જશે. જો $1 < r < 15$ હોય તો $c^+(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ અને $c^-(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ બિંદુઓએ આકર્ષાશે. કયા બિંદુએ આકર્ષાશે તે X, Y, Z ની પ્રારંભિક કિંમતો ઉપર

આધારિત છે. $r = 2$ માટે $X = Z = 0$, $Y = -1$ પ્રારંભિક કિંમતો માટે $X = Y = -\sqrt{10/3}$, $Z = 1$ મળે છે. જ્યારે $X = Z = 0$, $Y = 1$ પ્રારંભિક કિંમતો માટે $X = Y = \sqrt{10/3}$, $Z = 1$ મળે છે. આકૃતિ 12.3.2 ની ડાબી બાજુએ YZ સમતલમાં ગતિમાર્ગનો પ્રક્ષેપ આપેલો છે. $Y = -1$, $Z = 0$ થી શરૂ થાય છે અને લગભગ $Y = -1.8$, $Z = 0$ બિંદુએ સ્થિર થાય છે.

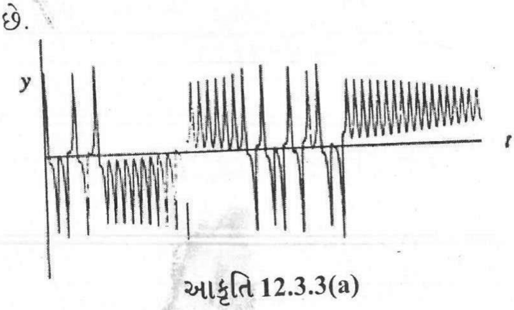


આકૃતિ 12.3.2

લૉરેન્ઝ સમીકરણોની $r = 2$ ની ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ YZ સમતલમાં આપેલો છે. એક આકર્ષક દક્ષિણાવર્તી દિશામાં જ્યારે બીજો વામવર્તી દિશામાં પરિભ્રમણ કરે છે. તે જ પ્રમાણે આ જ આકૃતિમાં $Y = 1$, $Z = 0$ થી શરૂ થયેલ પ્રક્ષેપ $Y = 1.8$, $Z = 1$ બિંદુએ સ્થિર થાય છે.

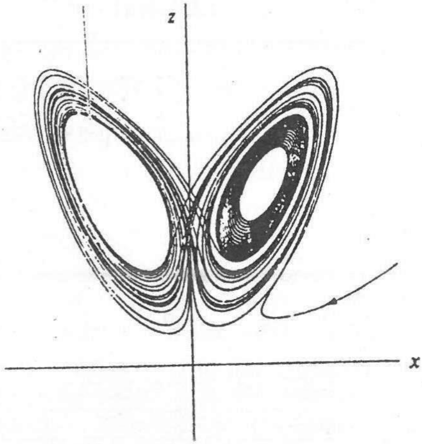
(3) $r = 21$

આકૃતિ 12.3.3(a) માં Y વિરુદ્ધ સમય t નો આલેખ આપેલો છે તેમાં શરૂઆતમાં અનિયમિતતા દેખાય છે, પણ આખરે સ્થિરબિંદુ કે જેની $Y = \sqrt{160/3}$ છે ત્યાં પહોંચે છે.



આકૃતિ 12.3.3(a)

XZ સમતલમાં ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ આકૃતિ 12.3.3(b) માં આપેલો છે. પહેલી નજરે તો તે વિચિત્ર આકર્ષનીશનો પંથ દોરતો લાગે છે, પણ આખરે તો જમણી બાજુ રહીને ગોળાકારમાં ફરીને આવર્તના મધ્યબિંદુ એ $c^+\left(\sqrt{\frac{160}{3}},\sqrt{\frac{160}{3}},20\right)$ પહોંચતો લાગે છે.

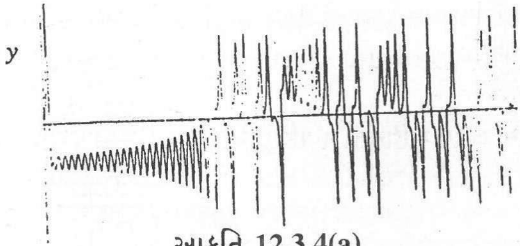


આકૃતિ 12.3.3(b)

જો આપણે થોડીક જ જુદી પ્રારંભિક કિંમતો લઈને શરૂ કરીએ, તો શક્ય છે કે, $c^+\left(\sqrt{\frac{160}{3}},\sqrt{\frac{160}{3}},20\right)$ ના બદલે $c^-\left(-\sqrt{\frac{160}{3}},-\sqrt{\frac{160}{3}},20\right)$ સ્થિરબિંદુએ પહોંચે. ફક્ત c^+ અને c^- બે સ્થિરબિંદુઓ છે, છતાંયે કઈ પ્રારંભિક કિંમતો માટે ક્યાં પહોંચીશું તે કહેવાનું શક્ય નથી.

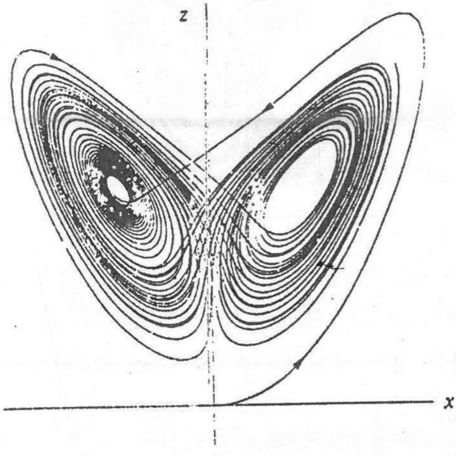
(4) $r = 28$

$Y(t)$ વિરુદ્ધ સમય t નો આલેખ આકૃતિ 12.3.4(a) માં આપેલો છે. પ્રારંભિક અલ્પકાલિક Y ની કિંમતો અનિયમિત આવર્તિક કિંમતોમાં ગોઠવાય છે, પણ કોઈપણ કિંમતોનું ચોક્કસ પુનરાવર્તન થતું નથી. ઉકેલ અનાવર્ત (aperiodic) છે.



આકૃતિ 12.3.4(a)

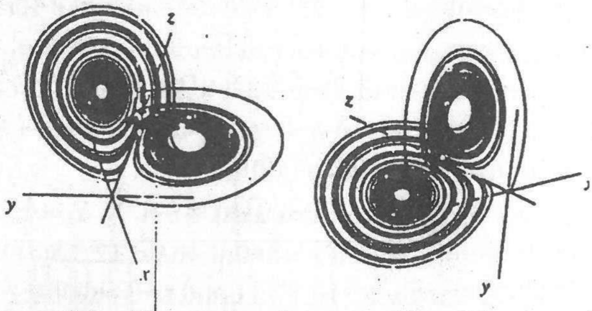
લોરેન્ઝે જ્યારે સમતલ XZ માં ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ દોર્યો, ત્યારે આકૃતિ 12.3.4(b) માં બતાવેલી અદ્ભુત રચના અવકાશમાં આવી. પ્રારંભિક કિંમતો X(0) = Z(0) = 0, Y(0) = 1 લઈને સમતલ XZ માં દોરેલી આકૃતિ પતંગિયા જેવી છે.



આકૃતિ 12.3.4(b)

આકૃતિમાં લગભગ ઊગમબિંદુથી ભ્રમણકક્ષાનો પ્રક્ષેપ શરૂ થઈને જમણી તરફ ઝોલો લઈને ડાબી બાજુએ આવર્તના (spiral) મધ્યે એકદમ સીધો નીચે ઊતરે છે, ધીરેધીરે c^- ની આસપાસ ગોળગોળ ફર્યા કરે છે અને એકાએક જમણી બાજુ આવે છે અને c^+ ની આસપાસ ફરીને ડાબી બાજુ જાય છે. અને c^- ની આસપાસ ફરે છે, અને આમ બન્યા જ કરે છે. દરેક વખતે કેટલી વખત ફરશે તે કહેવું ખૂબ જ મુશ્કેલ છે, કારણકે આ બનવું ગમે તેમ છે. દરેક ક્ષેણીમાં c^+ કે c^- ની આસપાસ કેટલી વખત ફરશે તે કહી શકાય તેમ નથી.

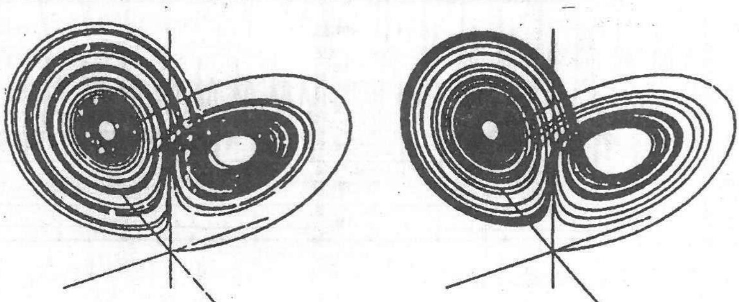
3-પરિમાણમાં દેખાતી ભ્રમણકક્ષા આકૃતિ 12.3.4(c) માં આપેલી છે. એવું લાગે છે કે ભ્રમણકક્ષા ખૂબ જ સુંદર પતંગિયાની બે પાંખો ઉપર બિરાજમાન રહે છે.



***r = 28* ના પ્રારંભિક બિંદુ (0, 1, 0) થી શરૂ થતા ઉકેલનાં બે જુદા દ્રશ્યો**

આકૃતિ 12.3.4(c)

આપણે વિચિત્ર આકર્ષનીશ એને કહીએ કે જે પ્રારંભિક કિંમતો ઉપર ખૂબ જ આધારિત હોય. લોરેન્ઝ સમીકરણો (12.1) પ્રારંભિક કિંમતો X(0) = Z(0) = 0, Y(0) = 1 અને



લોરેન્ઝ સમીકરણોની પ્રારંભિક કિંમત X(0) = Z(0) = 0, Y(0) = 1 માટેનો ઉકેલ

લોરેન્ઝ સમીકરણોની પ્રારંભિક કિંમત X(0) = Z(0) = 0, Y(0) = 1.001 માટેનો ઉકેલ

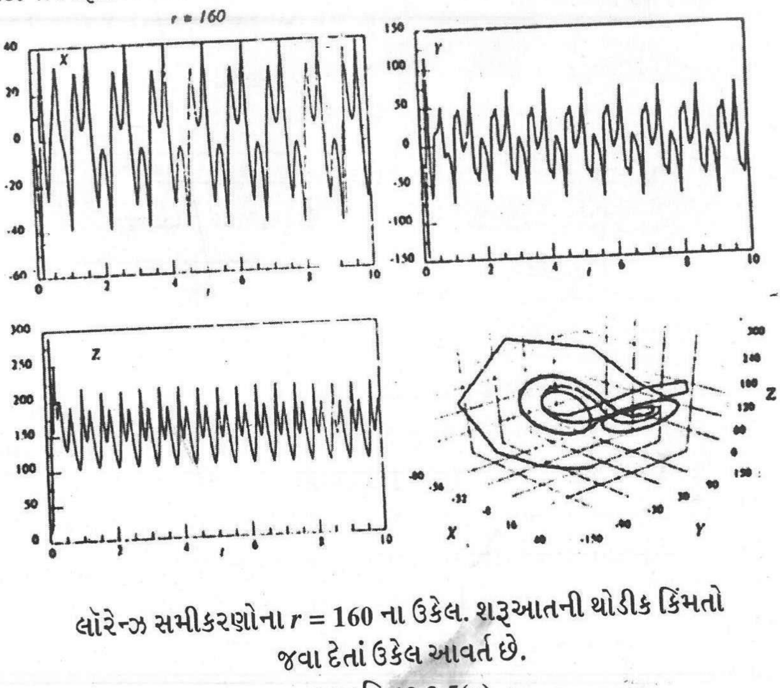
આકૃતિ 12.3.4(d)

X(0) = Z(0) = 0, Y(0) = 1.001 લઈને ગણેલા ઉકેલો આકૃતિ 12.3.4(d) માં આપેલા છે. શરૂઆતમાં બંને ઉકેલો લગભગ સરખા છે, પણ આખરે બંને સંપૂર્ણપણે અલગ છે. પ્રારંભિક કિંમતોમાં થોડોક નાનામાં નાનો ફેરફાર, ઉકેલોમાં મોટામાં મોટો ફેરફાર લાવે છે. આની અસર પ્રમાણમાં ઘણી ગંભીર છે. જ્યારે નાનામાં નાની ભૂલ, ઘણી મોટી બનતી હોય ત્યારે લાંબાગાળાની આગાહી કરવી અશક્ય બને છે.

(5) $r = 160$, 150 અને 143

જેમ જેમ r ની કિંમતો શૂન્યથી અનંત સુધી વધતી જાય છે તેમ તેમ વિભાજકો અને વિચિત્ર આકર્ષનીશની વિકટ શ્રેણી મળે છે. ખાસ તો એવી r ની કિંમતો આવે છે કે જ્યાં અંધાધૂંધી બંધ થાય છે અને પછી r ની કિંમતો માટે લક્ષ્યચક્રનો આવર્ત અડધો થાય છે. એ બમણા થતા આવર્ત કરતાં ઊલટી પ્રક્રિયા છે. સાથે સાથે આ શ્રેણી પણ ફાઇગનબૉમ શ્રેણી જ છે. σ અને b ની જુદી કિંમતો માટે પણ જેમ જેમ r બદલતા જઈએ, તેમ તેમ ઘણી જ વધારે વિપુલ વિવિધતા મળે છે.

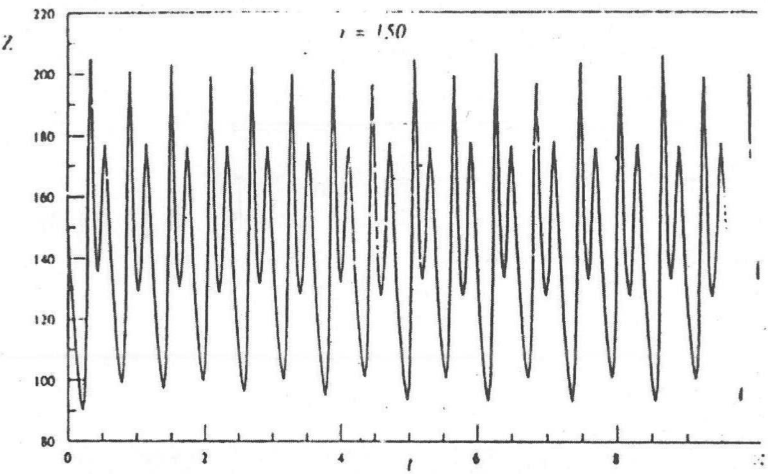
$r = 160$ ની નજીકની કિંમતોના ઉકેલો જોઈએ. X, Y અને Z ની જુદા જુદા સમય t માટેની કિંમતોના આલેખો $r = 160$ના આકૃતિ 12.3.5(a) માં આપેલા છે. શરૂઆતની કિંમતો જવા દેતાં X અને Y ની કિંમતો 0 ની આસપાસ સંમિત રીતે ફર્યા કરે છે, જ્યારે Z ની કિંમત 150 ની આસપાસ સંમિત રીતે ફર્યા કરે છે. પ્રવાહીના ઉષ્ણતામાનનું સંવહન શરૂઆતમાં ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં અને પછી ઘડિયાળના કાંટાની વિરૂદ્ધ દિશામાં ફરે છે. આ જ રીતે ચાલ્યા કરે છે. આથી ઉકેલ આવર્તીય છે.



લૉરેન્ઝ સમીકરણોના $r = 160$ ના ઉકેલ. શરૂઆતની થોડીક કિંમતો જવા દેતાં ઉકેલ આવર્ત છે.

આકૃતિ 12.3.5(a)

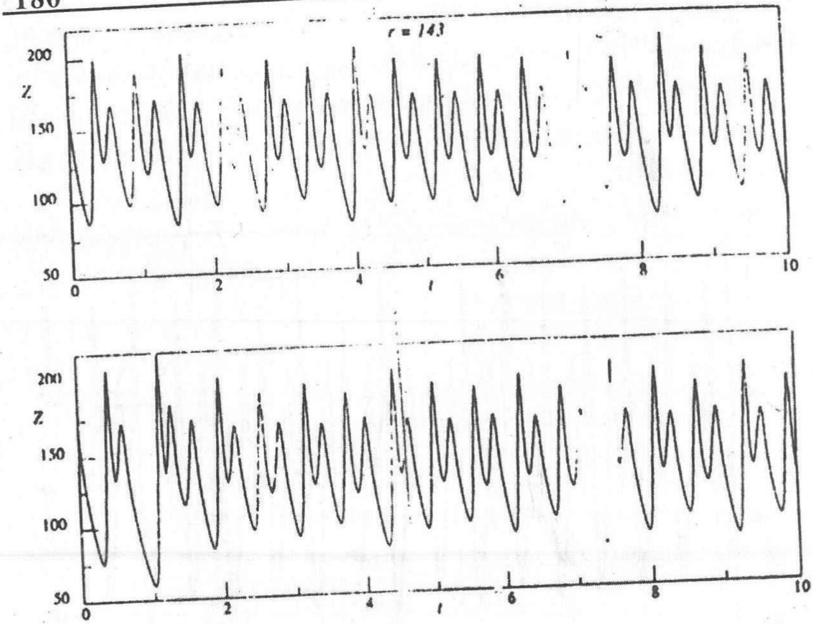
r ની કિંમત ઘટાડીને 150 લઈએ. $r = 150$ માટે Zની જુદા જુદા સમય t માટેની કિંમતો આકૃતિ 12.3.5(b) માં આપેલી છે. આકૃતિ 12.3.5(a) ની સરખામણીમાં ઊંચામાં ઊંચી અને નીચેનામાં નીચી કિંમતો સરખાવતાં આકૃતિ 12.3.5(b) માં આવર્ત બમણો થયો છે. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આવર્ત બમણો થવાનું વિભાજન થયું છે.



r ની કિંમત ઘટાડતાં $r = 150$ ના ઉકેલની z ની કિંમતો આલેખમાંથી જોઈ શકાય છે. આકૃતિ 12.3.5(a) ના z ના આવર્ત કરતાં આ આવર્ત બમણો છે.

આકૃતિ 12.3.5(b)

r ની કિંમત ઘટાડીને $r = 146$ લઈને આવર્ત આકૃતિ 12.3.5(a) ની સરખામણીમાં ચાર ગણો થયેલો મેળવી શકાય. આ જ રીતે r ની કિંમતો ઘટાડતાં આવર્ત બમણા થવાનું બને જાય છે. જ્યારે લૉજિસ્ટીક સમીકરણમાં પ્રચલ A ની કિંમતો વધારતાં આવર્ત બમણો થતો. આ જ રીતે r ની કિંમત ઘટાડીને $r = 143$ માટે જુદી જુદી પ્રારંભિક કિંમતો X(0) = 20, Y(0) = 0, Z(0) = 163 અને X(0) = 20, Y(0) = 0, Z(0) = 166 લઈને ગણતાં મળેલી Zની કિંમતો આકૃતિ 12.3.5(c) માં આપેલી છે.



$r = 143$ માટે પ્રારંભિક કિંમતો X = 20, Y = 0, Z = 163 લઈને લોરેન્ઝ સમીકરણોના ઉકેલની z કિંમતોનો આલેખ આકૃતિ 12.3.5(c) ના ઉપરના ભાગમાં આપ્યો છે. જ્યારે પ્રારંભિક કિંમતો X = 20, Y = 0, Z = 166 લઈને ગણેલી z કિંમતોનો આલેખ આકૃતિ 12.3.5(c) ના નીચેના ભાગમાં આપ્યો છે. શરૂઆતની થોડીક કિંમતો પછી બંને તદ્દન જુદા આલેખો છે.

આકૃતિ 12.3.5(c)

આ પ્રારંભિક કિંમતો માટે બંને આલેખો એકબીજાથી તદ્દન ભિન્ન છે અને આથી આપણે કહી શકીએ કે, $r = 143$નો ઉકેલ અનાવર્ત છે.

12.4 રૉસ્સલર સંહતિ (Rössler System)

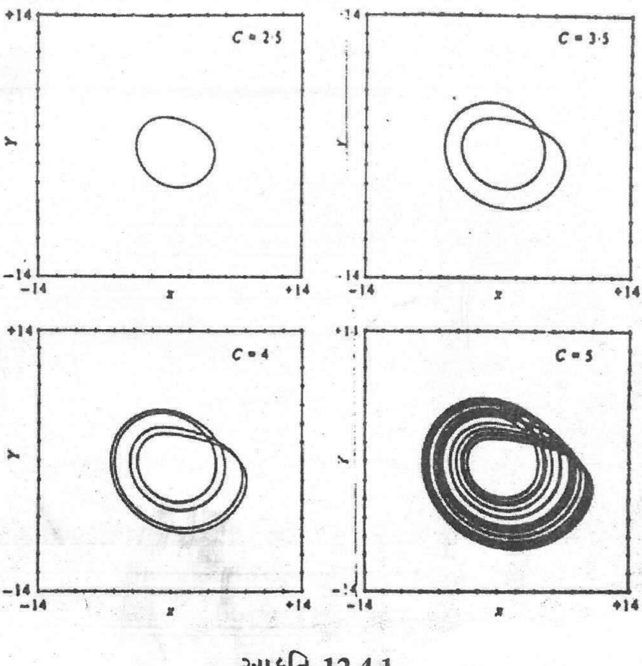
જર્મન વૈજ્ઞાનિક ઓટ્ટો રૉસ્સલરે (Otto Rössler) ઈ.સ. 1976 માં સતત સંહતિ (Continuous System) માં અંધાધૂંધી મળે તેવાં નીચે ત્રણ સરળ સમીકરણોનો

$$\dot{x} = -(y+z)$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + (x-c)z \qquad (12.4.1)$$

અભ્યાસ કર્યો.

અહીંયાં a, b અને c પ્રચલો છે. આમાં ફક્ત એક જ અસુરેખીય (nonlinear) રકમ xz છે, જ્યારે લૉરેન્ઝ સમીકરણોમાં બે અસુરેખીય રકમો છે.

આપણે સમીકરણો (12.4.1) માં $a = b = 0.2$ લઈએ અને c ની જુદી જુદી કિંમતો માટે ઉકેલો મેળવીએ. આકૃતિ 12.4.1 માં જુદી જુદી c ની કિંમતો માટે ભ્રમણકક્ષાના પ્રક્ષેપોના આલેખ આપેલા છે.

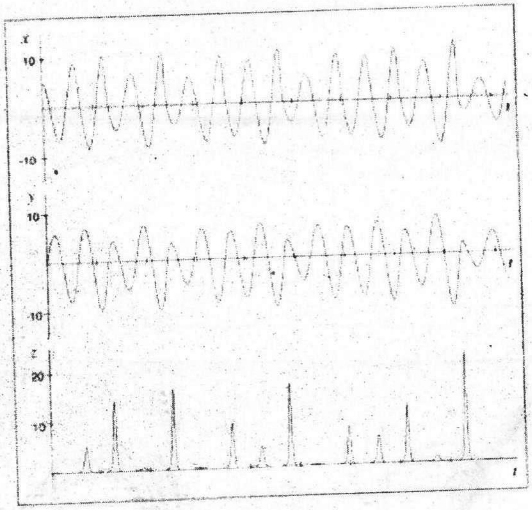


આકૃતિ 12.4.1

$c = 2.5$ માટે લક્ષ્યચક્ર આકર્ષનીશ છે. c ની કિંમત વધારતાં $c = 3.5$ માટે લક્ષ્યચક્ર બે વખત પ્રક્ષેપમાં ગોળગોળ ફરે છે. $c = 2.5$ અને 3.5 વચ્ચે કોઈ વખત વિભાજન

થઈને આવર્ત બમણો થાય છે. લક્ષ્યચક્રને ન છેદવાનું હોઈને વધારે જગ્યાની જરૂર હોઈ, પરિમાણ ત્રણ કે ત્રણથી વધારે જોઈએ. આકૃતિ 12.4.1 માં $c = 4$ માટે પ્રક્ષેપમાં લક્ષ્યચક્ર ચાર વખત ગોળગોળ ફરે છે. આ રીતે આવર્ત ફરીથી બમણો થયો. $c = 3.5$ અને 4.5 ફરીથી વિભાજન થઈને આવર્ત ચાર થયો. આ રીતે આવર્ત બમણો થતો જ જાય છે અને આની હારમાળા અનંત સુધી ચાલે જ જાય છે. આકૃતિ 12.4.1(d) માં $c = 5$ આપણને વિચિત્ર આકર્ષનીશ મળે છે.

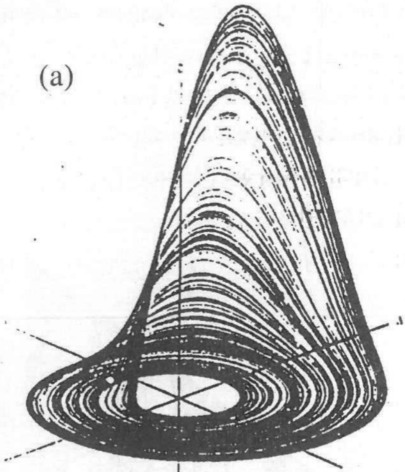
રૉસ્સલર સમીકરણો (12.4.1), પ્રારંભિક કિંમતો $x(0) = -1$, $y(0) = z(0) = 0$ અને $c = 5.7$ ના ઉકેલો $x(t)$, $y(t)$ અને $z(t)$ ના સમય t વિરુદ્ધ આલેખો આકૃતિ 12.4.2 માં આપેલા છે.



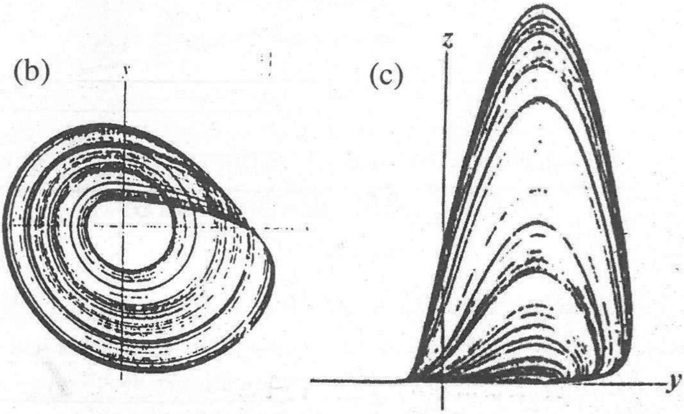
પ્રારંભિક કિંમતો (–1, 0, 0) અને $c = 5.7$ લઈને રૉસ્સલર સમીકરણોના ઉકેલ $x(t), y(t)$ અને $z(t)$ ના t વિરુદ્ધના આલેખો.

આકૃતિ 12.4.2

ત્રિપરિમાણમાં ભ્રમણકક્ષાનો આલેખ સુંદર હોઈ, આકૃતિ 12.4.3(a) માં આપેલો છે. આ પણ વિચિત્ર આકર્ષકનીશ છે. આકૃતિ 12.4.3(b) અને (c) માં સમતલ xy અને સમતલ yz ઉપર ભ્રમણકક્ષાના પ્રક્ષેપો આપેલ છે.



ત્રિપરિમાણમાં રૉસ્સલર આકર્ષનીશ
આકૃતિ 12.4.3(a)

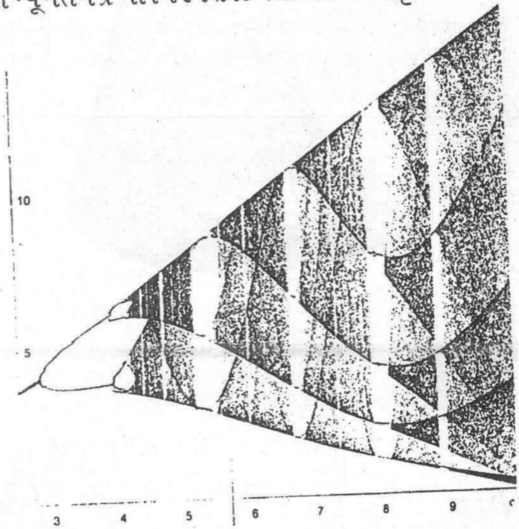


રૉસ્સલર આકર્ષકનીશનો ટોચથી દૃશ્ય (ડાબી બાજુ) અને બાજુથી દૃશ્ય (જમણી બાજુ)

આકૃતિ 12.4.3(b) આકૃતિ 12.4.3(c)

$a = b = 0.2$ અને $2.5 < c < 10$ કિંમતો માટે ઉકેલોના વિભાજનોનો

આલેખ 12.4.4 માં આપેલો છે. આકર્ષનીશની આપણે ન્યૂનત્તમ x ની નિરપેક્ષ કિંમત આલેખીએ છીએ. દા.ત. $c = 3.5$ માટે ન્યૂનતમ x ની નિરપેક્ષ કિંમતો બે છે. આ બંને x ની કિંમતો આકૃતિ 12.4.4 માં બતાવેલી છે. c ની કોઈ એક કિંમત માટે ન્યૂનતમ x ની નિરપેક્ષ કિંમતની સંખ્યાઓ c કિંમત માટે આવર્ત આપે છે. આ જ રીતે c ની 2.5 અને 10 વચ્ચેની ન્યૂનતમ x ની નિરપેક્ષ કિંમતો લઈને આકૃતિ 12.4.4 દોરી છે.

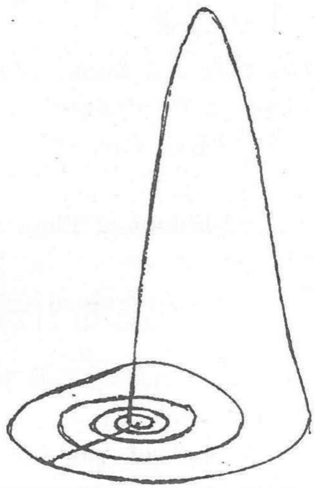


રૉસ્સલર સંહતિનો ફાઈગનબૉમ આલેખ છે. અહીંયાં c ની કિંમતો 2.5 થી 10 સુધી છે. અહીંયાં x ની કિંમતો નિરપેક્ષ કિંમતો છે.

આકૃતિ 12.4.4

$c < 3$ માટે ન્યૂનતમ x ની નિરપેક્ષ કિંમત એક જ છે. જેમ જેમ cની કિંમત વધતી જાય છે તેમ તેમ ભ્રમણકક્ષાના આવર્તનું વિભાજન થઈને બમણા થવાનું ચાલે જાય છે.

$c = 8$ માટે આકૃતિ 12.4.4 માં ન્યૂનતમ x ની નિરપેક્ષ કિંમતો પાંચ છે. આથી $c = 8$ માટે આવર્ત-5 છે. $c = 8$ માટે 5 લક્ષ્યચક્રોના આલેખો આકૃતિ 12.4.5 માં આપેલા છે.



આવર્ત ઉકેલ : રૉસ્સલર સંહિતનો $c = 8$ માટે આકર્ષક આવર્ત ઉકેલ

આકૃતિ 12.4.5

* * *

Not Chaos-like together crush'd and bruis'd,
But, as the world, harmoniously confused :
Where order in variety we see,
And where, tho' all things differ, all agree.

Alexander Pope (Windsor Forest)

આ પુસ્તક નીચેનાં પુસ્તકોનાં આધારે લખાયું છે.

(1) Vrettos, Theodore, **Alexandria**. The Free Press, 2001.

(2) Heath, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. I, II and III**. Dover Publications, New York, 1956.

(3) Bonola, R. **Non-Euclidean Geometry**. Dover Publications, New York 1955.

(4) Blau, Harvey I. **Foundations of Plane Geometry**. Prentice Hall, 2003.

(5) Pedoe, Daniel. Geometry and the visual Arts. Dover Publications, New York 1983.

(6) Wallace, E. C., and West, S. F. **Roads To Geometry, Third Edition**. Prentice Hall, 2004.

(7) Pinter, Charles C. **A book of Abstract Algebra**. McGraw-Hill, Inc., 1982.

(8) Uspensky, J. V. **Theory of Equations**. McGraw-Hill, Inc. 1948.

(9) Hilborn, Robert C. **Chaos and Nonlinear Dynamics**, Second Edition. Oxford University Press, 2000.

(10) Strogatz, Steven H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, 1994.

(11) Gleick, James. **Chaos : Making a New Science**. Penguin Books, 2008.

(12) Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Harmut and Saupe, Dietmar. **Chaos and Fractals : New Frontiers of Science, Second Edition**. Springer, 2004.

પરિશિષ્ટ (Appendix)

A-1 સમૂહ

જો ગણ $G=\{a,b,c,....\}$ હોય અને બે ઘટકો વચ્ચેનો સંયોગ-નિયમ * નીચેની પૂર્વધારણાઓ સંતોષે, તો $<G,*>$ ને સમૂહ (group) કહેવામાં આવે છે.

(1) બંધન અથવા સંવૃતતા (closure) : જો G ના કોઈપણ બે ઘટકો a અને b હોય, તો $a*b$ પણ G નો ઘટક છે.

(2) એકમ (Identity) : G માં એકમ e એવો છે કે જેથી G ના કોઈપણ ઘટક a માટે $a*e=e*a=a$ થાય.

(3) વ્યસ્ત (Inverse) : G ના કોઈપણ ઘટક a માટે G માં a' એવો ઘટક છે કે જેથી $a*a'=a'*a=e$ થાય. a' ને a ના વ્યસ્ત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને a^{-1} તરીકે દર્શાવાય છે.

(4) સંગઠન (Associativity) : G ના કોઈપણ ઘટકો a, b અને c માટે $a*(b*c)=(a*b)*c$ થાય.

ગણ G ના ઘટકોની સંખ્યાને G ની કક્ષા (Order) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ઘટકોની સંખ્યા અનંત હોય તો G ની કક્ષા અનંત કહેવાય. કોઈ ઘટક a માટે જો ન્યૂનતમ ધન પૂર્ણાંક n હોય કે જેથી $a^n=e$ થાય, તો ધન પૂર્ણાંક n ઘટક a ની કક્ષા છે. આવો ધન પૂર્ણાંક n ન હોય તો ઘટક a ની કક્ષા અનંત છે. $<G,*>$ ને સમૂહ કહેવાને બદલે જ્યારે સંયોગ-નિયમ જાણીતો હોય ત્યારે ઘણી વખત G ને સમૂહ કહેવાય છે.

આ ઉપરાંત G ના દરેક ઘટકો a અને b માટે જ્યારે $a*b=b*a$ હોય ત્યારે $<G,*>$ ને સમક્રમી (Commutative, Abelian) સમૂહ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

A-2 ઉદાહરણો

(1) $z=\{....,-2,-1,0,1,2,...\}$ શૂન્ય, ઋણ અને ધન પૂર્ણાંકોનો સમૂહ છે. + એ *

ની જગ્યાએ છે. કોઈપણ પૂર્ણાંકો a અને b નો સરવાળો $a+b$ પૂર્ણાંક છે. o એકમ એવો છે કે જેથી $a+o=o+a=a$ છે. a નો વ્યસ્ત $(-a)$ છે જેથી

$a+(-a)=(-a)+a=0.$

કોઈપણ પૂર્ણાંક a,b અને c માટે $a+(b+c)=(a+b)+c$ હોઈ, $<z,+>$ સમૂહ છે. z ના બધા જ ઘટકો માટે $a+b=b+a$ હોઈ, $<z,+>$ સમક્રમી સમૂહ છે.

જ્યારે $z^{+}=N=\{1,2,3...\}$ માં એકમ o અને a નો વ્યસ્ત $(-a)$ ન હોઈ,

z^{+}, સંયોગ – નિયમ + માટે સમૂહ નથી.

(2) $F(A)=\{f \mid f: A \rightarrow A,$ એક-એક (one to one) અને વ્યાપ્ત (onto) વિધેય$\}$, $F(A)$ એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયોનો ગણ છે. સંયોગ-નિયમ * માટે વિધેયોનો સંગમ 0 (Composition) લઈને સાબિત કરી શકાય કે $< F(A),0 >$ સમૂહ છે.

$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ ન હોઈને સમૂહ $\langle F(A), 0\rangle$ સમક્રમી નથી.

(3) ગણ $\{1,2,3,4\}$ ની સંખ્યાઓને બીજી રીતે ગોઠવીએ તો ગણ $\{2,3,4,1\}$ મળે. આ નવી ગોઠવણને વિધેય ગણી શકાય. કેમકે $1 \rightarrow 2,\ 2 \rightarrow 3,\ 3 \rightarrow 4$ અને $4 \rightarrow 1$ છે અને આ વિધેય એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. આને બીજી રીતે પણ

દર્શાવી શકાય, જે $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4).$

$(1\ 2\ 3\ 4)$ નો અર્થ 1 ની જગ્યાએ 2, 2 ની જગ્યાએ 3, 3 ની જગ્યાએ 4, અને 4 ની જગ્યાએ સૌથી પહેલો 1. જો કોઈ સંખ્યા જગ્યા ન બદલે તો તે સંખ્યા લખવામાં આવતી નથી. કોઈપણ સંખ્યા ન બદલે તો તેને (1) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

આપણે ગણ $\{1, 2, 3\}$ ની સંખ્યાઓની બધી જ ગોઠવણી જોઈએ, જે $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ છે.

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1),\ \alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\ 3),\ \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2),$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ \ 2),\ \delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3),\ K=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3).$$

આ વિધેયો હોઈ, *ને બદલે 0 લઈને ગણતાં $(\alpha 0 \beta)(1)=\alpha(\beta(1))=\alpha(3)=2$ મળે. આ રીતે ગણતાં

$$\alpha 0 \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\,2)=\gamma \text{ મળે.}$$

સામાન્ય રીતે 0 લખવામાં આવતો નથી અને આને ક્રમચયનો ગુણાકાર કહેવામાં આવે છે. આ બધા ગુણાકારો નીચેના ગુણનકોષ્ટકમાં (Multiplication Table) ગણીને આપેલ છે.

ગુણનકોષ્ટક - 1

0	ε	α	β	γ	δ	κ
ε	ε	α	β	γ	δ	κ
α	α	ε	γ	β	κ	δ
β	β	κ	δ	α	ε	γ
γ	γ	δ	κ	ε	α	β
δ	δ	γ	ε	κ	β	α
κ	κ	β	α	δ	γ	ε

આ ગુણનકોષ્ટકથી આપણે સમૂહના નિયમો જેવા કે, એકમ ε , દરેકના વ્યસ્ત અને સંગઠનનો નિયમ ચકાસી શકીએ. આ ગણના ઘટકો $\{1,2,3\}$ ને ગોઠવવાથી મેળવેલા હોઈ, આ ગણને $S_3=\{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma,\delta,k\}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. સંયોગ 0 લેતાં $<S_3,0>$ સમૂહ છે. આ સમૂહ અસમક્રમી (Non-Abelian) છે.

$A=\{1,2,3,.....n\}$ ગણના બધા ક્રમચયના ઘટકોના ગણને S_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે અને $< S_n, 0 >$ સમૂહ છે.

A.3 ઉપસમૂહ

ગણ $H=\{\varepsilon,\alpha\}$ ગુણન કોષ્ટક-1 માંથી જોઈ શકાશે કે સંયોગ 0 લેતાં $< H, 0 >$ સમૂહ છે. $H \subset S_3$ હોઈ, H ને S_3 નો ઉપસમૂહ કહેવાય છે. આ જ રીતે જોઈ શકાશે કે $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon,\alpha\}$, $\{\varepsilon,\gamma\}$, $\{\varepsilon, k\}$ અને $\{\varepsilon,\beta,\delta\}$ પણ ઉપસમૂહો છે.

જો સમૂહ $< G, * >$ હોય અને ઉપગણ $H\left(H \subseteq G\right)$ હોય કે જેથી $< H, * >$ સમૂહ હોય તો H, G નો ઉપસમૂહ કહેવાય છે.

આથી સમૂહ S_3 ના ઉપસમૂહો $\{\varepsilon\},\{\varepsilon,\alpha\},\{\varepsilon,\gamma\},\{\varepsilon,k\},\{\varepsilon,\beta,\gamma\}$ અને S_3 છે.

$\{\varepsilon\}$ અને S_3 અનુચિત (Improper) ઉપસમૂહો છે.

જો ઉપસમૂહ H માં $g^{-1}hg$,જ્યાં g ગણ G નો કોઈપણ ઘટક છે અને ઘટક h એ H નો કોઈપણ ઘટક છે, હોય તો H નેં લાક્ષણિક ઉપસમૂહ (Invariant or Normal subgroup) કહે છે.

$\{\varepsilon,\alpha\}$, S_3 નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ નથી, કારણ કે $k^{-1} \propto k = k^{-1}\delta = k\delta = \gamma \not\in \{\varepsilon,\alpha\}$. જ્યારે $\{\varepsilon,\beta,\delta\}$, S_3 નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ છે તે સરળતાથી સાબિત થઈ શકે.

જો સમૂહ G સમક્રમી સમૂહ હોય, તો $g^{-1}hg = g^{-1}gh = h$ થાય. આથી સમક્રમી સમૂહના ઉપસમૂહો લાક્ષણિક ઉપસમૂહો છે.

સમૂહ G ના a અને b કોઈપણ ઘટકો છે. સમૂહ G ના ઘટક $c = a^{-1}b^{-1}ab$ ક્રમક (commutator) તરીકે ઓળખાય છે. આવા ઘટકો લાક્ષણિક ઉપસમૂહનું નિર્માણ કરે છે.

પ્રમેય A.3.1 : સમૂહ G ના ક્રમકોનો ગણ સમૂહ G ના લાક્ષણિક ઉપસમૂહનું નિર્માણ કરે છે.

સાબિતિ : પહેલાં ક્રમકોનો ગણસમૂહ G ના લાક્ષણિક ઉપસમૂહનું નિર્માણ કરે છે.

(1) $c = a^{-1}b^{-1}ab$ સમૂહ G નો ક્રમક છે. આથી c ક્રમકોના ગણમાં છે.

(2) $c^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = (ab)^{-1}(a^{-1}b^{-1})^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba$ આથી c^{-1} .ક્રમકોના ગણમાં છે.

(3) $e = e^{-1}e^{-1}ee$ ક્રમકોના ગણમાં છે.
આથી ક્રમકોનો ગણસમૂહ G નો ઉપસમૂહ છે.

આ ઉપસમૂહ સમૂહ G નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ સાબિત કરવા માટે $g^{-1}cg$ ક્રમક ગણમાં છે તે સાબિત કરીએ. g સમૂહ G નો કોઈપણ ઘટક છે.

$$
\begin{aligned}
g^{-1}cg &= g^{-1}\left(a^{-1}b^{-1}ab\right)g \\
&= \left(g^{-1}a^{-1}b^{-1}a\right)(e)(bg) \\
&= \left(g^{-1}a^{-1}b^{-1}a\right)\left(gbb^{-1}g^{-1}\right)(bg) \\
&= \left(g^{-1}a^{-1}b^{-1}a\,g\,b\right)\left(b^{-1}g^{-1}bg\right) \\
&= \left[(ag)^{-1}b^{-1}(a\,g)b\right]\left(b^{-1}g^{-1}bg\right)
\end{aligned}
$$

આ ક્રમકો ઉપસમૂહમાં હોઈ, ક્રમકોનો ઉપસમૂહ સમૂહ G નો લાક્ષણિક ઉપસમૂહ છે.

કુશી (Cauchy) પ્રમેય A.3.2 : કોઈપણ સીમિત સમૂહ G ના n ઘટકો છે. જો કોઈ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક p (prime integer), n ને ભાગે, તો G માં કક્ષા P નો ઘટક છે.

B.1 ક્ષેત્ર (Field)

જો ગણ $F = \{a, b, c, \ldots\}$ હોય અને બે ઘટકોને જોડવા માટેના સંયોગ -

નિયમો + (Addition) અને . (Multiplication) નીચેની પૂર્વધારણાઓ સંતોષે, તો $\langle F, +, \cdot \rangle$ ને ક્ષેત્ર કહેવામાં આવે છે.

સરવાળો

(1) બંધન અથવા સંવૃતતા (Closure) : જો F ના કોઈપણ બે ઘટકો a અને b હોય, તો $a+b$ પણ F નો ઘટક છે.

(2) સમક્રમી (Commutative) : $a+b=b+a \quad \forall\ a,b \in F$

(3) સંગઠન (Associativity) : $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall\ a,b,c \in F$

(4) એકમ (Identity) : F માં 0 એવો ઘટક છે કે જેથી F નો કોઈપણ ઘટક a માટે $a+0=0+a=a$ થાય.

(5) વ્યસ્ત (Inverse) : F ના કોઈપણ ઘટક a માટે F માં $(-a)$ એવો ઘટક છે કે જેથી $a+(-a)=0=(-a)+a$ થાય.

ગુણાકાર

(6) બંધન અથવા સંવૃતતા (Closure) : જો F ના કોઈપણ બે ઘટકો a અને b હોય, તો $a \cdot b$ પણ F નો ઘટક છે.

(7) સમક્રમી (Commutative) : $a \cdot b=b \cdot a \ \forall\ a,b \in F$

(8) સંગઠન : $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c \quad \forall\ a,b,c \in F$

(9) એકમ : F માં 1 એવો ઘટક છે કે જેથી F નો કોઈપણ ઘટક a માટે $a \cdot 1=1 \cdot a=a$ થાય.

(10) વ્યસ્ત : F ના કોઈપણ ઘટક $a(a \neq 0)$ માટે a^{-1} એવો ઘટક છે કે જેથી $a \cdot a^{-1}=a^{-1} \cdot a=1$ થાય.

વિભાજન (Distributive) :

ડાબી બાજુનું : $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \ \forall a, b, c \in F$

જમણી બાજુનું : $(b+c) \cdot a=b \cdot a+c \cdot a \ \forall a, b, c \in F$

Q (સંમેય), R (વાસ્તવિક) અને C (શંકર) સંખ્યાઓના ગણ સામાન્ય

સરવાળા અને ગુણાકાર લઈને ક્ષેત્ર થાય છે.

E અને F બંને ક્ષેત્રો છે. જો $F \subset E$ હોય તો F એ E નો વિસ્તાર કહેવાય. જેમકે, Q એ R નો અને Q અને R એ C ના વિસ્તારો ગણાય. બીજી રીતે જોઈએ તો, E એ F નો વધારેલો (extended) ભાગ છે. જેમકે, R એ Q નો વધારેલો ભાગ, C એ R અને Q નો વધારેલો ભાગ છે.

* * *

ફોજદારી કાયદામાં ઉમેરવાની કલમ

જ્યારે આપણી પાર્લામેન્ટ થશે ત્યારે ફોજદારી કાયદામાં એક કલમ દાખલ કરવાની હિલચાલ કરવી પડશે, એમ જોઉં છું : બંને હિન્દુસ્તાની એક જ ભાષા જાણતા હોવા છતાં એક માણસ બીજાને અંગ્રેજીમાં લખે, અથવા બીજા સાથે તે ભાષામાં બોલે, તેને ઓછામાં ઓછી છ માસની સખત મજૂરી સાથે સજા કરવામાં આવશે. આવી કલમ વિશે તમારો અભિપ્રાય જણાવશોજી, અને સ્વરાજ મળ્યું નથી તે દરમિયાન જે ગુનો કરે તેને સારૂ શા ઈલાજ લેવા ઘટે એ પણ જણાવશો.

મો. ક. ગાંધી

સૂચિ

અતિવલયી ભૂમિતિ 32
અમરૂ 18
અલ્માગેસ્ટ 7
આઈન્સ્ટાઈન 54, 97
આઈસેન્સ્ટાઈન કસોટી 108
આર્કિમિડિઝ 13
આત્મરૂપતાઓ 99
આર્સ મેગ્ના 85, 89
એબેલ 95
એરિસ્ટોટલ 2, 7
એલેકઝાન્ડર (સિકંદર) 7
એલેકઝાન્ડ્રિયા 6
એલિમેન્ટસ્ 6, 11, 22
ઑન ડિસેકશન્સ 6
ઑન એનાટોમિકલ પ્રોસિજર્સ 6
ઑડીસી (Odyssey) 2
ઓમેગા ત્રિકોણ 38
ઓરેસ્ટીસ 17
ઑઇલર (Euler) 93
અંધાધૂંધી (કેઓસ) 111, 129, 149

ઈકોલ પૉલિટેક્નિક 62, 97
ઈજિપ્ત 1, 7, 11, 18

ઉપવલયી ભૂમિતિ 49
ઉપવલયી ભૂમિતિના ગુણધર્મો 51
કનફ્યુસિયસ 1
કાર્ડાનો 84
કાર્ડાનોની રીત 85
કાલેલકર કાકા 88
કેઑસ (અંધાધૂંધી) 111, 129, 149
કેન્ટ 34
કેન્ટરગણ 79
કેમ્બ્રીજ 7
કુશી 97
કુશી પ્રમેય 191
ક્રૉમવેલ ઑલિવર 92
ક્ષેત્ર 191

ગાલોઆ 96
ગાલોઆ સમૂહ 98
ગાલોઆ પ્રમેય 103
ગાંધી મો. ક. 193
ગેરાર્ડ ઑફ ક્રેમોના 12
ગેલેન 7
ગૉટીન્ગન 7, 50
ગૉસ 28, 32, 50

ચતુર્ઘાતી સમીકરણ 89
જુલિયાગણો 62
જોશી, ઉમાશંકર X, 33
ટોલેમી 7
ઠાકુર રવિન્દ્રનાથ 48
ત્રિઘાતી સમીકરણ 81, 83
થેલેસ 2
થીઓન 12, 16

દકાર્ત 96

દ્વિઘાતી સમીકરણ 81, 82
ધર્માધિકારી દાદા 110

ન્યુટન 7, 111
પરિમાણ 75
પાયથાગોરસ 2
પાયથાગોરીઅન 4
પાશ (Pasch) પ્રમેય 34
પોપ એલેકઝાન્ડર 185
પૉઇન્કેરની સૃષ્ટિ 44
પંચઘાતી સમીકરણ 93
પ્લેફરનો સિદ્ધાંત 27
પ્લેટો 2
પ્રોકલસ 3

ફાઇગનબૉમ સંખ્યાઓ 155, 157
ફાટુડસ્ટ 66
ફ્રાન્કલિન બેન્ઝામિન 55
ફોરિયર 97
ફેરારિ 89
ફેરારિની રીત 89
ફ્રેક્ટલ ભૂમિતિ 56

બરખોફ 26
બીજનાં સૂત્રો 103
બોલ્યાઈ જેનોસ 32
બોલ્યાઈ ફાર્કસ્ 32
બુદ્ધ ગૌતમ 1
ભાવે વિનોબા 80
મેઘાણી ઝવેરચંદ 19
માઓસિયન 10

મેન્ડેલબ્રોટ 56
મેન્ડેલબ્રોટ ગણ 68
યુક્લિડ 11
યુક્લિડ ભૂમિતિ 21
રિચાર્ડસન એલ.એફ. 154

રૉસ્સલર સમીકરણો 180
રૉસ્સલર સમીકરણોના ઉકેલો 181
રૂફ્ફિની 94

લાગ્રાન્જ 11, 94
લાપ્લાસ 111
લિબચાબેરના પ્રયોગો 164
લિયાપુનોવ દર્શક 149
લીબનીઝ 96
લોબાચેવ્સ્કી 32
લેમ્બર્ટ 30
લેમ્બર્ટ ચતુષ્કોણ 29, 42, 53
લૉજિસ્ટીક સમીકરણ 113, 115
લૉજિસ્ટીક સમીકરણના ઉકેલો 119
લૉરેન્ઝ સમીકરણો 167
લૉરેન્ઝ સમીકરણોના ઉકેલો 172

વિચિત્ર આકર્ષનીસ (Strange attractor) 170
વૉન કૉશ આલેખ 59
વોશીંગ્ટન III
વ્યાસ (મહારાજ) XIV

સમૂહ 187
ઉપસમૂહ 190
    લાક્ષણિક ઉપસમૂહ 190
ઉકેલનીય સમૂહ 104

સાપેક્ષવાદ 111
સેકચેરિ 28
સેકચેરિ ચતુષ્કોણ 29, 41, 52
સૉક્રેટિસ 2
સિરપિન્સ્કિ ગાસ્કેટ 57
સ્થિરબિંદુઓ 117, 168
    આકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ 134
    પ્રત્યાકર્ષક સ્થિરબિંદુઓ 134
સ્થિરબિંદુઓનું વિભાજન 137
સ્પર્શક વિભાજન 143
સ્વ-સમાનતા 162

હાઈપેશ્યા 16
હીથ 12
હીરોફીલસ 6
હિલ્બર્ટ 26

એમિ'રિટસ પ્રોફેસર ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ. માધ્યમિક શિક્ષણ : સર્વ વિદ્યાલય, કડી. B.Sc. (ગુજ. યુનિ., 1957), M.Sc. (એસ. પી. યુનિ., 1959), Ph.D. (યુનિવર્સિટી ઑફ કેલિફોર્નિયા, બર્કલી, 1965-69). 1957થી1965 દરમિયાન વી. પી. સાયન્સ કૉલેજ, વલ્લભવિદ્યાનગર, ગુજરાત કૉલેજ, સરદાર પટેલ યુનિવર્સિટી અને એમ. જી. સાયન્સ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં ગણિતશાસ્ત્રના અધ્યાપક તરીકે સેવાઓ આપી. હમ્બોલ્ટ સ્ટેટ યુનિવર્સિટી, આર્કેટા (યુ.એસ.એ.)માં ગણિતશાસ્ત્ર વિભાગમાં 1969માં જોડાયા અને 2005 સુધી નિવૃત્તિપર્યંત સેવાઓ આપી. પ્રકાશનો : Numerical Analysis (1994) તથા તેમના સંશોધન લેખો વિદ્વત્ત જર્નલ્સ 'Computers & Fluids' તથા 'Journal of Computational Physics'માં પ્રકાશિત થયા છે. આ ઉપરાંત ગણિત વિષયક લોકભોગ્ય લેખો 'સુગણિતમ્', 'કુમાર', 'બુદ્ધિપ્રકાશ' વગેરે સામયિકોમાં પ્રગટ થયા છે. નિવૃત્તિ બાદ વતન શેરથામાં સ્થાયી થયા છે.

સંપર્ક : નરસિંહજી મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ,
મુ.પો. શેરથા, તા. જિ. ગાંધીનગર.
મો. 9824049739

સર્વવિદ્યાલય

સર્વ વિદ્યાલય કેળવણી મંડળ

કડી ગાંધીનગર